اروین کرویت سیگ

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلد دوم

www.Mech-88.blogfa.com

ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلد دوم

اروین کرویت سیگ

ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

Advanced Engineering Mathematics
Erwin Kreyszig
Fourth Edition
John Wiley & Sons, 1979

ریاضیات مهندسی پیشرفته
جلد دوم
تألیف اروین کرویت سیگ
ترجمهٔ دکتر عبدالله شیدفر، دکتر حسین فرمان
ویراستهٔ علی راکعی

مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۶
چاپ ششم ۱۳۸۱
تعداد ۲۰۰۰
حروفچینی: بینش نو
چاپ و صحافی: مازیار
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

کرویت سیگ، اروین- Kreyszig, Erwin
ریاضیات مهندسی پیشرفته / اروین کرویت سیگ؛ ترجمهٔ عبدالله شیدفر، حسین فرمان. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۳-۱۳۶۶.
۲ج. : مصور، جدول، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۲۰، ۳۱۷. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۹، ۳۴)
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی: Advanced engineering mathematics.
واژه‌نامه.
کتابنامه.
ج. ۲ (چاپ ششم: ۱۳۸۱).

ISBN 964-01-0120-6 (V.1)
ISBN 964-01-0317-9 (V.2)
ISBN 964-01-8052-1 (set)

۱. فیزیک ریاضی. ۲. ریاضیات مهندسی. الف. شیدفر، عبدالله، ۱۳۱۹- ، مترجم.
ب. فرمان، حسین، ۱۳۱۷ - ، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.
۹ر۴ک/QA۴۰۱ ۵۱۰/۲۴۶۲
۱۳۶۳
کتابخانهٔ ملی ایران ۷۷۶ - ۶۷م*

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه
فصل ۱۰ سری و انتگرال فوریه	۶۲۹
۱.۱۰ توابع دوره‌ای. سریهای مثلثاتی	۶۳۰
۲.۱۰ سریهای فوریه. فرمولهای اویلر	۶۳۳
۳.۱۰ توابع با دورهٔ دلخواه	۶۴۳
۴.۱۰ توابع زوج و فرد	۶۴۷
۵.۱۰ بسط نیم دامنه‌ای	۶۵۳
۶.۱۰ تعیین ضرایب فوریه بدون انتگرال‌گیری	۶۵۹
۷.۱۰ نوسانهای واداشته	۶۶۶
۸.۱۰ تقریب توسط چند جمله‌ایهای مثلثاتی. خطای مربعی	۶۷۱
۹.۱۰ انتگرال فوریه	۶۷۴
فصل ۱۱ معادلات با مشتق جزئی	۶۸۵
۱.۱۱ مفاهیم اساسی	۶۸۶
۲.۱۱ مدل سازی : نخ مرتعش. معادلهٔ موج یك بعدی	۶۸۹
۳.۱۱ جدا سازی متغیرها (روش ضربی)	۶۹۱
۴.۱۱ جواب دالامبر معادلهٔ موج	۷۰۰
۵.۱۱ جریان گرمای یك بعدی	۷۰۵
۶.۱۱ جریان گرما در میله‌ای نامتناهی	۷۱۱
۷.۱۱ مدلسازی : غشای مرتعش. معادلهٔ موج دو بعدی	۷۱۷

عنوان	صفحه

۸.۱۱ غشای مستطیلی	۷۱۹
۹.۱۱ لاپلاسی در مختصات قطبی	۷۲۸
۱۰.۱۱ غشای مستدیر. معادلهٔ بسل	۷۳۱
۱۱.۱۱ معادلهٔ لاپلاس. پتانسیل	۷۳۷
۱۲.۱۱ معادلهٔ لاپلاس درمختصات کروی. معادلهٔ لژاندر	۷۴۲
۱۳.۱۱ کاربرد تبدیل لاپلاس در معادلات با مشتق جزئی	۷۴۷
فصل ۱۲ اعداد مختلط. توابع تحلیلی مختلط	۷۵۵
۱.۱۲ اعداد مختلط	۷۵۶
۲.۱۲ شکل قطبی اعداد مختلط. نامساوی مثلث	۷۶۲
۳.۱۲ منحنیها و نواحی درصفحهٔ مختلط	۷۶۶
۴.۱۲ تابع مختلط. حد. مشتق. تابع تحلیلی	۷۷۰
۵.۱۲ معادلات کوشی ـ ریمان. معادلهٔ لاپلاس	۷۷۶
۶.۱۲ تابع گویا. ریشه	۷۸۳
۷.۱۲ تابع نمایی	۷۸۸
۸.۱۲ توابع مثلثاتی و هذلولی‌گون	۷۹۱
۹.۱۲ لگاریتم. توان عمومی	۷۹۵
فصل ۱۳ نگاشت همدیسی	۸۰۱
۱.۱۳ نگاشت	۸۰۲
۲.۱۳ نگاشت همدیسی	۸۱۰
۳.۱۳ تبدیلهای کسری خطی	۸۱۶
۴.۱۳ تبدیلهای کسری خطی خاص	۸۱۹
۵.۱۳ نگاشت با سایر توابع مقدماتی	۸۲۵
۶.۱۳ رویه‌های ریمان	۸۳۴
فصل ۱۴ انتگرال مختلط	۸۴۱
۱.۱۴ انتگرال روی خط در صفحهٔ مختلط	۸۴۲
۲.۱۴ خواص اساسی انتگرال روی خط مختلط	۸۴۹
۳.۱۴ قضیهٔ انتگرال کشی	۸۵۲

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه
۴.۱۴ محاسبهٔ انتگرال روی خط با انتگرالگیری نامعین	۸۶۱
۵.۱۴ فرمول انتگرال کشی	۸۶۴
۶.۱۴ مشتقات یك تابع تحلیلی	۸۶۸
فصل ۱۵ دنباله‌ها و سریها	۸۷۳
۱.۱۵ دنباله‌ها	۸۷۴
۲.۱۵ سری	۸۷۹
۳.۱۵ اصل همگرایی کوشی در مورد سریها و دنباله‌ها	۸۸۲
۴.۱۵ دنبالهٔ حقیقی یکنوا. آزمون لایبنیتس در مورد سریهای حقیقی	۸۸۷
۵.۱۵ آزمونهای همگرایی و واگرایی درمورد سریها	۸۹۱
۶.۱۵ اعمالی که روی سریها انجام می‌شود	۹۰۰
فصل ۱۶ سری توانی، سری تیلور،	۹۰۷
۱.۱۶ سری توانی	۹۰۷
۲.۱۶ توابعی که با سری توانی نمایش داده می‌شوند	۹۱۷
۳.۱۶ سری تیلور	۹۲۱
۴.۱۶ سری تیلور توابع مقدماتی	۹۲۸
۵.۱۶ روشهای عملی برای به‌دست آوردن سری توانی	۹۳۱
۶.۱۶ همگرایی یکنوا	۹۳۶
۷.۱۶ سری لوران	۹۴۶
۸.۱۶ تحلیلی بودن دربینهایت. صفرها و تکینیها	۹۵۳
فصل ۱۷ انتگرالگیری به روش مانده‌ها	۹۶۳
۱.۱۷ مانده‌ها	۹۶۳
۲.۱۷ قضیهٔ مانده	۹۶۸
۳.۱۷ محاسبهٔ انتگرالهای حقیقی	۹۷۱
۴.۱۷ چند نوع دیگر از انتگرالهای حقیقی	۹۷۶
فصل ۱۸ توابع تحلیلی مختلط و نظریهٔ پتانسیل	۹۸۳
۱.۱۸ میدانهای الکترواستاتیك	۹۸۴

عنوان	صفحه
۲.۱۸ جریان سیال دوبعدی	۹۸۸
۳.۱۸ خواص عمومی توابع همساز	۹۹۷
۴.۱۸ فرمول انتگرال پواسن	۱۰۰۱
فصل ۱۹ آنالیز عددی	۱۰۰۹
۱.۱۹ خطاها و اشتباهات کامپیوترهای خودکار	۱۰۱۰
۲.۱۹ حل معادلات با تکرار	۱۰۱۶
۳.۱۹ تفاضلهای متناهی	۱۰۲۶
۴.۱۹ درون‌یابی	۱۰۳۳
۵.۱۹ اسپلاین	۱۰۴۱
۶.۱۹ انتگرالگیری و مشتق گیری عددی	۱۰۴۷
۷.۱۹ روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول	۱۰۵۸
۸.۱۹ روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم	۱۰۶۹
۹.۱۹ دستگاههای معادلات خطی. حذف گاوسی	۱۰۷۶
۱۰.۱۹ دستگاههای معادلات خطی. حل از راه تکرار	۱۰۸۲
۱۱.۱۹ دستگاههای معادلات خطی. بدطرحی	۱۰۸۸
۱۲.۱۹ روش حداقل مربعات	۱۰۹۲
۱۳.۱۹ اشتمال مقادیر ویژهٔ ماتریس	۱۰۹۷
۱۴.۱۹ تعیین مقادیر ویژه با تکرار	۱۱۰۳
۱۵.۱۹ بسطهای مجانبی	۱۱۰۷
فصل ۲۰ احتمال و آمار	۱۱۱۹
۱.۲۰ طبیعت و هدف آمار ریاضی	۱۱۱۹
۲.۲۰ نمایش جدولی و نموداری نمونه‌ها	۱۱۲۱
۳.۲۰ میانگین نمونه و واریانس نمونه	۱۱۲۹
۴.۲۰ آزمایش تصادفی، برآمد، پیشامد	۱۱۳۴
۵.۲۰ احتمال	۱۱۴۰
۶.۲۰ جایگشت و ترکیب	۱۱۴۶
۷.۲۰ متغیرهای تصادفی. توزیعهای گسسته و پیوسته	۱۱۵۲
۸.۲۰ میانگین و واریانس یك توزیع	۱۱۵۹

عنوان	صفحه

۹.۲۰ توزیعهای دوجمله‌ای، پواسن، و فوق هندسی	۱۱۶۶
۱۰.۲۰ توزیع نرمال	۱۱۷۳
۱۱.۲۰ توزیعهای چند متغیر تصادفی	۱۱۸۲
۱۲.۲۰ نمونه‌گیری تصادفی. اعداد تصادفی	۱۱۹۲
۱۳.۲۰ برآورد پارامترها	۱۱۹۴
۱۴.۲۰ فاصلهٔ اطمینان	۱۲۰۰
۱۵.۲۰ آزمون فرض، تصمیم	۱۲۱۲
۱۶.۲۰ کنترل کیفیت	۱۲۲۶
۱۷.۲۰ نمونه‌گیری برای پذیرش	۱۲۳۲
۱۸.۲۰ نیکویی برازش. آزمون χ^2	۱۲۳۹
۱۹.۲۰ آزمونهای ناپارامتری	۱۲۴۴
۲۰.۲۰ زوجهای اندازه‌گیری. برازاندن خطوط مستقیم	۱۲۴۸
ضمیمهٔ ۱ : مراجع	۱۲۵۵
ضمیمهٔ ۲ : جواب مسائل با شماره فرد	۱۲۶۰
ضمیمهٔ ۳ : فرمولهایی در مورد توابع خاص	۱۳۳۲
ضمیمهٔ ۴ : جدولها	۱۳۴۱
واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی	۱۳۵۷
واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی	۱۳۷۵
فهرست راهنما	۱۳۹۳

www.Mech-88.blogfa.com

۱۰

سری و انتگرال فوریه

توابع دوره‌ای به کرات در مسائل مهندسی مطرح می‌شوند. نمایش این توابع برحسب توابع دوره‌ای ساده، مانند سینوس و کسینوس، که منجر به سری فوریه می‌گردد از نظر عملی اهمیت زیادی دارد. این سریها که به یاد ژوزف فوریه* (۱۷۶۸ — ۱۸۳۰)، فیزیکدان فرانسوی، سریهای فوریه نام‌گرفته‌اند ابزارپرقدرتی برای حل مسائل مختلف، از جمله معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتق جزئی، هستند.

در این فصل مفاهیم اساسی، مطالب و تکنیکهایی را که در ارتباط با سری فوریه هستند مورد بحث قرار می‌دهیم. مثالهای توضیحی و برخی کاربردهای مهم این سریها در مهندسی را نیز در همین فصل خواهیم آورد. کاربردهای بیشتر در فصل بعدکه اختصاص به معادلات با مشتق جزئی و مسائل بامقدارکرانه‌ای دارد ارائه خواهد شد.

نظریهٔ سریهای فوریه نسبتاً پیچیده است، ولی کاربرد این سریها ساده است. مطمئناً سریهای فوریه جامعتر از سریهای تیلورهستند، زیرا بسیاری از توابع دوره‌ای ناپیوسته راکه از نظرعملی واجد اهمیتند و قابل نمایش باسری تیلور نیستند می‌توان به سری‌فوریه بسط داد.

بخش آخراین فصل اختصاص به‌انتگرال فوریه دارد. کاربردهای انتگرال فوریه در معادلات با مشتق جزئی در فصل بعد (در بخش ۶.۱۱) مورد بررسی قرارخواهدگرفت.

پیشنیاز این فصل: حساب انتگرال مقدماتی.

بخشهایی‌که در دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۶.۱۰ الی ۸.۱۰.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت D.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

---

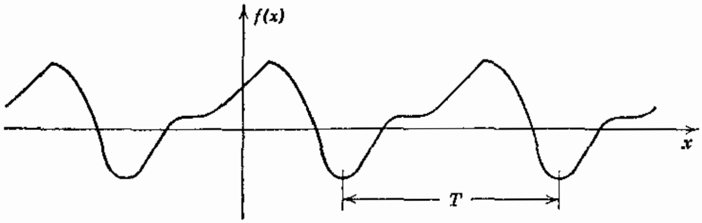
* Joseph Fourier

۱.۱۰ توابع دوره‌ای . سریهای مثلثاتی

تابع $f(x)$ را **دوره‌ای** نامند هرگاه این تابع به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده باشد و عدد مثبتی مانند T موجود باشد ، به طوری که

$$f(x+T)=f(x) \qquad \text{به ازای هر } x \tag{۱}$$

عدد T را **دورهٔ**[۱] $f(x)$ می‌نامند. نمودار چنین تابعی از تکرار دوره‌ای نمودار آن در هر فاصله‌ای که طولش T باشد به‌دست می‌آید (شکل ۲۰۳).



شکل ۲۰۳. تابع دوره‌ای

از (۱) نتیجه می‌شودکه اگر n عدد صحیح دلخواهی باشد آنگاه

$$f(x+nT)=f(x) \qquad \text{به ازای هر } x$$

ازاین‌رو $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، . . . نیز دورهٔ $f(x)$ هستند. به‌علاوه چنانچه $f(x)$ و $g(x)$ دارای دورهٔ 2π باشند ، آنگاه دورهٔ تابع

$$h(x)=af(x)+bg(x) \qquad (a \text{ و } b \text{ ثابتند})$$

T است.

مثالهای معروف توابع دوره‌ای توابع سینوس و کسینوس هستند، توجه داریم که بنابه تعریف ، تابع $f=c$ (c ثابت) نیزدوره‌ای است ، زیرا این تابع به ازای هر Tی مثبت در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند.

هدف ما درچند بخش نخست این فصل پیدا کردن نمایش‌توابع گوناگون با دورهٔ 2π برحسب توابع سادهٔ زیراست :

---

۱. هرگاه تابع دوره‌ای $f(x)$ دارای کوچکترین دورهٔ $T(>0)$ باشد، اغلب اوقات‌این‌دوره را دورهٔ‌اولیهٔ $f(x)$ می‌نامند. مثلا ، دورهٔ اولیهٔ $\sin x$ و $\sin 2x$ به ترتیب 2π و π است.
مثالهای توابع دوره‌ای بدون دورهٔ اولیه عبارتند از ثابت $= f$ و

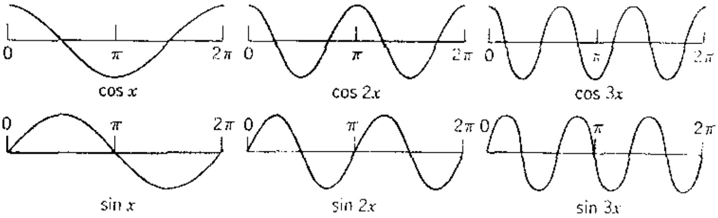
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 1 & \text{اگر } x \text{ گویا نباشد} \end{cases}$$

$$1,\quad \cos x,\ \sin x,\quad \cos ۲x,\ \sin ۲x, \cdots,\quad \cos nx,\ \sin nx, \cdots;$$

خود این توابع نیزدارای دورهٔ ۲π هستند (شکل ۲۰۴). سریهایی که درارتباط با این موضوع مطرح می‌شوند به صورت

$$(۲)\qquad a_۰ + a_۱\cos x + b_۱\sin x + a_۲\cos ۲x + b_۲\sin ۲x + \cdots$$

هستند، که $a_۰$ ، $a_۱$ ، $a_۲$ ، . . . ، $b_۱$ ، $b_۲$ ، . . . ثابتهای حقیقی هستند. چنین سریی یك **سری مثلثاتی** نامیده می‌شود، a_n و b_n را **ضرایب** سری می‌نامند.



شکل ۲۰۴. توابع کسینوس و سینوس با دورهٔ ۲π

مشاهده می‌کنیم که هرجملهٔسری دارای دورهٔ ۲π است. ازاین‌روهرگاه سری همگرا باشد، مجموع آن تابعی با دورهٔ ۲π خواهد بود.

توابع دوره‌ایی که‌درمسائل مهندسی مطرح می‌شوند اغلب‌اوقات نسبتاً پیچیده هستند، و بدین‌جهت نمایش این توابع برحسب توابع دوره‌ای ساده مفید است. چنانچه خواهیم دید تقریباً هرتابع دوره‌ای $f(x)$ با دورهٔ ۲π راکه درکاربردها، مثلا درارتعاشات، ظاهر می‌شود می‌توان به صورت یك سری مثلثاتی نمایش داد و با توجه به آن به فرمولهایی برای ضرایب رابطهٔ (۲) برحسب $f(x)$ رسید، به‌طوری که (۲) همگرا ودارای مجموع $f(x)$ باشد. در مرحلهٔ بعد نتایج حاصله را برای توابع با دورهٔ دلخواه تعمیم خواهیم داد. این تعمیم بسیار ساده خواهد بود.

مسائل بخش ۱۰۱۰

T، کوچکترین دورهٔ مثبت توابع زیر را بیابید.

۱. $\cos x$ ، $\sin x$ ، $\cos ۲x$ ، $\sin ۲x$ ، $\cos \pi x$ ، $\sin \pi x$ ، $\cos ۲\pi x$ ، $\sin ۲\pi x$

۲. $\cos nx$ ، $\sin nx$ ، $\cos \frac{۲\pi x}{k}$ ، $\sin \frac{۲\pi x}{k}$ ، $\cos \frac{۲\pi nx}{k}$ ، $\sin \frac{۲\pi nx}{k}$

نموداردقیق توابع زیررا رسم کنید.

۳. $\sin x$، $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$، $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$،

$$f(x)=\begin{cases}-\pi/4 & -\pi<x<0\\ \pi/4 & 0<x<\pi\end{cases} \quad \text{و} \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

۴. $\sin 2\pi x$، $\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 6\pi x$، $\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 6\pi x+\frac{1}{5}\sin 10\pi x$

۵. $\sin x$، $\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$، $\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$،

$f(x)=x/2$ به ازای $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$

۶. $-\cos x$، $-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x$، $-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x$،

$f(x)=x^2/4-\pi^2/12$ به ازای $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$

۷. $f(x)=x^3$ به ازای $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$

۸. $f(x)=e^x$ به ازای $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$

۹. $f(x)=\cosh 2x$ به ازای $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$

۱۰. $$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases} \quad \text{و} \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

۱۱. $$f(x)=\begin{cases}-x^2 & -\pi<x<0\\ x^2 & 0<x<\pi\end{cases} \quad \text{و} \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

۱۲. $$f(x)=\begin{cases}1 & -\pi<x<0\\ \cos^2 2x & 0<x<\pi\end{cases} \quad \text{و} \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

۱۳. اگر T دوره‌ای از $f(x)$ باشد، نشان دهید که nT ، $n=2, 3, \ldots$ ، نیز دوره‌ای از $f(x)$ است.

۱۴. هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دارای دورهٔ T باشند، نشان دهید که $h=af+bg$ (a و b ثابت) دارای دورهٔ T است. یعنی مجموعهٔ توابع با دورهٔ T فضای برداری تشکیل

می‌دهند.

۱۵. نشان دهید که تابع ثابت $=f(x)$، به‌ازای هر عدد مثبت T، تابعی دوره‌ای با دورهٔ T است.

۱۶. هر گاه $f(x)$ تابعی دوره‌ای از x با دورهٔ T باشد، نشان دهید که $f(ax)$، $a>0$، تابعی دوره‌ای از x با دورهٔ T/a است، و $f(x/b)$، $b>0$، تابعی دوره‌ای از x با دورهٔ bT است. درستی این احکام را در مورد $f(x)=\sin x$، $a=b=2$ تحقیق کنید.

انتگرالهای زیر را که در آنها $n=0, 1, 2, \ldots$ محاسبه کنید. (اینها مثالهای نوعی از انتگرالهایی هستند که در بحثهای آینده به‌آنها نیاز خواهیم داشت.)

۱۷. $\int_{\pi}^{\pi/2} \cos nx\, dx$ **۱۸.** $\int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx$

۱۹. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos nx\, dx$ **۲۰.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx\, dx$

۲۱. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\, dx$ **۲۲.** $\int_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx$

۲۳. $\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\, dx$ **۲۴.** $\int_{0}^{\pi} e^x\cos nx\, dx$

۲۵. $\int_{-\pi}^{0} e^x\sin nx\, dx$

۲.۱۰ سریهای فوریه . فرمولهای اویلر

فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی دوره‌ای با دورهٔ 2π باشد که بتوان آن را به صورت سری مثلثاتی

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

نمایش داد. می‌خواهیم ضرایب a_n و b_n برای چنین تابع $f(x)$ی را، در سری (۱) مربوط به آن معین کنیم.

نخست a_0 را معین می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از طرفین (۱)، از $-\pi$ تا π، داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]dx.$$

هر گاه انتگرال گیری جمله به جمله مجاز باشد،[1] خواهیم داشت

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx \right)$$

جملهٔ اول طرف راست برابر $2\pi a_0$ است و با انتگرال گیری مشاهده می‌کنیم که دیگر انتگرالهای طرف راست صفرند. از این‌رو نتیجهٔ اول عبارت است از

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \qquad (2)$$

حال a_1 ، a_2 ، . . . را به روشی مشابه معین می کنیم. با ضرب (۱) در $\cos mx$ ، m عدد صحیح مثبت مشخص ، و سپس با انتگرال گیری از آن از $-\pi$ تا π داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx\,dx \qquad (3)$$

با انتگرال گیری جمله به جمله طرف راست چنین می‌شود :

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx \right],$$

انتگرال اول صفراست. با به کاربردن (۱۱) ضمیمهٔ ۳ به دست می‌آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n+m)\,x\,dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n-m)\,x\,dx\ .$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (n+m)\,x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (n-m)\,x dx$$

با انتگرال گیری می‌توان نشان داد که چهار جملهٔ واقع در طرف راست صفرند ، به استثنای جملهٔ آخر سطر اول که به ازای $n=m$ برابر π است. چون در (۳) این جمله

---

۱. به عنوان مثال ، این کار در مورد همگرایی یکنواخت مجاز است (ر.ك. قضیهٔ ۳ از بخش ۶.۱۶).

در a_m ضرب شده است، طرف راست (۳) برابر $a_m\pi$ است، دومین نتیجه‌ای که می‌گیریم عبارت است از

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad m=1,\ 2,\ \cdots. \tag{۴}$$

در پایان ضرایب b_1، b_2، . . . رابطهٔ (۱) را معین می‌کنیم. هر گاه (۱) را در $\sin mx$ ضرب کنیم، m عدد صحیح مثبت مشخص، و سپس از $-\pi$ تا π از آن انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\sin mx\,dx \tag{۵}$$

با انتگرال‌گیری جمله به جمله، طرف راست چنین می‌شود:

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx\right].$$

انتگرال اول صفراست. انتگرال بعدی از نوعی است که پیش ازاین بررسی شده است. وچنانچه می‌دانیم به‌ازای همهٔ مقادیر $n=1,\ 2,\ \ldots$ صفراست. برای انتگرال‌آخرداریم

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx.$$

جملهٔ آخرصفراست. جملهٔ اول طرف راست به ازای $n\neq m$ صفر، وبه ازای $n=m$، π است. چون در (۵) این جمله در b_m ضرب شده است، بنابراین طرف راست (۵) برابر $b_m\pi$ می‌باشد و نتیجهٔ سوم عبارت است از

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx, \qquad m=1,\ 2,\ \cdots$$

بانوشتن n به‌جای m، فرمولهای زیر، که **فرمولهای اویلر** نام دارند، به دست می‌آیند:

$$\text{(الف)}\quad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\text{(ب)}\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{۶}$$

$$\text{(ج)}\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

توجه کنید که به‌دلیل دوره‌ای بودن انتگرال، فاصلهٔ انتگرال گیری (۶) را می‌توان با هرفاصلهٔ دیگری به‌طول ۲π ، مثلا فاصلهٔ $\circ \leqslant x \leqslant ۲\pi$ ، تعویض کرد.

برای تابع دوره‌ای $f(x)$ با دورهٔ ۲π باتوجه به (۶)، می‌توان a_n و b_n را محاسبه کرد وسری مثلثاتی

$$(۷) \quad a_\circ + a_۱ \cos x + b_۱ \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

را تشکیل داد. این سری موسوم به **سری فوریهٔ** متناظر با $f(x)$ است، و ضرایب آن که از (۶) به‌دست می‌آیند **ضرایب‌فوریهٔ** $f(x)$ نامیده می‌شوند.

ازتعریف‌انتگرال معین نتیجه می‌شودکه اگر$f(x)$ پیوسته‌باشد یاحتی‌اگرفقط‌پیوستهٔ تکه‌ای باشد (یعنی اگــر گذشته ازتعدادی متناهی پرش متناهی، درفــاصلهٔ انتگرال گیری پیوسته باشد)، انتگرالهای (۶) وجود دارند ومی‌توان به‌کمك (۶) ضرایب فوریهٔ $f(x)$ را محاسبه‌کرد. سؤالی کــه باقی می‌ماند این است‌که، آیا سری فوریهٔ حاصل همگراست و دارای مجموع $f(x)$ است یانه. این سؤال را درانتهای این بخش مورد بررسی‌قرار خواهیم داد.

باآوردن مثالی ساده به تشریح نحوهٔ استفادهٔ عملی از (۶) می‌پردازیم. دربخشهای بعدی مثالهای متعدد دیگری مطرح خواهد شد.

مثال ۱. موج مربعی

ضرایب فوریهٔ تابع دوره‌ای $f(x)$ راکه درشکل۲۰۵الف داده‌است محاسبه‌کنید. نمایش تحلیلی $f(x)$ چنین است:

$$f(x+۲\pi)=f(x) \quad \text{و} \quad f(x)=\begin{cases} -k & -\pi < x < \circ \\ k & \circ < x < \pi \end{cases}$$

چنین توابعی می‌توانند به‌عنوان نیروهای خارجی وارد بردستگاههای مکانیکی، نیروهای محرکهٔ الکتریکی درمدارهای الکتریکی وغیره مطرح شوند.

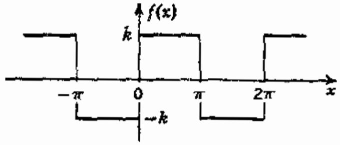
بنا به (۶ الف)، بــه‌دست می‌آوریم $a_\circ = \circ$. این را بدون انتگرال گیری نیز می‌توان به‌دست‌آوردچراکه مساحت زیرمنحنی $f(x)$ بین $-\pi$ و π برابرصفراست. بنابه (۶ ب)

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{۱}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\circ}(-k)\cos nx\, dx + \int_{\circ}^{\pi} k\cos nx\, dx\Big] = \frac{۱}{\pi}\Big[-k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\circ} + k\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\circ}^{\pi}\Big] = \circ,$$

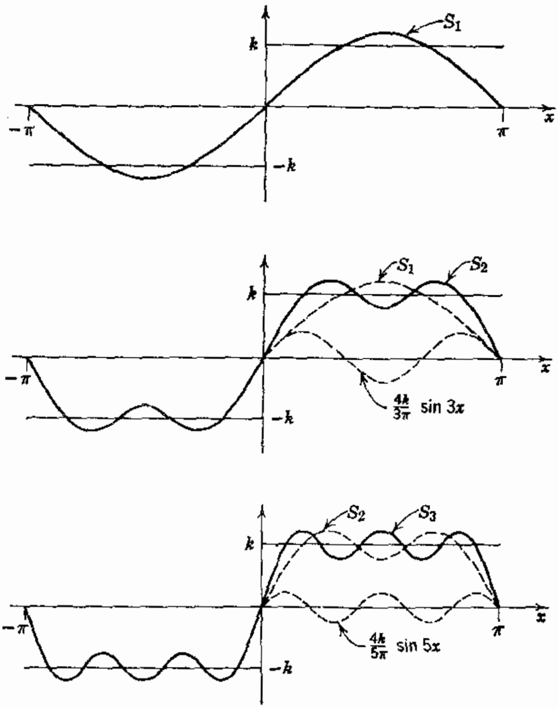
چراکه در$-\pi$، $\circ$ و π به‌ازای هر. . . ,۲ ,۱ $= n$، داریم $\sin nx = \circ$. همین‌طور از (۶ ج) به‌دست می‌آوریم

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx\,dx\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{\pi} k\sin nx\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right].$$

با استفاده از $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ و $\cos 0=1$ نتیجه می گیریم



(الف) تابع مفروض $f(x)$ (موج مربعی دوره‌ای)



(ب) سه‌مجموع جزئی اول سری فوریهٔ متناظر با $f(x)$

شکل ۲۰۵. مثال ۱

$$b_n=\frac{k}{n\pi}[\cos ۰-\cos(-n\pi)-\cos n\pi+\cos ۰]=\frac{۲k}{n\pi}(۱-\cos n\pi).$$

حال $\cos\pi=-۱$ ، $\cos ۲\pi=۱$ ، $\cos ۳\pi=-۱$ و . . . ، درحالت کلی

$$\cos n\pi=\begin{cases}-۱ & \text{به‌ازای } n \text{ فرد،}\\ ۱ & \text{به‌ازای } n \text{ زوج،}\end{cases}\quad \text{وبنابراین}\quad ۱-\cos n\pi=\begin{cases}۲ & \text{به‌ازای } n \text{ فرد،}\\ ۰ & \text{به‌ازای } n \text{ زوج،}\end{cases}$$

از این‌رو ضرایب فوریهٔ b_n تابع موردنظر عبارتند از

$$b_۱=\frac{۴k}{\pi},\quad b_۲=۰,\quad b_۳=\frac{۴k}{۳\pi},\quad b_۴=۰,\quad b_۵=\frac{۴k}{۵\pi},\ \cdots$$

وچون a_nها صفرند، سری فوریهٔ متناظر عبارت است از

$$\frac{۴k}{\pi}\left(\sin x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x+\frac{۱}{۵}\sin ۵x+\cdots\right).$$

مجموعهای جزئی عبارتند از

$$S_۱=\frac{۴k}{\pi}\sin x,\quad S_۲=\frac{۴k}{\pi}\left(\sin x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x\right),\ \cdots,$$

ازنمودارهای شکل ۲۰۵ چنین برمی‌آیدکه سری همگراست و مجموع آن تابع مفروض $f(x)$ است. متذکر می‌شویم که در $x=۰$ و $x=\pi$ ، نقاط ناپیوستگی $f(x)$ ، تمام مجموعهای جزئی برابرصفر، یعنی، برابرمیانگین حسابی مقادیر$-k$ و kی تابع $f(x)$ است.

به‌علاوه، بافرض آنکه $f(x)$ مجموع سری است، با قراردادن $x=\pi/۲$ داریم

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=k=\frac{۴k}{\pi}\left(۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-+\cdots\right)$$

یا

$$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+-\cdots=\frac{\pi}{۴}.$$

این فرمولی است مشهور از لایبنیتس (که حدود سال ۱۶۷۳ ازملاحظات هندسی به‌دست آمده است). این مثال نشان می‌دهد که مقدار سریهای مختلف باجملات ثابت را می‌توان با محاسبهٔ سری فوریه درنقاط معین محاسبه‌کرد. ▲

دسته توابعی که آنها را می‌توان به صورت سری فوریه نمایش داد به‌طرز شگفت.

انگیزی بزرگ و جامع است. شرایط کافی مربوطه ،که تقریباً همهٔ مسائل کاربردی قابل تصور درمهندسی واجد آنها هستند ، به شرح زیرند.

قضیهٔ ۱ (نمایش با سری فوریه)

هرگاه تابع دوره‌ای $f(x)$ با دورهٔ ۲π در فاصلهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ پیوستهٔ تکه‌ای[۱] بوده و در هر نقطه از فاصلهٔ مزبور مشتق چپ و راست داشته باشد ، آنگاه سری فوریهٔ متناظر با (۷) [با ضرایب (۶)] همگراست، ومجموع آن در هر نقطه، به‌جز نقطهٔ $x_\circ$ کـه در آن $f(x)$ ناپیوسته است برابر $f(x)$ است، و در نقطهٔ $x_\circ$ مجموع سری برابر میانگین حدهای چپ و راست[۲] $f(x)$ درنقطهٔ $x_\circ$ است.

---

۱. تعریف دربخش ۱.۵.

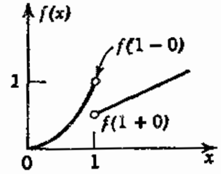
۲. **حد چپ** $f(x)$ در $x_\circ$ بـه صورت حد تـابع $f(x)$ وقتی که x از سمت چپ به $x_\circ$ میل می‌کند تعریف می‌شود ، این حد معمولا با $f(x_\circ-\circ)$ نمـایش داده می‌شود. بنابراین اگر h بـا مقادیر مثبت به‌سمت صفر میل کند $f(x_\circ-\circ)=\lim\limits_{h\to\circ} f(x_\circ-h)$. **حد راست** بـا $f(x_\circ+\circ)$ نشان داده می‌شود و وقتی که h با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می‌کند

$$f(x_\circ+\circ)=\lim_{h\to\circ} f(x_\circ+h)$$

مشتقات چپ و راست $f(x)$ درنقطهٔ $x_\circ$، وقتی‌که h با مقادیرمثبت به سمت صفر میل‌کند ، به‌ترتیب به‌صورت حدهای زیرتعریف می‌شوند ،

$$\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ+\circ)}{h} \quad \text{و} \quad \frac{f(x_\circ-h)-f(x_\circ-\circ)}{-h}$$

بدیهی است که اگر $f(x)$ در $x_\circ$ پیوسته باشدآنگاه جملهٔ آخر صورت هردوکسر همان $f(x_\circ)$ می‌شود.



شکل ۲۰۶. حدهای چپ و راست تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۱ \\ x/۲ & x>۱ \end{cases}$$

درنقطهٔ $x_\circ=1$ که برابرند با

$$f(۱-\circ)=۱$$

$$f(۱+\circ)=\frac{۱}{۲}$$

تبصره. هرگاه سری فوریهٔ متناظر با تابع $f(x)$ همگرا و مجموع آن همان طور که درقضیهٔ ۱ مطرح شد برابر $f(x)$ باشد این سری، سری فوریهٔ $f(x)$ نامیده می‌شود، ومی‌نویسیم

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots$$

ومی‌گوییم $f(x)$ با این سری فوریه نمایش داده شده است. چون باگذاشتن پرانتز در یك سری همگرا سری جدیدی با همان مجموع حاصل می‌شود (اثبات دربخش ۶.۱۵)، اجمالا می‌توان نوشت

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

اثبات همگرایی در قضیهٔ ۱ درمورد تابع پیوستهٔ $f(x)$ که دارای مشتقات جزئی اول ودوم پیوسته است. با انتگرال‌گیری جزء به جزء از (۶ب) به دست می‌آوریم

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=$$

$$\frac{f(x)\sin nx}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx.$$

جملهٔ اول طرف راست صفر است . انتگرال‌گیری مجدد به روش جزء بـه جزء نتیجه می‌دهد

$$a_n=\frac{f'(x)\cos nx}{n^2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\,dx.$$

به‌دلیل دوره‌ای بودن وپیوستگی $f'(x)$ ، جملهٔ اول طرف راست صفر است . چون f'' درفاصلهٔ انتگرال‌گیری پیوسته است، به‌ازای عدد ثابت مناسبی مانند M داریم

$$|f''(x)|<M.$$

به علاوه ، $|\cos nx|\leqslant 1$. یعنی

$$|a_n|=\frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\,dx\right|<\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}M\,dx=\frac{2M}{n^2}.$$

همین‌طور، به‌ازای هر n، $|b_n|<2M/n^2$. ازاین‌روقدرمطلق هرجملهٔ سری فوریهٔ متناظر با $f(x)$ حداکثر برابر جملهٔ متناظرسری همگرای زیراست :

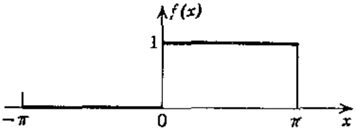
$$|a_0|+2M\left(1+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right).$$

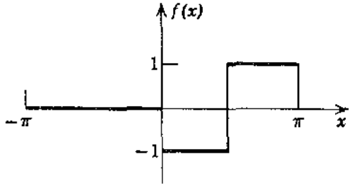
درنتیجه سری فوریهٔ موردنظرهمگراست واثبات به پایان می‌رسد. (خوانندگانی کـه قبلا

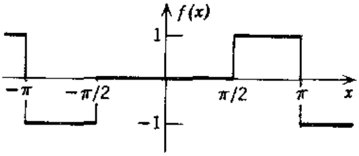
با همگرایی یکنواخت آشنا شده‌اند، مشاهدهٔ خواهند کرد که بنا بر آزمون وایرشتراس از بخش ۶.۱۶ با مفروضات فوق، سری فوریه به‌طوریکنواخت همگراست، و بنا به قضیهٔ ۳ ازهمان بخش برای رسیدن به‌فرمول (۶) مجازهستیم که جمله به جمله انتگرال بگیریم.)
اثبات همگرایی درحالتی که $f(x)$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد واثبات حکم آخرقضیهٔ ۱ را می‌توان درکتابهای درسی پیشرفته‌تر، مثلا درمرجع [D۴] یافت. ▲

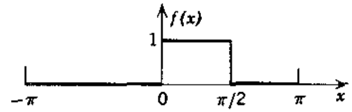
مسائل بخش ۲.۱۰

سری فوریهٔ تابع $f(x)$ را که دورهٔ آن 2π فرض می‌شود یافته، نمودارهای دقیق اولین سه مجموع جزئی[1] آن را رسم کنید، $f(x)$ دراین مسئله برابر یکی ازمقادیرزیراست:

۱.


۲.


۳.


۴.


۵. $(-\pi < x < \pi) \quad f(x)=x$

۶. $(-\pi < x < \pi) \quad f(x)=x^2$

۷. $(-\pi < x < \pi) \quad f(x)=x^3$

۸. $(-\pi < x < \pi) \quad f(x)=x^4$

۹.
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\pi+x & -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2}\pi-x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

---

۱. یعنی $a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ به‌ازای $N=1, 2, 3$.

۱۰. $$f(x)=\begin{cases} -x & -\pi<x<0 \\ x & 0<x<\pi \end{cases}$$

۱۱. $$f(x)=\begin{cases} 1 & -\pi/2<x<\pi/2 \\ -1 & \pi/2<x<3\pi/2 \end{cases}$$

۱۲. $$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ x & 0<x<\pi \end{cases}$$

۱۳. $$f(x)=\begin{cases} x & -\pi/2<x<\pi/2 \\ 0 & \pi/2<x<3\pi/2 \end{cases}$$

۱۴. $$f(x)=\begin{cases} x & -\pi/2<x<\pi/2 \\ \pi-x & \pi/2<x<3\pi/2 \end{cases}$$

۱۵. $$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ x^2 & 0<x<\pi \end{cases}$$

۱۶. $$f(x)=\begin{cases} x^2 & -\pi/2<x<\pi/2 \\ \pi^2/4 & \pi/2<x<3\pi/2 \end{cases}$$

۱۷. هرگاه $f(x)$ دارای ضرایب فوریهٔ a_n و b_n باشد، نشان دهید $k\,f(x)$، که در آن k عددی ثابت است، دارای ضرایب فوریهٔ ka_n و kb_n است.

۱۸. نشان دهید که اگر $f(x)$ دارای ضرایب فوریهٔ a_n و b_n و $g(x)$ دارای ضرایب فوریهٔ a_n^* و b_n^* باشد، آنگاه $f(x)+g(x)$ دارای ضرایب فوریهٔ $a_n+a_n^*$، $b_n+b_n^*$ است.

۱۹. با استفاده ازمسائل ۱۷ و ۱۸ و نتایج مسائل ۱ و ۲، سری فوریهٔ مربوط به مسئلهٔ ۴ را بیابید.

۲۰. درستی حکم آخر قضیهٔ ۱ را که راجع به ناپیوستگی است در مورد تابع مسئلهٔ ۱۱ تحقیق کنید.

۳.۱۰ توابع با دورهٔ دلخواه

تبدیل توابع بادورهٔ 2π به‌توابع بادورهٔ دلخواه T بسیارساده است، چراکه بایك تغییر متغیر می‌توان به‌این مقصود رسید.

در واقع، فرض می‌کنیم $f(t)$ دارای دورهٔ T باشد. آنگاه متغیر جدید x را می‌توان طوری درنظر گرفت که $f(t)$ به‌عنوان تابعی از x، دارای دورهٔ 2π باشد. اگر بنویسیم

(۱) $x=\frac{2\pi}{T}t$ (ب) یعنی $t=\frac{T}{2\pi}x$ (الف)

آنگاه $x=\pm\pi$ متناظر با $t=\pm T/2$ است. یعنی f، به‌عنوان تابعی از x، دارای دورهٔ 2π است. درنتیجه هرگاه f دارای نمایش سری فوریه باشد، این سری باید به‌صورت زیرباشد:

$$f(t)=f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (2)$$

که ضرایب آن ازفرمولهای اویلر (۶) بخش قبل به دست می‌آید.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\sin nx\,dx$$

این فرمولها را می‌توانستیم مستقیماً مورد استفاده قرار دهیم، ولی تغییر متغیر x به t محاسبه را ساده‌تر می‌کند. از آنجا که

$x=\frac{2\pi}{T}t$ ، داریم $dx=\frac{2\pi}{T}dt$ ،

و فاصلهٔ انتگرال‌گیری بر محور xها منطبق بر فاصلهٔ

$$-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}$$

است. در نتیجه، مشاهده می‌کنیم که ضرایب فوریهٔ تابع دوره‌ای $f(t)$ که دورهٔ آن T است با **فرمولهای اویلر**

(الف) $$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt$$

$$a_n=\frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\cos\frac{۲n\pi t}{T}\,dt \qquad (ب) \qquad (۳)$$

$n=۱,\ ۲,\ \ldots\ .$

$$b_n=\frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\sin\frac{۲n\pi t}{T}\,dt \qquad (ج)$$

داده می‌شود، سری فوریهٔ (۲) با بیان x برحسب t چنین می‌شود :

$$f(t)=a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{۲n\pi}{T}t+b_n\sin\frac{۲n\pi}{T}t\right). \qquad (۴)$$

فاصلهٔ انتگرال‌گیری در (۳) را می‌توان با هر فاصلهٔ دلخواه به طول T، مثلاً با فاصلهٔ $۰\leqslant t\leqslant T$ عوض کرد.

مثال ۱. موج مربعی دوره‌ای

مطلوب است محاسبهٔ سری فوریهٔ تابع (ر.ك. شكل ۲۰۷)

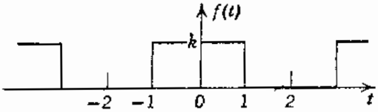
$$f(t)=\begin{cases} ۰ & -۲<t<-۱ \\ k & -۱<t<۱ \\ ۰ & ۱<t<۲ \end{cases} \qquad T=۴$$

از (۳ الف) و (۳ب) به دست می‌آوریم

$$a_۰=\frac{۱}{۴}\int_{-۲}^{۲} f(t)\,dt=\frac{۱}{۴}\int_{-۱}^{۱} k\,dt=\frac{k}{۲},$$

$$a_n=\frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۲} f(t)\cos\frac{n\pi}{۲}t\,dt=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} k\cos\frac{n\pi}{۲}t\,dt=\frac{۲k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}.$$

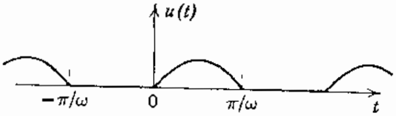
بنابراین وقتی که n زوج باشد، $a_n=۰$ ، وقتی که $n=۱, ۵, ۹, \ldots$ ، $a_n=۲k/n\pi$، وهنگامی که $n=۳, ۷, ۱۱, \ldots$ ، $a_n=-۲k/n\pi$. بنابر(ج۳)به‌ازای $n=۱, ۲, \ldots$ داریم $b_n=۰$.



شکل ۲۰۷. مثال ۱

بدین ترتیب نتیجه عبارت است از

$$f(t)=\frac{k}{۲}+\frac{۲k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi}{۲}t+\frac{۱}{۵}\cos\frac{۵\pi}{۲}t-+\ldots\right)$$



شکل ۲۰۸. یکسوکنندهٔ نیم موج

مثال ۲. یکسوکنندهٔ نیم‌موج

یك ولتاژ سینوسی $E\sin\omega t$ از یکسوکنندهٔ نیم موجی کـه قسمت منفی موج را حذف می‌کند می‌گذرد (شکل ۲۰۸). سری فوریهٔ تابع متناوب حاصل

$$u(t)=\begin{cases}۰ & -T/۲<t<۰\\ E\sin\omega t & ۰<t<T/۲\end{cases}\qquad T=\frac{۲\pi}{\omega}$$

را بیابید. با توجه به این که وقتی $-T/۲<t<۰$ ، $u=۰$ ، از (۳ الف) به دست می‌آوریم

$$a_۰=\frac{\omega}{۲\pi}\int_۰^{\pi/\omega}E\sin\omega t\,dt=\frac{E}{\pi}$$

و بنا بر (۳ ب) ، با استفاده از (۱۱) ضمیمهٔ ۳ ، به‌ازای $x=\omega t$ و $y=n\omega t$ ، داریم

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_۰^{\pi/\omega}E\sin\omega t\cos n\omega t\,dt=$$

$$\frac{\omega E}{۲\pi}\int_۰^{\pi/\omega}[\sin(۱+n)\omega t+\sin(۱-n)\omega t]\,dt$$

به ازای $n=۱$ انتگرال طرف راست صفراست ، و به ازای $n=۲,۳,\ldots$ به‌سادگی به‌دست می‌آوریم

$$a_n=\frac{\omega E}{۲\pi}\left[-\frac{\cos(۱+n)\omega t}{(۱+n)\omega}-\frac{\cos(۱-n)\omega t}{(۱-n)\omega}\right]_۰^{\pi/\omega}$$

$$=\frac{E}{۲\pi}\left(\frac{-\cos(۱+n)\pi+۱}{۱+n}+\frac{-\cos(۱-n)\pi+۱}{۱-n}\right)$$

وقتی n فرد باشد این عبارت صفرمی‌شود ، و به‌ازای n زوج داریم

$$a_n=\frac{E}{۲\pi}\left(\frac{۲}{۱+n}+\frac{۲}{۱-n}\right)=-\frac{۲E}{(n-۱)(n+۱)\pi} \qquad (n=۲, ۴, \cdots).$$

به همین ترتیب از (۳ ج) می‌یابیم که $b_۱=E/۲$ و به ازای $n=۲, ۳, \cdots$ ، $b_n=۰$ ، در نتیجه

$$u(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{۲}\sin\omega t-\frac{۲E}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\times۳}\cos ۲\omega t+\frac{۱}{۳\times۵}\cos ۴\omega t+\cdots\right).$$

مسائل بخش ۳۰۱۰

۱. نشان دهید که دورهٔ هرجمله از (۴) ، T است.

۲. نشان دهید که فاصلهٔ انتگرال گیری در (۳) را می‌توان با هر فاصله به طول T عوض کرد.

۳. مطلوب است سری فوریهٔ تـابع دوره‌ایی که از عبور ولتاژ $v(t)=۲\cos ۱۰۰\,\pi t$ از یك یکسو کنندهٔ نیم موج حاصل می‌شود.

سری فوریهٔ تابع دوره‌ای $f(t)$ با دورهٔ T را یافته، نمودار $f(t)$ و اولین سه مجموع جزئی را رسم کنید.

۴. $f(t)=۰ \quad (-۲<t<۰), \quad f(t)=۱ \quad (۰<t<۲), \qquad T=۴$

۵. $f(t)=۱ \quad (-۱<t<۱), \quad f(t)=۰ \quad (۱<t<۳), \qquad T=۴$

۶. $f(t)=۱ \quad (-۱<t<۰), \quad f(t)=-۱ \quad (۰<t<۱), \quad T=۲$

۷. $f(t)=t \quad (-۱<t<۱), \quad T=۲$

۸. $f(t)=|t|, \quad (-۲<t<۲), \quad T=۴$

۹. $f(t)=t \quad (۰<t<۱), \quad f(t)=۱-t \quad (۱<t<۲), \qquad T=۲$

۱۰. $f(t)=۱/۲ \quad (-۱<t<۰), \quad f(t)=-t \quad (۰<t<۱), \quad T=۲$

۱۱. $f(t)=t \quad (-\pi/۸<t<\pi/۸),$
$f(t)=(\pi/۴)-t \quad (\pi/۸<t<۳\pi/۸), \quad T=\pi/۲$

۱۲. $f(t)=(۱/۲)+t \quad (-۱/۲<t<۰),$
$f(t)=(۱/۲)-t \quad (۰<t<۱/۲), \quad T=۱$

۱۳. $f(t)=t^۲ \quad (-۱<t<۱), \quad T=۲$

۱۴. $f(t)=\sin \pi t \quad (0<t<1), \quad T=1$

۱۵. $f(t)=1 \quad (-2<t<0), \quad f(t)=e^{-t} \quad (0<t<2), \quad T=4$

۱۶. سری فوریهٔ مسئلهٔ ۴ را با توجه به سری فوریهٔ مثال ۲ مستقیماً به دست آورید.

۱۷. سری فوریهٔ مسئلهٔ ۶ را با توجه به سری فوریهٔ مثال ۱ ، بخش ۲.۱۰ ، مستقیماً به دست آورید.

۱۸. سری فوریهٔ مسئلهٔ ۷ را با توجه به سری فوریهٔ مسئلهٔ ۵، بخش ۲.۱۰، مستقیماً به‌دست آورید.

۱۹. سری فوریهٔ مسئلهٔ ۸ را با توجه به سری فوریهٔ مسئلهٔ ۱۰ بخش ۲.۱۰، مستقیماً به دست آورید.

۲۰. سری فوریهٔ مسئلهٔ ۱۳ را با توجه به سری فوریهٔ مسئلهٔ ۶ ، بخش ۲.۱۰ ، مستقیماً به‌دست‌آورید.

۴.۱۰ توابع زوج و فرد

در تعیین ضرایب فوریهٔ یك تابع ، هرگاه تابع فرد یا زوج باشد ، می‌توان از محاسبات غیرضروری (و خطاهای مربوط به آنها) اجتناب کرد.

نخست یادآوری می‌کنیم که تابع $y=g(x)$، **زوج** نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x

$$g(-x)=g(x).$$

نمودار چنین تابعی نسبت به محور yها متقارن است (شکل ۲۰۹). تابع $h(x)$ را **فرد** می‌نامند ، هرگاه به‌ازای هر x

$$h(-x)=-h(x).$$

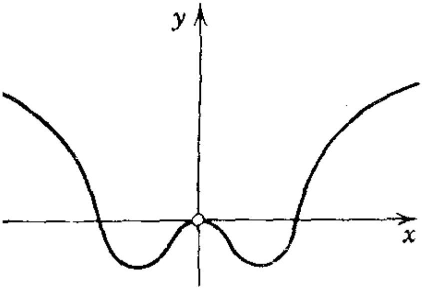
(شکل ۲۱۰ را ببینید.) تابع $\cos nx$ زوج و تابع $\sin nx$ فرد است.

اگر $g(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه

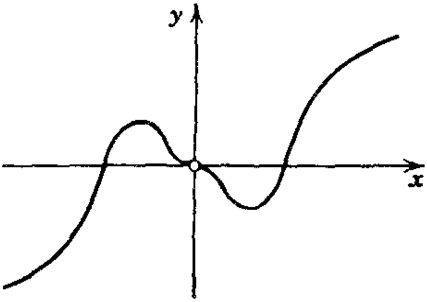
$$\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{T/2} g(x)\,dx \qquad (\text{زوج } g). \tag{1}$$

اگر $h(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-T/2}^{T/2} h(x)\,dx = 0 \qquad (\text{فرد } h). \tag{2}$$



شکل ۲۰۹. تابع زوج



شکل ۲۱۰. تابع فرد

با توجه به نمودارهای g و h فرمولهای (۱) و (۲) واضح هستند ؛ و اثبات صوری آنها به دانشجو واگذار می‌شود.

حاصلضرب $q = gh$ تابع زوج g در تابع فرد h تابعی است فرد ، چراکه

$$q(-x) = g(-x)\,h(-x) = g(x)\,[-h(x)] = -q(x)$$

درنتیجه هرگاه $f(t)$ زوج باشد ، آنگاه انتگران $f \sin(2n\pi t/T)$ در(۳ ج) ازبخش قبل فرد است ، و $b_n = 0$. همین طورهرگاه $f(t)$ فرد باشد ، آنگاه $f\cos(2n\pi t/T)$ در (۳ ب) ، بخش ۳.۱۰ ، فرد است ، و $a_n = 0$. از آنچه گفته شد و از (۱) به دست می‌آوریم

قضیهٔ ۱. سری فوریهٔ توابع زوج و فرد

سری فوریهٔ تابع زوج $f(t)$ با دورهٔ T «**سری فوریهٔ کسینوسی**» است

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t \qquad (f \text{ زوج}) \qquad (3)$$

با ضرایب

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt, \qquad (4)$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\,dt, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

سری فوریهٔ تابع فرد $f(t)$ با دورهٔ T «**سری فوریهٔ سینوسی**» است

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \qquad (f \text{ زوج}) \qquad (5)$$

باضرایب

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T} t\,dt. \qquad (6)$$

بخصوص، سری فوریهٔ تـابع زوج $f(x)$ با دورهٔ 2π یك سری فوریهٔ کسینوسی است

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots \qquad (3^*)$$

با ضرایب

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \qquad (4^*)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

همین طور، سری فوریهٔ تابع فرد $f(x)$ با دورهٔ 2π یك سری فوریهٔ سینوسی است:

$$f(x)=b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots \qquad (5^*)$$

با ضرایب

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,\ 2,\ \cdots. \qquad (6^*)$$

مثلا، $f(x)$ در مثال ۱، بخش ۲.۱۰، فرد است و درنتیجه بـا یك سری سینوسی فوریه نمایش داده می‌شود.

با قضیهٔ زیر موضوع را ساده‌تر می‌کنیم:

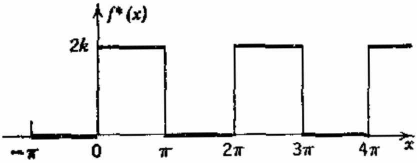
قضیهٔ ۲ (مجموع توابع)

ضرایب فوریهٔ مجموع f_1+f_2 برابرند با مجموع ضرایب فوریهٔ متناظر f_1 و f_2.

مثال ۱. تپهٔ مستطیلی

تابع $f^*(x)$ درشکل ۲۱۱ مجموع تابع $f(x)$ مثال ۱ بخش ۲.۱۰ و ثابت k است. از این‌رو، با توجه به مثال نامبرده و قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که

$$f^*(x)=k+\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right).$$



شکل ۲۱۱. مثال ۱

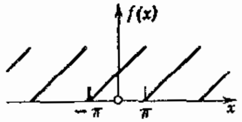
مثال ۲. موج دندانه‌اره‌ای

مطلوب است سری فوریهٔ تابع (شکل ۲۱۲)

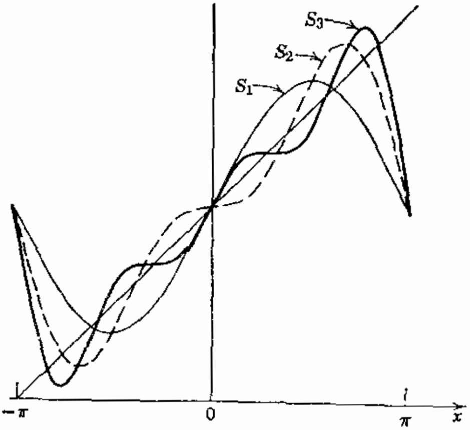
$$f(x)=x+\pi \quad \text{به‌ازای} \quad -\pi<x<\pi \quad \text{و} \quad f(x+2\pi)=f(x).$$

می‌توان نوشت

$$f=f_1+f_2 \quad \text{به‌طوری که} \quad f_1=x \quad \text{و} \quad f_2=\pi$$



(الف) تابع $f(x)$



(ب) مجموعهای جزئی $S_n(x)$

شکل ۲۱۲. مثال ۲

ضرایب فوریهٔ $f_۲$ صفرند، به‌غیراز ضریب جملهٔ اول (جملهٔ ثابت) که π است. ازاین‌رو، بنابر قضیهٔ ۲، ضرایب فوریهٔ a_n ، b_n ، به جز $a_۰$ که برابر π است، همان ضرایب فوریهٔ $f_۱$ است. نظربه‌اینکه $f_۱$ فرد است، به‌ازای $n=۱, ۲, \ldots$ داریم $a_n=۰$ ، و

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi f_۱(x)\sin nx dx=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi x\sin nx\, dx.$$

با انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\bigg|_۰^\pi+\frac{۱}{n}\int_۰^\pi \cos nx\, dx\right]=-\frac{۲}{n}\cos n\pi.$$

پس $b_۱=۲$ ، $b_۲=-۲/۲$ ، $b_۳=۲/۳$ ، $b_۴=-۲/۴$ ، . . . ، ونمایش‌سری فوریهٔ $f(x)$ عبارت است از

$$f(x)=\pi+۲\left(\sin x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x-+\cdots\right).$$

مسائل بخش ۴.۱۰

۱. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید.

کدامیك ازتوابع زیرزوج، فرد، یا نه زوج و نه فرد هستند ؟

۲. $x+x^۲$ ، $|x|$ ، e^x ، $e^{x^۲}$ ، $\sin^۲x$ ، $x\sin x$ ، $\ln x$ ، $x\cos x$

۳. $|x^۳|$ ، $x\cos nx$ ، $x^۲\cos nx$ ، $\cosh x$ ، $\sinh x$ ، $\sin x+\cos x$ ، $x|x|$

کدامیك ازتوابع $f(x)$ زیر که دوره‌ای، با دورهٔ ۲π ، فرض می‌شوند، زوج ، فرد، یا نه زوج ونه فرد هستند؟

۴.
$$f(x)=\begin{cases} ۰ & -\pi<x<۰ \\ x & ۰<x<\pi \end{cases}$$

۵.
$$f(x)=\begin{cases} -x^۲ & -\pi<x<۰ \\ x^۲ & ۰<x<\pi \end{cases}$$

۶. $$f(x)=\begin{cases} x & -\pi/۲<x<\pi/۲ \\ ۰ & \pi/۲<x<۳\pi/۲ \end{cases}$$

۷. $$f(x)=\begin{cases} ۰ & -\pi<x<-\pi/۲ \\ x & -\pi/۲<x<\pi \end{cases}$$

۸. $f(x)=|\sin x| \quad (-\pi<x<\pi)$

۹. $f(x)=e^{|x|} \quad (-\pi<x<\pi)$

۱۰. $f(x)=e^{-|x|} \quad (-\pi<x<\pi)$

۱۱. $f(x)=x|x| \quad (-\pi<x<\pi)$

۱۲. $f(x)=x \quad (۰<x<۲\pi)$

۱۳. $f(x)=x^۲ \quad (۰<x<۲\pi)$

۱۴. همهٔ توابعی راکه هم زوج و هم فرد هستند بیابید.

ثابت کنید :

۱۵. هرگاه $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $|f(x)|$ و $f^۲(x)$ زوج هستند.

۱۶. هرگاه $f(x)$ زوج باشد، آنگاه $|f(x)|$ ، $f^۲(x)$، و $f^۳(x)$ زوج هستند.

۱۷. مجموع توابع فرد، فرد است.

۱۸. حاصل‌ضرب دو تابع فرد، زوج است.

۱۹. مجموع و حاصل‌ضرب توابع زوج، زوج هستند.

۲۰. هرگاه $g(x)$ تابعی دلخواه باشد که به‌ازای هر x تعریف شده باشد، آنگاه $p(x)=[g(x)+g(-x)]/۲$ زوج و $q(x)=[g(x)-g(-x)]/۲$ فرد است، و $g(x)=p(x)+q(x)$.

هریك از توابع زیر را به صورت مجموع یك تابع زوج و یك تابع فرد بنویسید.

۲۱. e^x **۲۲.** $۱/(۱-x)$ **۲۳.** $x/(۱-x)$ **۲۴.** $(۱+x)/(۱-x)$

سری فوریهٔ توابع زیر را که هریك از آنها دارای دورهٔ ۲π فرض می‌شوند بیابید.

۲۵. $f(x)=x \quad (-\pi<x<\pi)$ **۲۶.** $f(x)=|x| \quad (-\pi<x<\pi)$

.۲۷ $f(x)=x^3 \quad (-\pi<x<\pi)$

.۲۸ $f(x)=|\sin x| \quad (-\pi<x<\pi)$

.۲۹
$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi/2<x<\pi/2 \\ \pi-x & \pi/2<x<3\pi/2 \end{cases}$$

.۳۰
$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\pi \\ \pi-x & \pi<x<2\pi \end{cases}$$

.۳۱
$$f(x)=\begin{cases} x-\pi & 0<x<\pi \\ -x & \pi<x<2\pi \end{cases}$$

.۳۲
$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & -\pi<x<0 \\ x^2 & 0<x<\pi \end{cases}$$

.۳۳ نشان دهید که تابع $f(x)=x^2 \ (-\pi<x\leqslant\pi)$ ، $f(x+2\pi)=f(x)$ دارای سری فوریهٔ زیر است :

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-+\cdots\right).$$

.۳۴ با قرار دادن $x=\pi$ درمسئلهٔ ۳۳ ، فرمول مشهور زیر را که به فرمول اویلر معروف است بهدست آورید :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}. \tag{۷}$$

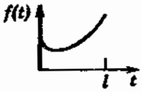
.۳۵ با استفاده از مسئلهٔ ۳۳ ، نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\cdots=\frac{\pi^2}{12}. \tag{۸}$$

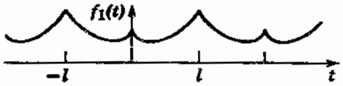
۵.۱۰ بسط نیم دامنه‌ای

در مسائل فیزیکی و مهندسی گوناگون نیاز عملی ایجاب می‌کند سری فوریه را در مورد توابع $f(t)$ی که فقط بر فاصله‌ای متناهی تعریف شده‌اند بکار بریم. مثالهای نوعی در فصل بعدی (بخشهای ۳.۱۱ و ۵.۱۱) که در رابطه با معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی

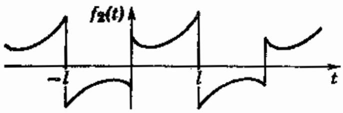
مطرح خواهند شد. دراین مثالها $f(t)$ روی فاصله‌ای مانند $0 \leqslant t \leqslant l$ تعریف می‌شود، و روی این فاصله است که می‌خواهیم $f(t)$ را با یك سری فوریه نمایش دهیم. بدین منظورمی‌توان قضیهٔ ۱ را مورد استفاده قرار داد. می‌توان با فرض $T/2=l$ یا $T=2l$ فاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant l$ را با فاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant T/2$ متناظر قرار داد. با استفاده از (۴) بخش ۴.۱۰ یك سری کسینوسی فوریه به دست می‌آید که نمایش تابع زوج دوره‌ای $f_1(t)$ با دورهٔ $T=2l$ است. فرض می‌کنیم روی فاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant l$، $f_1(t)=f(t)$. بدین جهت $f_1(t)$ را گسترش زوج دوره‌ای $f(t)$ با دورهٔ $T=2l$ می‌نامند. نمونه‌ای از



(الف) تابع مفروض $f(t)$



(ب) $f(t)$ی گسترش‌یافته به‌صورت تابع دوره‌ای زوج با دورهٔ $2l$



(ج) $f(t)$ی گسترش‌یافته به‌صورت تابع دوره‌ای فرد با دورهٔ $2l$

شکل ۲۱۳. گسترش دوره‌ای

تابع گسترش زوج یافته در شکل ۲۱۳ ب داده شده است. بنابر (۳) و (۴) ازبخش ۴.۱۰ وبه‌ازای $T=2l$ داریم

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}t \qquad (0 \leqslant t \leqslant l) \tag{1}$$

با ضرایب

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(t)\,dt\,, \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt\,, \quad n=1,\ 2,\ \cdots . \tag{2}$$

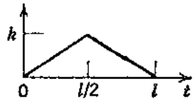
به جای (۴) بخش ۴.۱۰ می‌توان (۶) بخش ۴.۱۰ را به کار برد (مانند قبل، با $T=2l$). در این صورت سری سینوسی فوریه به دست می‌آید، که نمایانگر یك تابع فرد دوره‌ای مثل $f_2(t)$ بادورهٔ $T=2l$ است. فرض می‌کنیم روی فاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant l$، $f_2(t)=f(t)$، $f_2(t)$ را گسترش فرد دوره‌ای $f(t)$ با دورهٔ $T=2l$ می‌نامند. نمونه‌ای از تابع گسترش فرد یافته در شکل ۲۱۳ ج داده شده است. بنابر (۵) و (۶) از بخش ۴.۱۰ داریم

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}t \qquad (0 \leqslant t \leqslant l) \tag{۳}$$

با ضرایب

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt, \qquad n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{۴}$$

سریهای (۱) و (۳) با ضرایب (۲) و (۴) را **بسط نیم دامنه‌ای** تابع مفروض $f(t)$ می‌نامند.



شکل ۲۱۴. تابع مربوط به مثال ۱

مثال ۱. تپهٔ مثلثی

مطلوب است بسط نیم دامنهٔ تابع (شکل ۲۱۴)

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2k}{l}t & 0<t<\dfrac{l}{2}\\[2ex] \dfrac{2k}{l}(l-t) & \dfrac{l}{2}<t<l\end{cases}$$

از (۲) به دست می‌آوریم

$$a_0=\frac{1}{l}\left[\frac{2k}{l}\int_0^{l/2}t\,dt+\frac{2k}{l}\int_{l/2}^{l}(l-t)\,dt\right]=\frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\left[\frac{2k}{l}\int_0^{l/2} t\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt + \frac{2k}{l}\int_{l/2}^{l}(l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt\right].$$

با انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء نتیجه می‌گیریم

$$\int_0^{l/2} t\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt = \frac{lt}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}t\Big|_0^{l/2} - \frac{l}{n\pi}\int_0^{l/2}\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt$$

$$= \frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right).$$

به همین نحو

$$\int_{l/2}^{l}(l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt = -\frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

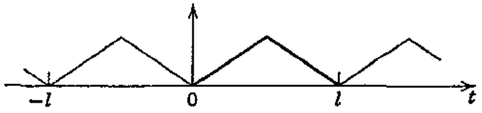
با درج این دو نتیجه در رابطهٔ مربوط به a_n به دست می‌آوریم

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right).$$

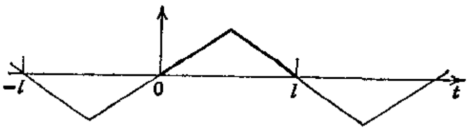
بنابراین،

$$a_2 = -16k/2^2\pi^2,\quad a_6 = -16k/6^2\pi^2,\quad a_{10} = -16k/10^2\pi^2,\ \ldots$$

و به‌ازای $n \neq 2, 6, 10, 14, \ldots$، $a_n = 0$. از این‌رو اولین بسط نیم دامنه‌ای $f(t)$ عبارت است از



(الف) گسترش زوج



(ب) گسترش فرد

شکل ۲۱۵. گسترشهای دوره‌ای $f(t)$ مثال 1

$$f(t)=\frac{k}{۲}-\frac{۱۶k}{\pi^۲}\left(\frac{۱}{۲^۲}\cos\frac{۲\pi}{l}t+\frac{۱}{۶^۲}\cos\frac{۶\pi}{l}t+\cdots\right).$$

این سری گسترش زوج دوره‌ای $f(t)$ نشان داده شده در شکل ۲۱۵ الف ، را نشان می‌دهد.

همین طور ، بنابه (۴) ،

$$b_n=\frac{۸k}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{۲} \tag{۵}$$

و بسط دیگر نیم دامنه‌ای $f(t)$ عبارت است از

$$f(t)=\frac{۸k}{\pi^۲}\left(\frac{۱}{۱^۲}\sin\frac{\pi}{l}t-\frac{۱}{۳^۲}\sin\frac{۳\pi}{l}t+\frac{۱}{۵^۲}\sin\frac{۵\pi}{l}t-+\cdots\right)$$

این سری گسترش فرد دوره‌ای $f(t)$ ، نشان داده شده درشکل ۲۱۵ ب ، را نشان می‌دهد.

مسائل بخش ۵.۱۰

توابع $f(t)$ زیررا با سری کسینوسی فوریه نمایش دهید و نمودار گسترش دوره‌ای متناظر با $f(t)$ را رسم کنید.

۱. $f(t)=۱ \quad (۰<t<l)$

۲. $f(t)=t \quad (۰<t<l)$

۳. $f(t)=\begin{cases} ۱ & ۰<t<l/۲ \\ ۰ & l/۲<t<l \end{cases}$

۴. $f(t)=\begin{cases} ۰ & ۰<t<l/۲ \\ ۱ & l/۲<t<l \end{cases}$

۵. $f(t)=۱-\frac{t}{l} \quad (۰<t<l)$

۶. $f(t)=t^۲ \quad (۰<t<l)$

۷. $f(t)=t^۳ \quad (۰<t<l)$

۸. $f(t)=e^t \quad (۰<t<l)$

۹. $f(t)=\sin\frac{\pi}{l}t \quad (۰<t<l)$

۱۰. $f(t)=\sin\frac{\pi t}{۲l} \quad (۰<t<l)$

توابع $f(t)$ زیر را بـه صورت سری فوریه سینوسی نمـایش دهید و نمودار گسترش دوره‌ای متناظر با $f(t)$ را رسم کنید.

۱۱. $f(t)=1 \quad (0<t<l)$

۱۲. $f(t)=t \quad (0<t<l)$

۱۳. $f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<l/2 \\ 0 & l/2<t<l \end{cases}$

۱۴. $f(t)=\begin{cases} 1/2 & 0<t<l/2 \\ 3/2 & l/2<t<l \end{cases}$

۱۵. $f(t)=t^2 \quad (0<t<l)$

۱۶. $f(t)=t^3 \quad (0<t<l)$

۱۷. صورت (**مختلط سری فوریه ، ضرایب فوریه مختلط**) با استفاده از فرمول $\cos\theta+i\sin\theta$ (ر.ك. بخش ۴.۲) ، نشان دهید که

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}), \quad \sin nx=\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})$$

و سری فوریهٔ

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

را می‌توان به صورت

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx}+k_n e^{-inx}) \qquad (6)$$

نوشت که در آن $c_0=a_0$ ، $c_n=(a_n-ib_n)/2$ ، $k_n=(a_n+ib_n)/2$ ، $n=1, 2, \dots$. با استفاده از (۶) بخش ۲.۱۰ نشان دهید که

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx, \quad k_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}dx, \quad n=1,2,\dots$$

با معرفی $k_n=c_{-n}$ ، نشان دهید که (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad (7)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx, \quad n=0, \pm1, \pm2, \dots .$$

این سری را صورت مختلط سری فوریه، و c_nها را ضرایب مختلط فوریهٔ $f(x)$ می‌نامند.

۱۸. با استفاده از (۷) ، نشان دهید که صورت مختلط سری فوریهٔ تابع

$f(x)=e^x$ به‌ازای $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$

عبارت است از

$$f(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx}$$

۱۹. از مسئلهٔ ۱۸ ، سری فوریهٔ حقیقی

$$f(x)=k\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1+1^2}(\cos x-\sin x)\right.$$

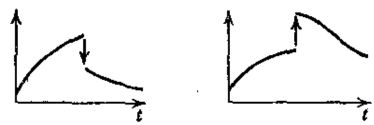
$$\left.+\frac{1}{1+2^2}(\cos 2x-2\sin 2x)-+\cdots\right]$$

راکه در آن $k=(2\sinh\pi)/\pi$ ، نتیجه بگیرید.

۲۰. نشان دهید که ضرایب مختلط فوریهٔ یك تابع فرد، موهومی محض و ضرایب فوریهٔ یك تابع زوج ، حقیقی هستند.

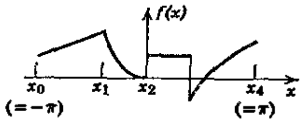
۶.۱۰ تعیین ضرایب فوریه بدون انتگرال‌گیری

در بعضی از مثالهای پیشین ، انتگرال‌گیریهای نسبتاً پیچیده و طولانی بـه عبارات نسبتاً ساده‌ای از ضرایب فوریهٔ a_n و b_n منجرشدند. بـا توجه به این مطلب این سؤال مطرح می‌شود که آیـا راهی سـاده‌تر برای محاسبهٔ ضرایب فوریه موجود است. بله ، و مـا می‌خواهیم نشان‌دهیم ضرایب‌فوریه یك‌تابع دوره‌ای که به‌صورت چندجمله‌ای نمایش‌داده شده است را می‌توان برحسب پرشهای تابع و مشتقات آن به دست آورد. البته ، این کار مزیت زیادی دارد ، و فرمولهای مربوط به آن دارای اهمیت عملی بسیاری هستند ، چرا که با استفاده از آنها ازانتگرال‌گیری اجتناب می‌شود (جز درمورد a_0 که باید مانند قبل معین شود).



(الف) پرش مثبت (ب) پرش منفی

شکل ۲۱۶. پرش تابع



شکل ۲۱۷. یك مثال از یك نمایش از صورت (۲) (به‌ازای $m=4$)

منظور از پرش j ی تابع $g(x)$ در نقطهٔ x_0 اختلاف بین حدهای راست و چپ (بخش ۲.۱۰) $g(x)$ در x_0 است ؛ یعنی

$$j=g(x_\circ+\circ)-g(x_\circ-\circ). \tag{۱}$$

نتیجه می‌شود که پرش به طرف بالا مثبت و پرش به طرف پایین منفی است.

فرض می کنیم $f(x)$ تابعی بادورهٔ ۲π باشد که درفاصلهٔ $-\pi < x < \pi$ برحسب چند جمله‌ایهای $p_۱$ ، . . . ، p_m نمایش داده شده است ، مثلا (شکل ۲۱۷)

$$\begin{cases} p_۱(x) & x_\circ < x < x_۱, \quad (x_\circ=-\pi) \\ p_۲(x) & x_۱ < x < x_۲, \\ \vdots & \\ p_m(x) & x_{m-۱} < x < x_m \ (=\pi). \end{cases} \tag{۲}$$

دراین‌صورت ممکن است f در $x_\circ$ ، $x_۱$ ، . . . ، x_m پرشهایی داشته باشد، وهمین مطلب ممکن است برای مشتقــات f' ، f'' ، . . . ، هم صادق باشد. نمادهــای زیر را معرفی می کنیم

$$\begin{aligned} j_s &= x_s \text{ پرش } f \text{ در } \\ j_s' &= x_s \text{ پرش } f' \text{ در } \\ j_s'' &= x_s \text{ پرش } f'' \text{ در } \end{aligned} \qquad (s=۱,\ ۲,\ \cdots,\ m) \tag{۳}$$

البته ، هرگاه f در $x_\circ$ پیوسته باشد ، آنگاه $j_s=\circ$ ، و همچنین است در مورد مشتقات ، به طوری‌که ممکن است برخی از مقادیر j_s ، j_s' ، . . . در (۳) صفر باشند.

مثال ۱. پرشهای یك تابع و مشتقات آن

با فرض

$$f(x)=\begin{cases} \circ & -\pi < x < \circ \\ x^۲ & \circ < x < \pi, \end{cases}$$

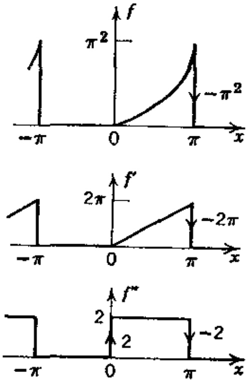
نمودارهای f و مشتقاتش را رسم می‌کنیم (شکل ۲۱۸) ،

$$f'\begin{cases} \circ \\ ۲x \end{cases} \qquad f''=\begin{cases} \circ \\ ۲ \end{cases} \qquad f'''=\circ.$$

مشاهده می‌کنیم که پرشها عبارتند از

	پرش در $x_1 = 0$	پرش در $x_2 \pi$
f	$j_1 = 0$	$j_2 = -\pi^2$
f'	$j_1' = 0$	$j_2' = -2\pi$
f''	$j_1'' = 2$	$j_2'' = -2$

توجه کنید که پرشها در $x = -\pi$ در جدول ثبت نشده‌اند، زیرا مقدار آنها برابر مقدارشان در $x = \pi$، انتهای دیگر فاصلهٔ دوره‌ای، می‌باشد.



شکل ۲۱۸. $f(x)$ و مشتقاتش در مثال ۱

برای رسیدن به فرمول مطلوب جهت محاسبهٔ ضرایب فوریهٔ a_1، a_2، . . . تابع f که با فرمول (۲) داده شده است، از فرمول اویلر (۶ ب) بخش ۲.۱۰ آغاز می‌کنیم:

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx \, dx \tag{۴}$$

چون f با (۲) نمایش داده شده است، انتگرال فوق را به صورت مجموع m انتگرال می‌نویسیم:

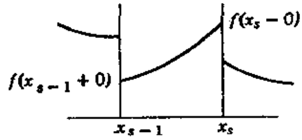
$$\pi a_n = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} = \sum_{s=1}^{m} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, dx, \tag{۵}$$

که در آن $x_0 = -\pi$ و $x_m = \pi$. انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء نتیجه می‌دهد

$$(۶)\quad \int_{x_{s-1}}^{x_s} f\cos nx\,dx=\frac{f}{n}\sin nx\int_{x_{s-1}}^{x_s}-\frac{1}{n}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f'\sin nx\,dx$$

هم اکنون نکتهٔ مهم، محاسبهٔ عبارت اول طرف‌راست است. $f(x)$ ممکن است در x_s ناپیوسته باشد (شکل ۲۱۹)، درچنین حالتی باید $f(x_s-۰)$، حد چپ f در x_s، را درنظربگیریم. به‌همین نحو، در $x_{s-۱}$ باید حد راست f، $f(x_{s-۱}+۰)$ را درنظرگرفت. ازاین‌رو عبارت اول طرف راست (۶) برابراست با

$$\frac{۱}{n}\,[f(x_s-۰)\sin nx_s-f(x_{s-۱}+۰)\sin nx_{s-۱}].$$



شکل ۲۱۹. فرمول (۶)

درنتیجه، با درج (۶) در(۵) واستفاده ازنمادهای کوتاه $S_۰=\sin nx_۰$، $S_۱=\sin nx_۱$ وغیره، به دست می‌آوریم

$$\pi a_n=\frac{۱}{n}[f(x_۱-۰)S_۱-f(x_۰+۰)S_۰+f(x_۲-۰)S_۲-f(x_۱+۰)S_۱$$

$$(۷)\qquad +\dots+f(x_m-۰)S_m-f(x_{m-۱}+۰)S_{m-۱}]$$

$$-\frac{۱}{n}\sum_{s=۱}^{m}\int_{x_{s-۱}}^{x_s} f'\sin nx\,dx.$$

هرگاه جملاتی را که دارای Sهای یکسان هستندکنار هم بنویسیم، عبارت داخل کروشه چنین می‌شود:

$$-f(x_۰+۰)S_۰+[f(x_۱-۰)-f(x_۱+۰)]S_۱$$

$$(۸)\qquad +[f(x_۲-۰)-f(x_۲+۰)]S_۲+\dots+f(x_m-۰)S_m.$$

عبارتهای داخل‌کروشه‌ها در (۸) پرشهای f هستند که در ۱ــ ضرب شده‌اند. به علاوه به‌علت دوره‌ای بودن، $S_۰=S_m$ و $f(x_۰)=f(x_m)$، بنابراین جملهٔ اول و جملهٔ آخر (۸) را می‌توان با هم در نظر گرفت. در نتیجه (۸) برابر است با

$$-j_۱S_۱-j_۲S_۲-\dots-j_mS_m$$

و از (۷) فرمول واسطهٔ زیر عاید می‌شود:

$$\pi a_n = -\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s \sin nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx\, dx \tag{۹}$$

با اعمال همین روش در مورد انتگرالهای طرف راست (۹)، می‌یابیم

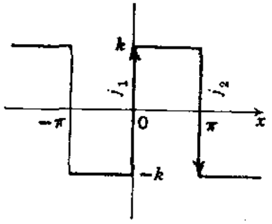
$$\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx\, dx = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \cos nx_s + \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f'' \cos nx\, dx \tag{۱۰}$$

با ادامهٔ این روش، به انتگرالهایی که شامل مشتقات مراتب بالاتر وبالاتر f هستند می‌رسیم. چون f با چند جمله‌ایها نمایش داده شده است و مشتق مرتبهٔ $(r+1)$ام یك چند جمله‌ای ازدرجهٔ r صفراست، بنابراین بعد ازچند مرحله (متناهی) به جایی می‌رسیم که دیگر انتگرالی باقی نمی‌ماند. با جایگزین کردن (۱۰) و فرمولهای مشابهی که از مراحل بعدی نتیجه می‌شوند در (۹)، فرمول مطلوب را به دست می‌آوریم:

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\Big[-\sum_{s=1}^{m} j_s \sin nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \cos nx_s + \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \sin nx_s + \frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \cos nx_s - - + + \cdots\Big], \tag{۱۱ الف}$$

که در آن $n=1, 2, \ldots$ (و a_0 مانند قبل باید با انتگرال گیری به‌دست آید). درست به همین روش از (۶ پ) بخش ۲.۱۰ به دست می‌آوریم

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\Big[\sum_{s=1}^{m} j_s \cos nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s' \sin nx_s - \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{m} j_s'' \cos nx_s + \frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{m} j_s''' \sin nx_s + - - + + \cdots\Big]. \tag{۱۱ ب}$$



شکل ۲۲۰. مثال ۲

به منظور اجتناب از خطاهای احتمالی بهتر است مانند مثال ۱ نمودارهای $f(x)$ و مشتقاتش را رسم کنیم و پرشها را در جدولی ثبت نماییم.

مثال ۲. موج مربعی دوره‌ای

مطلوب است ضرایب فوریهٔ تابع (شکل ۲۲۰)

$$f(x)=\begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که $f' \equiv 0$ و پرشهای f عبارتند از

	پرش در $x_1 = 0$	پرش در $x_2 = \pi$
f	$j_1 = 2k$	$j_2 = -2k$

f فرد است. درنتیجه $a_n = 0$، و بنا به (۱۱ ب)،

$$b_n = \frac{1}{n\pi}[j_1 \cos nx_1 + j_2 \cos nx_2] = \frac{1}{nx}[2k\cos 0 - 2k\cos n\pi]$$

$$= \frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 4k/n\pi & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$ (ر.ك. مثال ۱ بخش ۲.۱۰).

مثال ۳

مطلوب است سری فوریهٔ تابع داده شده درمثال ۱ همین بخش، با انتگرال گیری،

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

بنا به (۱۱ الف)،

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2 \sin n\pi + \frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(2\sin 0 - 2\sin n\pi)\right] = \frac{2}{n^2}\cos n\pi$$

از این‌رو $a_1 = -\frac{2}{1^2}$ ، $a_2 = \frac{2}{2^2}$ ، $a_3 = -\frac{2}{3^2}$ ، ... . از (۱۱ ب) نتیجه‌می‌شود که

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[-\pi^2\cos n\pi + \frac{2\pi}{n}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}(2\cos 0 - 2\cos n\pi)\right]$$

$$= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1).$$

در نتیجه

$$b_1 = \pi - \frac{4}{\pi},\quad b_2 = -\frac{\pi}{2},\quad b_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3^2\pi},\quad b_4 = -\frac{\pi}{4},\ \cdots,$$

و سری فوریه عبارت است از

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\cos x + \left(\pi - \frac{4}{\pi}\right)\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \cdots$$

مسائل بخش ۶.۱۰

۱. (۱۱ ب) را از (۶ پ) بخش ۲.۱۰ به‌دست آورید.

با استفاده از (۱۱)، سری فوریهٔ تابع $f(x)$ در

۲. مسائل ۱ـ۴، بخش ۲.۱۰

۳. مسائل ۹ـ۱۲، بخش ۲.۱۰

۴. مسائل ۵ـ۸، بخش ۲.۱۰

۵. مسائل ۱۳ـ۱۶، بخش ۲.۱۰

را بیابید.

۶. نشان دهید فرمولهای متناظر با (۱۱) درمورد تابع $f(t)$ با دورهٔ T عبارتند از

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left[-\sum_{s=1}^{m} j_s \sin\frac{2n\pi}{T}t_s - \frac{T}{2n\pi}\sum_{s=1}^{m} j_s'\cos\frac{2n\pi}{T}t_s\right.$$

(۱۲ الف)

$$\left. + \left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\sum_{s=1}^{m} j_s''\sin\frac{2n\pi}{T}t_s + \left(\frac{T}{2n\pi}\right)^3\sum_{s=1}^{m} j_s'''\cos\frac{2n\pi}{T}t_s - - + + \cdots\right],$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[\sum_{s=1}^{m} j_s\cos\frac{2n\pi}{T}t_s - \frac{T}{2n\pi}\sum_{s=1}^{m} j_s'\sin\frac{2n\pi}{T}t_s\right.$$

(۱۲ ب)

$$\left. - \left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\sum_{s=1}^{m} j_s''\cos\frac{2n\pi}{T}t_s + \left(\frac{T}{2n\pi}\right)^3\sum_{s=1}^{m} j_s'''\sin\frac{2n\pi}{T}t_s + - - + + \cdots\right]$$

با استفاده از (۱۲)، سری‌فوریهٔ تابع $f(t)$ در

۷. مسائل ۴–۶، بخش ۳.۱۰
۸. مسائل ۷–۸، بخش ۳.۱۰
۹. مسائل ۹–۱۱، بخش ۳.۱۰
۱۰. مسائل ۱۲–۱۳، بخش ۳.۱۰

را بیابید.

با استفاده از (۱۲)، سری کسینوسی فوریهٔ تابع $f(t)$ در مسائل

۱۱. مسائل ۱–۴ بخش ۵.۱۰
۱۲. مسائل ۵–۷ بخش ۵.۱۰

را بیابید.

با استفاده از (۱۲)، سری سینوسی فوریهٔ تابع $f(t)$ در مسائل

۱۳. مسائل ۹–۱۳ بخش ۵.۱۰
۱۴. مسائل ۱۴–۱۶ بخش ۵.۱۰

را بیابید.

۱۵. آیا می‌توان برای یافتن ضرایب فوریهٔ تابع $f(x)=e^x(0<x<2\pi)$، $f(x+2\pi)=f(x)$ از (۱۱) استفاده کرد؟

۷.۱۰ نوسانهای واداشته

سری فوریه در ارتباط با معادلات دیفرانسیل دارای کاربردهای مهمی است. برای روشن‌شدن این‌موضوع، یك مسئلهٔ عملی مهم راکه شامل یك معادلهٔ دیفرانسیل‌معمولی‌است مورد بررسی قرار می‌دهیم. (معادلات دیفرانسیل جزئی درفصل بعد بررسی می‌شوند.)

دربخش ۱۳.۲ آموختیم که نوسانهای واداشتهٔ جسمی به‌جرم m که متصل به‌یك فنر است (شکل ۲۲۱) از معادلهٔ

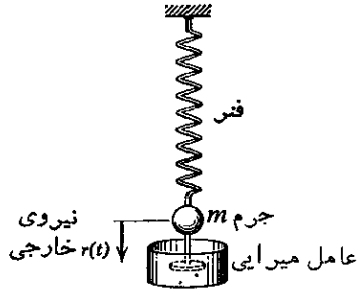
$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=r(t) \tag{1}$$

پیروی می کند، که درآن k مدول فنر و c ثابت میرایی است.

هرگاه نیروی خارجی $r(t)$ تابعی سینوسی یاکسینوسی بوده، ثابت میرایی صفر نباشد، جواب حالت مانا نمایش نوسان همسازی است. که فرکانس آن برابر با فرکانس نیروی خارجی است.

حال می‌خواهیم ببینیم که هرگاه $r(t)$ تابع سینوسی یا کسینوسی صرف نبوده بلکه تابع دوره‌ای دلخواهی باشد، آنگاه جواب حالت مانا ترکیبی ازنوسانهای همساز است که فرکانسشان $r(t)$ و مضارب $r(t)$ است. هرگاه فرکانس یکی از این نوسانها نزدیك‌به فرکانس حالت تشدید دستگاه ارتعاشی باشد (ر. ك. بخش ۱۳.۲)، آنگاه چنین نوسانی

بخش عمدهٔ پاسخ دستگاه به‌نیروی خارجی است. البته این نتیجه برای ناظری که بانظریهٔ ریاضی مربوطه که درمطالعهٔ دستگاههای ارتعاش و حالت تشدید بسیارمهم است آشنانیست شگفت‌انگیز است. مطلب فوق را باآوردن مثالی روشن می‌کنیم.



شکل ۲۲۱. دستگاه ارتعاشی مورد بررسی

مثال ۱. نوسانهای واداشته حاصل از نیروی رانندهٔ دوره‌ای غیرسینوسی

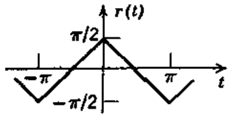
فرض می‌کنیم در (۱)، $m = 1(\mathrm{gm})$، $c = 0.02(\mathrm{gm/sec})$، و $k = 25(\mathrm{gm/sec^2})$، به‌طوری که (۱) چنین شود:

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = r(t) \tag{2}$$

دراین رابطه $r(t)$ با $\mathrm{gm\cdot cm/sec^2}$ اندازه‌گیری شده است. فرض کنید (شکل ۲۲۲)

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t).$$

مطلوب است جواب حالت مانای $y(t)$.



شکل ۲۲۲. نیروی مثال ۱

$r(t)$ را با سری فوریه نمایش می‌دهیم:

$$r(t)=\frac{۴}{\pi}\left(\cos t+\frac{۱}{۳^۲}\cos ۳t+\frac{۱}{۵^۲}\cos ۵t+\cdots\right). \qquad (۳)$$

آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل

$$\ddot{y}+۰٫۰۲\dot{y}+۲۵y=\frac{۴}{n^۲\pi}\cos nt \quad (n=۱,۳,\ldots) \qquad (۴)$$

را که طرف راست آنها تنها شامل یك جمله از سری (۳) است درنظرمی‌گیریم، دربخش ۱۳.۲ دیدیم که $y_n(t)$، جواب حالت مانای (۴)، به‌صورت زیر است:

$$y_n=A_n\cos nt+B_n\sin nt, \qquad (۵)$$

با درج این y_n در (۴) می‌یابیم

$$A_n=\frac{۴(۲۵-n^۲)}{n^۲\pi D}\ ،\ B_n=\frac{۰٫۰۸}{n\pi D}\ ،\ \text{که}\ D=(۲۵-n^۲)^۲+(۰٫۰۲n)^۲ \qquad (۶)$$

چون معادلهٔ دیفرانسیل (۲) خطی است، انتظار می‌رود جواب حالت مانا به‌صورت

$$y=y_۱+y_۳+y_۵+\cdots \qquad (۷)$$

باشد، که y_n از (۵) و (۶) به‌دست می‌آید. در واقع این به سادگی از جانشانی (۷) در (۲) و استفاده از سری فوریهٔ $r(t)$ نتیجه می‌شود، مشروط بر اینکه مشتق‌گیری جمله به‌جمله از (۷) مجاز باشد. (خوانندگانی که قبلا بـا مفهوم همگرایی یکنواخت [بخش ۶.۱۶] آشنا شده‌اند می‌توانند ثابت کنند که از (۷) می‌توان جمله‌به‌جمله مشتق گرفت.)

از (۶) دامنهٔ (۵) محاسبه می‌شود:

$$C_n=\sqrt{A_n^۲+B_n^۲}=\frac{۴}{n^۲\pi\sqrt{D}}$$

که مقادیر عددی عبارتند از

$$C_۱=۰٫۰۵۳۰$$

$$C_۳=۰٫۰۰۸۸$$

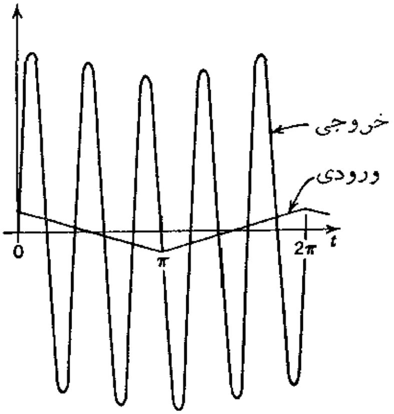
$$C_۵=۰٫۵۱۰۰$$

$$C_۷=۰٫۰۰۱۱$$

$$C_۹=۰٫۰۰۰۳$$

بـه ازای $n=۵$ مقدار D بسیار کوچك است، مخرج $C_۵$ کوچك است، و $C_۵$ خیلی

بزرگ است، به‌طوری‌که y_5 تنها جملهٔ قابل ملاحظهٔ (۷) است. این نشان می‌دهد که حرکت حالت مانا تقریباً نوسانی همساز بافرکانسی پنج برابر نیروی محرك است (شکل ۲۲۳).



شکل ۲۲۳. ورودی، و خروجی حالت مانا در مثال ۱

مسائل بخش ۷.۱۰

مطلوب است جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $\ddot{y}+\omega^{۲}y=r(t)$ با

۱. $r(t)=\sin t\,,\ \omega=$ ۰٫۵ , ۰٫۷ , ۰٫۹ , ۱٫۱ , ۱٫۵ , ۲٫۰ , ۱۰٫۰

۲. $r(t)=\cos\alpha t+\cos\beta t\ \ (\omega^{۲}\neq\alpha^{۲},\beta^{۲})$

۳. $r(t)=\sin t+\frac{۱}{۹}\sin ۳t+\frac{۱}{۲۵}\sin ۵t,\ \omega=$ ۰٫۵, ۰٫۹ , ۱٫۱ , ۲ , ۲٫۹ , ۳٫۱ , ۴ , ۴٫۹ , ۵٫۱ , ۶ , ۸

۴. $$r(t)=\begin{cases} t & -\frac{\pi}{۲}<t<\frac{\pi}{۲} \\ \pi-t & \frac{\pi}{۲}<t<\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}\qquad r(t+۲\pi)=r(t)\ ,$$

$|\omega|\neq$ ۱ , ۳ , ۵ , ...

۵. $r(t)=\frac{t^2}{4}\quad -\pi<t<\pi$ و $r(t+2\pi)=r(t)\,,\quad |\omega|\neq 0,1,2,\cdots$

۶. $r(t)=\sum_{n=1}^{N}a_n\cos nt\,,\quad |\omega|\neq 1,2,\ldots,N$

۷. $r(t)=\frac{\pi}{4}|\sin t|\qquad -\pi<t<\pi$ و $r(t+2\pi)=r(t)\,,$
$|\omega|\neq 0,\ 2,\ 4,\ \cdots$

۸. $r(t)=\begin{cases} t+\pi & -\pi<t<0\\ -t+\pi & 0<t<\pi\end{cases}\quad r(t+2\pi)=r(t),\ |\omega|\neq 0,1,3,\cdots$

مطلوب است نوسان حالت مانای متناظر با $\ddot{y}+c\dot{y}+y=r(t)$ که درآن $c>0$ و

۹. $r(t)=K\sin t$

۱۰. $r(t)=\sin 3t$

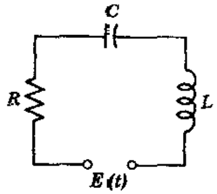
۱۱. $r(t)=a_n\cos nt$

۱۲. $r(t)=\sum_{n=1}^{N}b_n\sin nt$

۱۳. $r(t)=\frac{t}{12}(\pi^2-t^2)\quad -\pi<t<\pi$ و $r(t+2\pi)=r(t)$

۱۴. مطلوب است $I(t)$ ، جریان حالت مانا دریك مدار RLC با اهم $R=100$ ، هنری $L=10$ ، فاراد $C=10^{-2}$ ، وقتی‌که به‌ازای $-\pi<t<\pi$ ، $E(t)=100t(\pi^2-t^2)$ ولت و $E(t+2\pi)=E(t)$ برای حل مسئله به شرح زیر عمل کنید:

سری فوریهٔ $E(t)$ را بیابید. درنتیجه $I(t)$ به‌صورت سری مثلثاتی درخواهد آمد. فرمولهای عمومی ضرایب این سری را تعیین کنید. مقادیر عددی چند ضریب اول را محاسبه کنید. نمودار مجموع چند جملهٔ اول سری مزبور را رسم کنید.



مسئله ۱۴. مدار RLC

۱۵. همان اعمال مسئلهٔ ۱۴ را انجام دهید، وقتی‌که

$$E(t)=\begin{cases}100(\pi t+t^2) & -\pi<t<0\\ 100(\pi t-t^2) & 0<t<\pi\end{cases} \qquad E(t+2\pi)=E(t)$$

سایر داده‌ها همان داده‌های مسئلهٔ قبل است.

۸.۱۰ تقریب توسط چندجمله‌ایهای مثلثاتی. خطای مربعی

فرض می‌کنیم $f(x)$ تابع مفروضی با دورهٔ 2π باشد‌که بتوان‌آن را به صورت یك سری فوریه نمایش داد. آنگاه مجموع جزئی Nام سری فوریهٔ تقریبی از $f(x)$ است:

$$f(x)\approx a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

طبیعی است سؤال‌کنیم که آیا (۱) «بهترین» تقریب برای f توسط چند جمله‌ای مثلثاتی

$$F(x)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx) \qquad (2)$$

با یك N مشخص است، یعنی آیا این تقریبی است که به ازای آن «خطا» می‌نیمم است.

البته، نخست باید منظورمان از خطای E یك تقریب را تعریف کنیم. ما تعریفی برمی‌گزینیم‌که میزان تطابق f و F روی **سراسر فاصله** $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ را مشخص کند. واضح است‌که ماکزیمم $(f-F)$ برای این منظور مناسب نیست: در شکل ۲۲۴، تابع F تقریب خوبی برای f است، ولی $|f-F|$ در نقاط نزدیك به x_0 بزرگ است. از این‌رو مقدار

$$E=\int_{-\pi}^{\pi}(f-F)^2\,dx \qquad (3)$$

را برای بررسی انتخاب می‌کنیم. این مقدار را **خطای مربعی کل** F نسبت به تابع f روی فاصلهٔ $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ می‌نامند. واضح است که $E\geqslant 0$.

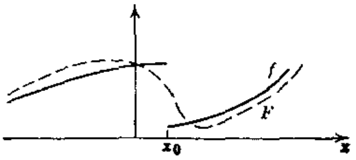
به ازای N مشخص، می‌خواهیم ضرایب (۲) را طوری تعیین کنیم که E می‌نیمم باشد. (۳) را می‌توان به صورت

$$E=\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}fF\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}F^2dx \qquad (4)$$

نوشت.

با قرار دادن (۲) در انتگرال آخر و محاسبهٔ انتگرالهای پدید آمده مانند بخش

۲۰۱۰ به سادگی به دست می‌آوریم



شکل ۲۲۴. خطای تقریب

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2\,dx=\pi\,(2\alpha_0^2+\alpha_1^2+\cdots+\alpha_N^2+\beta_1^2+\cdots+\beta_N^2).$$

بـا درج (۲) در انتگرال دوم (۴)، مشاهده می‌کنیم که انتگرالهای پدید آمده همـان انتگرالهای فرمولهای اویلر (۶)، بخش ۲۰۱۰ هستند، و

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\,F\,dx$$

$$=\pi(2\alpha_0 a_0+\alpha_1 a_1+\cdots+\alpha_N a_N+\beta_1 b_1+\cdots+\beta_N b_N).$$

با توجه به این عبارات، (۴) چنین می‌شود:

$$E=\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx-2\pi\left[2\alpha_0 a_0+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n a_n+\beta_n b_n)\right]$$

(۵)

$$+\pi\left[2\alpha_0^2+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right].$$

هر گاه در (۲) $\alpha_n=a_n$ و $\beta_n=b_n$ بگیریم، آنگاه بنابر (۵) مشاهده می‌کنیم که خطای مربعی متناظر با این انتخاب خاص ضرایب F چنین می‌شود:

$$E^*=\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx-\pi\left[2a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right]. \qquad (۶)$$

با کم کردن (۶) از (۵) به دست می‌آوریم

$$E-E^*=\pi\left\{2(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{n=1}^{N}[(\alpha_n-a_n)^2+(\beta_n-b_n)^2]\right\}.$$

هر جملهٔ طرف راست مربع یك عدد حقیقی و بنابر این غیر منفی است. در نتیجه

$$E-E^*\geqslant 0 \qquad \text{یا} \qquad E\geqslant E^*،$$

و $E=E^*$ اگر و فقط اگر $\alpha_0=a_0$ ، . . . ، $\beta_N=b_N$. این ثابت می‌کند که

قضیهٔ ۱ (خطاهای مربعی می‌نیمم)

خطای مربعی کل F [(۲) را ببینید ، N مشخص است] نسبت به f روی فاصلهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ می‌نیمم است ، اگر و فقط اگر ضرایب F در (۲) ضرایب فوریهٔ متناظر f باشند. این مقدار می‌نیمم از (۶) به دست می‌آید.

بنا بر (۶) مشاهده می‌کنیم که E^* با افزایش N نمی‌تواند افزایش یابد ، بلکه ممکن است نزول کند. از این‌رو، با افزایش N، مجموعهای جزئی سری فوریهٔ f ، از نقطه‌نظر خطای مربعی تقریبهای بهتر و بهتری از $f(x)$ می‌دهند.

چون $E^* \geqslant 0$ و (۶) به ازای هر N برقرار است ، از (۶) ، یك نامساوی مهم ،

نامساوی بسل[1]

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx \qquad (7)$$

در صورت موجود بودن انتگرال طرف راست برای ضرایب فوریهٔ f به دست می‌آید.

مسائل بخش ۱۰.۸

۱. فرض می‌کنیم $f(x)=-1$ وقتی که $-\pi<x<0$ ، و $f(x)=17$ وقتی که $0<x<\pi$ ، و $f(x+2\pi)=f(x)$. تابع $F(x)$ ، به صورت (۲) ، را طوری بیابید که خطای مربعی کل (۳) می‌نیمم باشد.

۲. مطلوب است محاسبهٔ خطای مربعی می‌نیمم در مسئلهٔ ۱ به‌ازای $N=1,\ 3,\ 5,\ 7$. کوچکترین مقدار N ، به طوری که $E^* \leqslant 0.2$ ، چقدر است؟

۳. نشان دهید که خطای مربعی می‌نیمم (۶) تابعی نزولی یکنوا از N است.

در هر یك از مسائل زیر ، تابع $F(x)$ به صورت (۲) ، را طوری بیابید که مربع خطای کل E می‌نیمم باشد و این مقدار می‌نیمم را بـه‌ازای $N=1,\ 2,\ ...\ ,\ 5$ محاسبه کنید.

۴. $f(x)=x \quad (-\pi<x<\pi)$ **۵.** $f(x)=x^2 \quad (-\pi<x<\pi)$

---

۱. می‌توان نشان داد که برای چنین تابعی حتی تساوی در (۷) نیز برقرار است. اثبات در مرجع [D4].

۹.۱۰ انتگرال فوریه

سریهـای فوریه برای حل مسائل گونـاگونی که شامل توابع دوره‌ایند ابزار پرقدرتی هستند. اولین کاربردهای سری فوریه در بخش ۷.۱۰ آمده است، و مسائل مهم زیادی، در ارتباط با معادلات با مشتقات جزئی، در فصل ۱۱ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نظر به اینکه بسیاری ازمسائل عملی شامل توابع دوره‌ای نیستند، بجاست که روش سری فوریه را طوری تعمیم دهیم که توابع غیر دوره‌ای را نیز در برگیرد.

به عبارت ساده، اگر با تابع دوره‌ای $f_T(x)$، با دورهٔ T، شروع کرده و T را به سمت بینهایت میل دهیم، آنگاه تابع $f(x)$ حاصل دوره‌ای نخواهد بود. این مطلب را با ارائهٔ دو مثال روشن می‌کنیم.

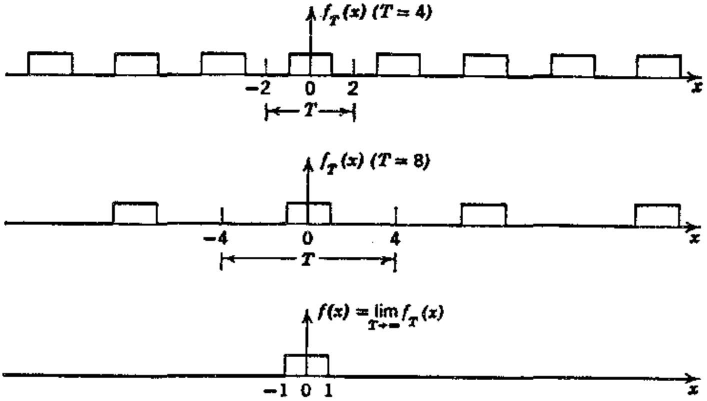
مثال ۱

تابع (شکل ۲۲۵)

$$f_T(x)=\begin{cases} ۰ & -T/۲<x<-۱ \\ ۱ & -۱<x<۱ \\ ۰ & ۱<x<T/۲ \end{cases}$$

با دورهٔ $T>۲$ را درنظر می‌گیریم. وقتی $T\to\infty$، به دست می‌آوریم

$$f(x)=\lim_{T\to\infty} f_T(x)=\begin{cases} ۱ & -۱<x<۱ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$



شکل ۲۲۵. مثال ۱

مثال ۲

فرض می‌کنیم $f_T(x)=e^{-|x|}$ وقتی که $-T/2<x<T/2$ و $f_T(x+T)=f_T(x)$ آنگاه (شکل ۲۲۶ را ببینید)

$$f(x)=\lim_{T\to\infty} f_T(x)=e^{-|x|}$$

حال با تابع دوره‌ای $f_T(x)$، که دارای دورهٔ T است و می‌توان آن را به صورت سری فوریهٔ

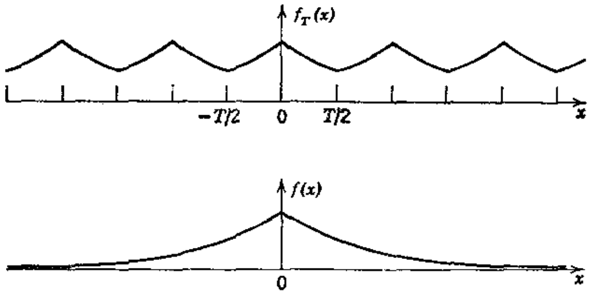
$$f_T(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

نمایش داده شروع می‌کنیم.

این نمایش را به شرح زیر تغییر شکل می‌دهیم. از نماد کوتاه

$$w_n=\frac{2n\pi}{T}$$

استفاده می‌کنیم، a_n و b_n را از فرمولهای اویلر (۳) بخش ۳.۱۰ در $f_T(x)$ جایگزین کرده و متغیر انتگرال‌گیری را با v نشان می‌دهیم. آنگاه به دست می‌آوریم



شکل ۲۲۶. مثال ۲

$$f_T(x)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\,dv+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos w_n x\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\cos w_n v\,dv\right.$$

$$\left.+\sin w_n x\int_{-T/2}^{T/2} f_T(v)\sin w_n v\,dv\right].$$

حال

$$w_{n+1}-w_n=\frac{۲(n+۱)\pi}{T}-\frac{۲n\pi}{T}=\frac{۲\pi}{T},$$

یعنی

$$\Delta w=w_{n+1}-w_n=\frac{۲\pi}{T}$$

آنگاه $۲/T=\Delta w/\pi$ ، و می‌توان سری فوریه را به‌صورت زیر نوشت :

$$(۱)\quad f_T(x)=$$
$$\frac{۱}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f_T(v)\,dv+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\Big[\cos(w_n x)\,\Delta w\int_{-T/۲}^{T/۲} f_T(v)\cos w_n v\,dv$$
$$+\sin(w_n x)\,\Delta w\int_{-T/۲}^{T/۲} f_T(v)\sin w_n v\,dv\Big].$$

این نمایش برای هر Tی ثابت ، هر اندازه بزرگ ولی متناهی ، برقرار است.

حال T را به سمت بینهایت میل می‌دهیم و فرض می‌کنیم که تابع غیر دوره‌ای حاصل

$$f(x)=\lim_{T\to\infty} f_T(x)$$

روی محور xها مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد ، یعنی ، انتگرال

$$(۲)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$$

موجود باشد. آنگاه $۱/T\to ۰$ و مقدارجملهٔ اول طرف راست (۱) به صفرمیل‌می‌کند. به علاوه $\Delta w=۲\pi/T\to ۰$ و سری نامتناهی (۱) به انتگرالی از ۰ تا ∞ بدل می‌شود، که نمایش $f(x)$ است ، یعنی ،

$$(۳)\quad f(x)=$$
$$\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\Big[\cos wx\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv+\sin wx\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv\Big]dw.$$

هر گاه نمادهای کوتاه زیر را به‌کار بریم :

$$(۴)\qquad A(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv\,,\quad B(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv,$$

(۳) را می‌توان به صورت

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]\,dw. \tag{5}$$

نوشت. این نمایشی از تابع $f(x)$ است که **انتگرال فوریه** نامیده می‌شود.

واضح است که رهیافت طبیعی مسا نمایش (۵) را صرفاً مطرح می‌کند، و به هیچ عنوان آن را ثابت نمی‌کند؛ در حقیقت، حد (۱) وقتی که Δw به صفر میل کند تعریف انتگرال (۳) نیست. شرایط کافی برای برقرار بودن (۵) به شرح زیرند:

قضیهٔ ۱ (انتگرال فوریه)

هرگاه $f(x)$ در هر فاصلهٔ متناهی پیوستهٔ تکه‌ای (ر.ك. بخش ۱.۵) و در هر نقطه دارای مشتق راست و مشتق چپ باشد (ر.ك.بخش ۲.۱۰) و انتگرال (۲) موجود باشد، آنگاه $f(x)$ را می‌توان با انتگرال فوریه نمایش داد. در نقطه‌ای‌که $f(x)$ ناپیوسته باشد. مقدار انتگرال فوریه برابرمیانگین حدود چپ و راست $f(x)$ درآن نقطه است(ر.ك.بخش ۲.۱۰).

(اثبات در مرجع $[D2]$؛ ر.ك. ضمیمهٔ ۱.)

مثال۳. تپهٔ منفرد، انتگرال سینوسی

مطلوب است نمایش انتگرال فوریه‌ای تابع (شکل ۲۲۷)

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

از (۴) به دست می‌آوریم

$$A(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wv\,dv=\int_{-1}^{1}\cos wv\,dv=\left.\frac{\sin wv}{w}\right|_{-1}^{1}=\frac{2\sin w}{w},$$

$$B(w)=\int_{-1}^{1}\sin wv\,dv=0,$$

و (۵) چنین می‌شود:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}\,dw. \tag{6}$$

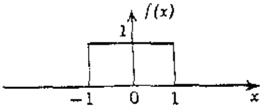
میانگین حدود چپ وراست $f(x)$ در $x=1$ برابر $(0+1)/2$، یعنی برابر $1/2$ است.

بنابراین، از (۶) و قضیهٔ ۱ جواب مورد نظر حاصل می‌شود:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx \sin w}{w}\, dw = \begin{cases} \pi/2 & 0 \leqslant x < 1 \\ \pi/4 & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که این انتگرال به عامل ناپیوستهٔ دیریکله[1] موسوم است. حالت $x = 0$ را که مورد علاقهٔ ویژهٔ ما است بررسی می‌کنیم. وقتی $x = 0$ آنگاه

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\, dw = \frac{\pi}{2} \qquad (7)$$



شکل ۲۲۷. مثال ۳

مشاهده می‌کنیم که این انتگرال حد **انتگرال سینوسی**

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w}\, dw \qquad (8)$$

است وقتی که $z \to \infty$ (z حقیقی است). نمودار $\mathrm{Si}(z)$ درشکل ۲۲۸ داده شده است.

درمورد یك سری فوریه، نمودارهای مجموعهای جزئی، منحنیهای تقریبی منحنی تابع دوره‌ای نمایش داده شده با سری فوریه هستند. همین‌طور، در مورد انتگرال فوریهٔ (۵)، تقریبها ازتعویض ∞ با عدد a به‌دست می‌آیند درنتیجه انتگرال

$$\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w}\, dw \qquad (9)$$

تقریبی برای انتگرال (۶) و بنابراین تقریبی برای $f(x)$ است. شکل ۲۲۹ نوسانهای حول نقاط ناپیوستگی $f(x)$ را نشان می‌دهد.

ممکن است انتظار داشته باشیم وقتی که a به سمت بینهایت میل کند این نوسانها از بین بروند، ولی چنین نیست، با افزایش a، اینها هرچه بیشتر به نقاط $x = \pm 1$ نزدیك می‌شوند. این رفتارغیرمنتظره، که درارتباط با سری فوریه نیزاتفاق می‌افتد، بـه پدیدهٔ

---

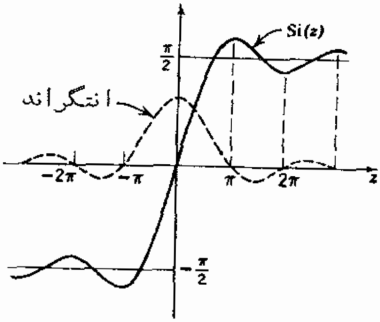
۱. پتر گوستاو لوژن دیریکله (Peter Gustav Lejeune Dirichlet)، ۱۸۰۵–۱۸۵۹، ریاضیدان آلمانی است که به خاطر آثار تحقیقاتی مهمش در سریهای فوریه ونظریهٔ اعـداد معروف است.

گیبز[1] معروف است. این موضوع را می‌توان با نمایش (۹) برحسب انتگرال سینوسی به صورت زیر بیان نمود. با استفاده از (۱۱) از ضمیمهٔ ۳، نخست به دست می‌آوریم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w}\,dw$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(w+wx)}{w}\,dw+\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(w-wx)}{w}\,dw.$$

در انتگرال اول طرف راست قرار می‌دهیم $w+wx=t$. آنگاه $dw/w=dt/t$، و $0\leqslant w\leqslant a$ با $0\leqslant t\leqslant(x+1)a$ متناظر است. در انتگرال آخر قرار می‌دهیم $w-wx=-t$. آنگاه $dw/w=dt/t$، و فاصلهٔ $0\leqslant w\leqslant a$ با $0\leqslant t\leqslant(x-1)a$ متناظراست. چون $\sin(-t)=-\sin t$، بنابراین نتیجه می گیریم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w}\,dw=\frac{1}{\pi}\int_0^{(x+1)a}\frac{\sin t}{t}\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{(x-1)a}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$



شکل ۲۲۸. انتگرال سینوسی

از اینجا و با توجه به (۸) انتگرال مورد نظر برابر است با

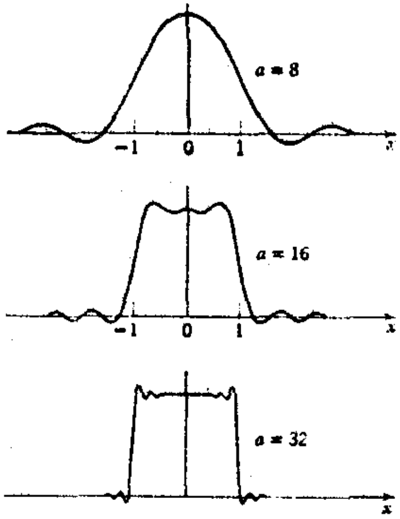
$$\frac{1}{\pi}\operatorname{si}(a[x+1])-\frac{1}{\pi}\operatorname{si}(a[x-1])$$

و نوسانهای شکل ۲۲۹ از نوسانهای شکل ۲۲۸ نتیجه می‌شوند. افزایش a می‌تواند

---

۱. جوسایا ویلارد گیبز (Josiah Willard Gibbs)، ۱۸۳۹–۱۹۰۳، ریاضیدان امریکایی است که آثارش در توسعهٔ آنالیز برداری و ریاضی فیزیك بسیار با اهمیت بود.

باعث تبدیل مقیاس بر محور شده و سبب انتقال نوسانات گردد. برای جزئیات بیشتر مرجع [D۱] ضمیمهٔ ۱ را ببینید.



شکل ۲۲۹. انتگرال (۹) به‌ازای $a=$ ۸، ۱۶، ۳۲

هرگاه $f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه، در (۴)، $B(w)=0$،

$$A(w)=2\int_0^\infty f(v)\cos wv\,dv, \qquad (10)$$

و (۵) به صورت ساده‌تر

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw \qquad (f \text{ زوج}) \qquad (11)$$

تبدیل می‌شود.

هرگاه $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $A(w)=0$،

$$B(w)=2\int_0^\infty f(v)\sin wv\,dv, \qquad (12)$$

و (۵) چنین می‌شود:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw \qquad (f \text{ فرد}) \qquad (13)$$

این ساده نویسیها کاملا شبیه آن چیزی است که در مورد سری فوریه در بخش ۴.۱۰ بررسی شد.

مثال ۴. انتگرالهای لاپلاس

مطلوب است انتگرال فوریهٔ

$$f(x)=e^{-kx} \quad (k>0) \qquad \text{وقتی که} \quad x>0 \quad \text{و} \quad f(-x)=f(x)$$

(ر.ك. شکل ۲۲۶ همین بخش ، که درآن $k=1$). از آنجاکه f زوج است ، از (۱۰) داریم

$$A(w)=2\int_{0}^{\infty} e^{-kv}\cos wv\, dv.$$

حال با انتگرال گیری به روش جزء به جزء

$$\int e^{-kv}\cos wv\, dv=\frac{-k}{k^{2}+w^{2}}e^{-kv}\left(-\frac{w}{k}\sin wv+\cos wv\right)$$

وقتی $v=0$ عبارت طرف راست مساوی $-k/(k^{2}+w^{2})$ است ، وهنگامی v به سمت بینهایت میل کند، عبارت فوق به‌علت وجود عامل نمایی به‌سمت صفرمیل می کند. بنابراین

$$A(w)=\frac{2k}{k^{2}+w^{2}},$$

و با جانشانی این در (۱۱) نمایش

$$f(x)=e^{-kx}=\frac{2k}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx}{k^{2}+w^{2}}dw \qquad (x>0,\ k>0)$$

را به دست می‌آوریم. با توجه به این نمایش مشاهده می کنیم که

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx}{k^{2}+w^{2}}dw=\frac{\pi}{2k}e^{-kx} \qquad (x>0,\ k>0) \tag{۱۴}$$

به همین نحو ، بنابه انتگرال فوریهٔ (۱۳) تابع فرد

$$f(x)=e^{-kx} \quad (k>0) \qquad \text{وقتی که} \quad x>0 \quad \text{و} \quad f(-x)=-f(x)$$

نتیجهٔ زیر عاید می‌شود :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{w\sin wx}{k^{2}+w^{2}}dw=\frac{\pi}{2}e^{-kx} \qquad (x>0,\ k>0) \tag{۱۵}$$

انتگرالهای (۱۴) و (۱۵) موسوم به انتگرالهای لاپلاس هستند.

این مثال نشان می‌دهد که از نمایش انتگرال فوریه‌ای می‌توان برای محاسبهٔ انتگرالها استفاده کرد.

مسائل بخش ۹.۱۰

با استفاده از نمایش انتگرال فوریه‌ای ، نشان دهید که

۱. [از (۵) استفاده کنید.]

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos xw + w \sin xw}{۱ + w^{۲}} dw = \begin{cases} \circ & x < \circ \\ \pi/۲ & x = \circ \\ \pi e^{-x} & x > \circ \end{cases}$$

۲. [از (۱۳) استفاده کنید.]

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{۱ - \cos \pi w}{w} \sin xw \, dw = \begin{cases} \pi/۲ & \circ < x < \pi \\ \circ & x > \pi \end{cases}$$

۳. [از (۱۱) استفاده کنید.]

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos xw}{۱ + w^{۲}} dw = \frac{\pi}{۲} e^{-x} \quad (x > \circ)$$

۴. [از(۱۱) استفاده کنید.]

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin w \cos xw}{w} dw = \begin{cases} \pi/۲ & \circ \leqslant x < ۱ \\ \pi/۴ & x = ۱ \\ \circ & x > ۱ \end{cases}$$

۵. [از (۱۱) استفاده کنید.]

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos(\pi w/۲) \cos xw}{۱ - w^{۲}} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{۲} \cos x & |x| < \frac{\pi}{۲} \\ \circ & |x| > \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

۶. [از (۱۳) استفاده کنید.]

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{w^{۳} \sin xw}{w^{۴} + ۴} dw = \frac{\pi}{۲} e^{-x} \cos x \qquad x > \circ$$

۷. [از (۱۳) استفاده کنید.]

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin \pi w \sin xw}{۱ - w^{۲}} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{۲} \sin x & \circ \leqslant x \leqslant \pi \\ \circ & x > \pi \end{cases}$$

توابع $f(x)$ زیر را به صورت (۱۱) نمایش دهید.

۸. $f(x)=\begin{cases} ۱ & ۰<x<a \\ ۰ & x>a \end{cases}$ ۹. $f(x)=\begin{cases} x & ۰<x<a \\ ۰ & x>a \end{cases}$

۱۰. [ر.ک. (۱۴)] $f(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$ ۱۱. $f(x)=e^{-x}+e^{-۲x}\quad (x>۰)$

۱۲. $f(x)=\begin{cases} x & ۰<x<۱ \\ ۲-x & ۱<x<۲ \\ ۰ & x>۲ \end{cases}$ ۱۳. $f(x)=\begin{cases} x^۲ & ۰<x<a \\ ۰ & x>a \end{cases}$

۱۴. نشان دهید که $f(x)=۱\ (۰<x<\infty)$ را نمی‌توان به صورت انتگرال فوریه نمایش داد.

هرگاه $f(x)$ دارای نمایشی به صورت (۱۱) باشد، نشان دهید که

۱۵. $$f(ax)=\frac{۱}{\pi a}\int_۰^\infty A\left(\frac{w}{a}\right)\cos xw\,dw \qquad (a>۰)$$

۱۶. $$x^۲f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty A^*(w)\cos xw\,dw, \qquad A^*=-\frac{d^۲A}{dw^۲}$$

۱۷. با به‌کار بردن فرمول مسئلهٔ ۱۶ در نتیجهٔ مسئلهٔ ۸، مسئلهٔ ۱۳ را حل کنید.

۱۸. ثابت کنید که $xf(x)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty B^*(w)\sin xw\,dw$ که در آن $B^*=-\frac{dA}{dw}$ و A از فرمول (۱۰) به دست می‌آید.

۱۹. درستی فرمول مسئلهٔ ۱۸ را در مورد تابع $f(x)=۱$ وقتی‌که $۰<x<a$ و $f(x)=۰$ وقتی که $x>a$ تحقیق کنید.

۲۰. **(صورت مختلط انتگرال فوریه، تبدیل فوریه)** با استعمال (۶) از ضمیمهٔ ۳، نشان دهید که (۵) را می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx-wv)\,dv\right]dw. \qquad (۱۶)$$

ثابت کنید که انتگرال از $-\infty$ تا ∞ در (۱۶) تابع زوجی از w است و (۱۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wx-wv)\,dv\right]dw.$$

نشان دهید که

$$\frac{i}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(wx-wv)\,dv\right]dw=۰, \qquad (۱۷)$$

به طوری که با جمع کردن (۱۷) و نتیجهٔ قبل از آن می‌یابیم

$$f(x)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,e^{iw(x-v)}\,dv\right]dw. \qquad (۱۸)$$

این موسوم به شکل مختلط انتگرال فوریه است. نشان دهید کـه (۱۸) را می‌توان چنین نوشت:

$$C(w)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,e^{-iwv}\,dv \qquad (۱۹)$$ که در آن

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C(w)\,e^{iwx}\,dw$$

$f(x)$ را تبدیل فوریهٔ $C(w)$ و $C(w)$ را تبدیل فوریهٔ معکوس $f(x)$ می‌نامند. (جدولهای بیشتری از تبدیلات فوریه درضمیمهٔ [B۷] یافت می‌شوند؛ ر.ك. ضمیمهٔ ۱).

۱۱

معادلات با مشتق جزئی

معادلات با مشتق جزئی در ارتباط با مسائل گوناگون هندسی و فیزیکی که شامل توابعی هستند که این توابع به دو یا چند متغیر مستقل بستگی دارند مطرح می‌شوند. این متغیرها می‌توانند زمان و یك یا چند مختصهٔ فضایی باشند. فصل یازده به برخی ازمهمترین معادلات با مشتق جزئی که در کاربردهای مهندسی پیش می‌آیند اختصاص داده شده است. این معادلات را از اصول فیزیکی به‌دست می‌آوریم و سپس روشهای حل مسائل با مقدار اولیه و کرانه‌ای ، یعنی روشهای به دست آوردن جواب این معادلات متناظر با مسئلهٔ فیزیکی داده شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در بخش ۱.۱۱ مفهوم جواب معادله با مشتق جزئی را بیان می‌کنیم. بخشهای ۲.۱۱ تا ۴.۱۱ به معادلهٔ موج یك بعدی ، که حرکت یك نخ مرتعش را بیان می‌کند ، اختصاص دارد. معادلهٔ گرما در بخشهای ۵.۱۱ ، ۶.۱۱ ، معادلهٔ موج دوبعدی (غشاهای مرتعش) در بخشهای ۷.۱۱ تا ۱۰.۱۱ و معادلهٔ لاپلاس در بخشهای ۱۱.۱۱ و ۱۲.۱۱ بررسی می‌شوند.

دربخش ۱۳.۱۱ خواهیم دیدکه معادلات با مشتق جزئی را به‌کمك تبدیل لاپلاس ، که در فصل ۴ معرفی شده است ، می‌توان حل کرد.

پیشنیاز این فصل : معادلات دیفرانسیل خطی معمولی (فصل ۲) وسری فوریه (فصل ۱۰).

بخشهایی که در دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است : ۶.۱۱ ، ۹.۱۱ ، ۱۰.۱۱

مراجع : ضمیمهٔ ۱ ، قسمت E.

جواب مسائل : ضمیمهٔ ۲

۱۱.۱ مفاهیم اساسی

معادله‌ای را که شامل یك یا چند مشتق جزئی یك تابع (مجهول) از دو یا چند متغیر مستقل است **معادله با مشتق جزئی** می‌نامند. مرتبهٔ بالاترین مشتق **مرتبهٔ** معادله نامیده می‌شود.

درست مانند معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، یك معادله با مشتق جزئی را **خطی** گوییم هر گاه نسبت به متغیر وابسته و مشتقات جزئی آن از درجهٔ اول باشد. اگر هرجملهٔ چنین معادله‌ای شامل متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن باشد، معادله را **همگن** می‌نامیم؛ در غیر این صورت معادله **غیر همگن** نامیده می‌شود.

مثال ۱. معادلات با مشتق جزئی خطی مهم مرتبهٔ دوم

معادلهٔ موج یك بعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{۱}$$

معادلهٔ گرمای یك بعدی
$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{۲}$$

معادلهٔ لاپلاس دو بعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{۳}$$

معادلهٔ پواسن دو بعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,\ y) \tag{۴}$$

معادلهٔ لاپلاس سه بعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{۵}$$

در این معادلات c ثابت، t زمان، و x، y، z مختصات دکارتی هستند. معادلهٔ (۴) (به‌ازای $f\not\equiv 0$) غیر همگن است، و حال آنکه سایر معادلات همگن هستند.

جوابی از معادله‌ای با مشتق جزئی درناحیه‌ای مانند R از فضای متغیرهای مستقل تابعی است که درناحیه‌ای شامل R همهٔ مشتقات جزئی موجود در معادله را دارد، و درهمه جای R در معادله صدق می‌کند. (اغلب اوقات نیاز داریم که تابع مورد نظر بر مرز R پیوسته باشد و در داخل R دارای همان مشتقات جزئی در داخل R بوده و در داخل R در معادله صدق کند.)

به طور کلی، تعداد جوابهای یك معادله با مشتق جزئی بسیار زیاد است. مثلاً، توابع

$$u=x^2-y^2,\qquad u=e^x\cos y,\qquad u=\ln(x^2+y^2) \tag{۶}$$

که به کلی با هم فرق دارند، همه جوابهای (۳) هستند، درستی این مطلب را دانشجو می‌تواند تحقیق کند. بعداً خواهیم دید که جواب یکتای معادله با مشتق جزئی متناظر با

یك مسئلهٔ فیزیکی مفروض با استفاده ازاطلاعات اضافی حاصل از مطالب فیزیکی به‌دست می‌آید. مثلا، در برخی موارد مقادیر جواب مورد نظر برای مسئله در کرانهٔ ناحیه‌ای داده می‌شود («شرایط کرانه‌ای»)؛ در سایرموارد وقتی که زمان t یکی از متغیرها است، مقادیر جواب در $t=0$ داده شده‌اند (« **شرایط اولیه** »).

می‌دانیم که هرگاه یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی خطی و همگن باشد، آنگاه از ترکیب جوابهای معلوم معادله می‌توان جوابهای بیشتری برای آن به دست آورد. در مورد معادله با مشتق جزئی خطی همگن نیز چنین است. در واقع قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیهٔ بنیادی ۱

(معادلات با مشتق جزئی همگن خطی)

هرگاه u_1 و u_2 جوابهایی از یك معادله با مشتق جزئی همگن خطی درناحیهٔ معینی باشند، آنگاه

$$u=c_1u_1+c_2u_2,$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند، نیز جوابی از معادله در آن ناحیه است.

اثبات این قضیهٔ مهم کاملا شبیه قضیهٔ ۱، بخش ۱.۲، است و به‌خواننده واگذار می‌شود.

مسائل بخش ۱۱.۱

تحقیق کنید توابع زیربه‌ازای مقدار مناسبی از c جواب معادلهٔ موج (۱) هستند. شکلهای این توابع را به صورت رویه در فضا رسم کنید.

۱. $u=x^2+t^2$

۲. $u=x^2+9t^2$

۳. $u=\cos t\sin x$

۴. $u=\sin t\sin x$

۵. $u=\cos ct\sin x$

۶. $u=\sin \omega ct\sin \omega x$

تحقیق کنید که توابع زیر (به‌ازای v و w دوباره مشتق‌پذیردلخواه) جوابهای (۱) هستند، در مسئلهٔ ۷، $c=1$.

۷. $u(x,t)=v(x+t)+w(x-t)$

۸. $u(x,t)=v(x+ct)+w(x-ct)$

تحقیق کنید که توابع زیر جوابهای معادلهٔ گرمای (۲) هستند.

۹. $u=e^{-t}\cos x$ ۱۰. $u=e^{-t}\sin x$

۱۱. $u=e^{-\omega^2 c^2 t}\sin \omega x$

تحقیق کنید که توابع زیر جوابهـای معادلهٔ لاپلاس (۳) هستند. شکل این جوابها را به صورت رویه در فضا رسم کنید.

۱۲. $u=x^2-y^2$ ۱۳. $u=x^3-3xy^2$ ۱۴. $u=3xy-y^3$

۱۵. $u=e^x\cos y$ ۱۶. $u=e^x\sin y$ ۱۷. $u=\ln(x^2+y^2)$

۱۸. $u=\arctan(y/x)$ ۱۹. $u=\sin x\sinh y$

۲۰. $u=\sin x\cosh y$

۲۱. تحقیق کنید کـه $u(x,\ y)=a\ln(x^2+y^2)+b$ در معـادلهٔ لاپلاس (۳) صدق می‌کند و a و b را طوری تعیین کنید کـه u در شرایط کرانه‌ای $u=0$ بـر دایرهٔ $x^2+y^2=1$ و $u=3$ بر دایرهٔ $x^2+y^2=4$ صدق کند. رویهٔ نمـایش داده شده با این تابع را رسم کنید.

۲۲. نشان دهید که $u=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ جوابی از (۵) است.

رابطه با معادلات دیفرانسیل معمولی

هر گاه یك معادله بـا مشتق جزئی تنها شامل مشتق نسبت به یکی از متغیرهای مستقل باشد، می‌توان آن را مانند معادلهٔ دیفرانسیل معمولی حل کرد، وسایر متغیرهای مستقل را به منزلهٔ پارامتر در نظر گرفت. معادلات زیر را حل کنید اگر $u=u(x,\ y)$.

۲۳. $u_x=0$ ۲۴. $u_y=0$ ۲۵. $u_{xx}=0$ ۲۶. $u_{xx}+u=0$

دستگاههای معادلات با مشتق جزئی زیر را حل کنید

۲۷. (الف) $u_{xx}=0$، (ب) $u_{yy}=0$ ۲۸. $u_x=0$، $u_y=0$

۲۹. $u_{xx}=0$، $u_{xy}=0$، $u_{yy}=0$ ۳۰. $u_{xx}=0$، $u_{xy}=0$

با قرار دادن $u_x=p$ معادلات زیر را حل کنید.

۳۱. $u_{xy}=u_x$ ۳۲. $u_{xy}+u_x=0$

۳۳. $u_{xy}+u_x+x+y+1=0$

۳۴. نشان دهید که هر گـاه منحنیهای تراز ثابت $=z$ رویهٔ $z=z(x,\ y)$ خطوط راست

موازی بـا محور xهـا باشد ، آنگاه z جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $z_x = 0$ است. مثال بیاورید.

۳۵. نشان دهید که جوابهای $z = z(x, y)$ معادلهٔ $yz_x - xz_y = 0$ رویه‌هـای دوار را نمـایش می‌دهند. مثـالهـایی ارائه دهید. راهنمایی : قرار دهید $x = \cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ و نشان دهید که معادله چنین می‌شود : $z_\theta = 0$.

۲.۱۱ مدل سازی : نخ مرتعش. معادلهٔ موج یك بعدی

به عنوان اولین معادله جزئی مهم ، معادلهٔ ارتعاشات عرضی کوچك نخی کشسان را کـه تا طول l کشیده شده و دو انتهای آن ثابت شده است به دست می‌آوریم. فرض می کنیم نخ از وضع تعادل خارج شده و سپس در لحظهٔ معینی مثلا $t = 0$ رها شده و به ارتعاش درآید. مسئلهٔ مشخص کردن ارتعاشـات نخ ، یعنی ، تعیین انحراف $u(x, t)$ آن در نقطهٔ دلخواه x و در زمـان دلخواه $t > 0$ است ؛ شکل ۲۳۰ را ببینید.

وقتی معـادلهٔ دیفرانسیل متناظر بـا یك مسئلهٔ فیزیکی مفروض را به دست آوریم ، معمولا باید فرضهای ساده کننده‌ای وارد مسئله کنیم تا معادلهٔ حاصل پیچیده نباشد. با این موضوع مهم در معادلات دیفرانسیل معمولی آشنا شدیم ، و درمورد معـادلات بـا مشتق جزئی نیز وضع به همین منوال است.

فعلا مفروضات زیر را در نظر می گیریم.

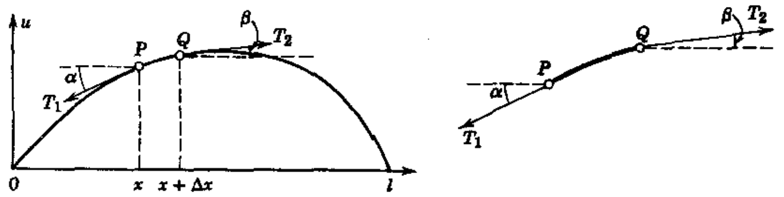
۱. جرم نخ برای واحد طول ثابت است («نخ همگن»). نخ کاملاکشسان‌است وهیچ‌گونه مقاومتی در مقابل خمش نشان نمی‌دهد.

۲. نیروی کششی که بر اثر کشیدن نخ قبل از ثـابت کردن دوسرآن ایجـاد می‌شود بسیار بزرگ بوده ونیروی جاذبه وارد بر نخ در مقابل آن قابل چشم پوشی است.

۳. حرکت نخ یك ارتعـاش کوچك عرضی در صفحه‌ای قائم است ، یعنی هر ذرهٔ نخ صرفاً به طورقائم حرکت می‌کند ، و قدر مطلق انحراف و شیب نخ در هرنقطه کوچك است.

با توجه به این مفروضات انتظار می‌رود که جواب $u(x, t)$ معـادلهٔ دیفرانسیل به دست آمده ارتعاشـات کوچك نخ «غیر ایده‌آل» فیزیکی با جرم همگن کوچك و تحت کشش بزرگ را به طور مستدلی توصیف کند.

برای به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل ، نیروهایی راکه بر بخش کوچکی از نخ وارد می‌شوند مورد بررسی قرارمی‌دهیم (شکل ۲۳۰). چون نخ مقاومتی درمقابل خمش از خود نشان نمی‌دهد ، درهرنقطه کشش بر منحنی نخ مماس خواهد بود. فرض می کنیم T_1 و T_2 کشش نخ درنقاط انتهایی P و Q بخش مورد مطالعهٔ نخ باشند. چون درجهت افقی حرکتی صورت نمی‌گیرد ، مؤلفه‌هـای افقی کشش باید صفر باشند. با استفاده از نماد به کار رفته در شکل ۲۳۰ به دست می‌آوریم



شکل ۲۳۰ نخ مرتعش

$$T_۱ \cos\alpha = T_۲ \cos\beta = T = \text{ثابت} \qquad (۱)$$

درجهت قائم دو نیروی $-T_۱ \sin\alpha$ و $T_۲ \sin\beta$ را داریم که به ترتیب مؤلفه‌های قائم $T_۱$ و $T_۲$ هستند؛ علامت منها دراینجا بدان علت است که مؤلفهٔ مربوط در P رو به پایین فرض شده است. بنابر قانون دوم نیوتن برآیند این دو نیرو برابر جرم $\rho\,\Delta x$ بخش مورد مطالعهٔ نخ در شتاب $\partial^۲ u/\partial t^۲$، که مقدار آن در نقطه‌ای بین x، $x+\Delta x$ محاسبه می‌شود، است؛ در اینجا ρ جرم واحد طول نخ قبل از انحراف است، و Δx طول تکهٔ نخ قبل از انحراف آن است. از این‌رو

$$T_۲ \sin\beta - T_۱ \sin\alpha = \rho\,\Delta x \frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}. \qquad (۱)$$

با استفاده از (۱) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{T_۲ \sin\beta}{T_۲ \cos\beta} - \frac{T_۱ \sin\alpha}{T_۱ \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\,\Delta x}{T}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}. \qquad (۲)$$

$\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ضریب زاویه‌های منحنی نخ در x و $x+\Delta x$ هستند، یعنی

$$\tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \qquad \text{و} \qquad \tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x$$

دراینجا به‌علت آنکه u به t نیز بستگی دارد مجبوریم مشتقها را بصورت مشتق جزئی بنویسیم. از تقسیم (۲) به Δx داریم

$$\frac{۱}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}.$$

چنانچه Δx به سمت صفر میل کند، معادله با مشتق جزئی همگن

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = c^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \qquad c^۲ = \frac{T}{\rho} \qquad (۳)$$

حاصل می‌شود. این معادله، که اصطلاحاً **معادلهٔ موج یك بعدی** نام دارد معادلهٔ حاکم

بر مسئلهٔ ما است. نماد $c^۲$ (به جای c) برای ثـابت فیزیکی T/ρ انتخاب شده است تا نشان دهد که این مقدار ثابت مثبت است.

جوابهای این معادله را در بخش زیر به دست خواهیم‌آورد.

۳.۱۱ جداسازی متغیرها (روش ضربی)

دیدیم که نوسانهای یك نخ کشسان در معادلهٔ موج یك بعدی

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}=c^۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}, \tag{۱}$$

که $u(x,t)$ انحراف نخ است، صدق می‌کند. نظر به اینکه نخ در نقاط انتهایی $x=۰$ و $x=l$ ثابت شده است ، به ازای هر t دو **شرط کرانه‌ای**

$$u(۰,\ t)=۰, \qquad u(l,\ t)=۰ \tag{۲}$$

را داریم. شکل حرکت نخ به انحراف اولیه (انحراف در لحظهٔ $t=۰$) و سرعت اولیه (سرعت در لحظهٔ $t=۰$) بستگی دارد. اگر انحراف اولیـه را بـا $f(x)$ و سرعت اولیه را با $g(x)$ نشان دهیم، دو **شرط اولیه** زیر را به دست می‌آوریم:

$$u(x,\ ۰)=f(x) \tag{۳}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=۰}=g(x) \tag{۴}$$

حال مسئلهٔ ما یـافتن جوابی از معـادلهٔ (۱) است که در شرایط (۲) الی (۴) صدق کند. برای یافتن چنین جوابی مرحله به مرحله به شرح زیر عمل می‌کنیم.

مرحلهٔ اول. با بکاربردن روش ضربی، یا روش جداکردن متغیرها، دومعادلهٔ‌دیفرانسیل معمولی به‌دست می‌آوریم.

مرحلهٔ دوم. جوابهایی ازاین معادلات راکه در شرایط کرانه‌ای صدق می‌کنند معین می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم. این جوابها را طوری با هم ترکیب می‌کنیم که عبارت حاصل جواب معادلهٔ موج (۱) بوده ، در شرایط اولیهٔ مفروض نیز صدق کند.

تفصیل این مراحل چنین است :

مرحلهٔ اول. روش ضربی جوابهایی از (۱) به صورت

$$u(x,\ t)=F(x)\,G(t) \tag{۵}$$

حاصل ضرب دو تابع که هریك تنهـا به یکی از متغیرهای x و t بستگی دارد را به‌دست

می‌دهد. چنانچه بعداً مشاهده خواهیم کرد این روش دارای کاربردهای گوناگونی در ریاضیات مهندسی است. با مشتق‌گیری از (۵) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''G \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=FG$$

که درآن نقطه‌ها مشتق نسبت به t و پریمها مشتق نسبت به x را نشان می‌دهند. با جانشانی اینها در (۱) داریم

$$FG=c^2 F''G$$

این رابطه را به $c^2 FG$ تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{G}{c^2 G}=\frac{F''}{F}.$$

عبارت طرف چپ شامل توابعی است که تنها به t بستگی دارند ، حال آنکه طرف راست شامل توابعی است که تنها به x وابسته‌اند. در نتیجه هر دو عبارت باید برابر مقدار ثابتی ، مثلا k ، باشند ، زیرا هرگاه عبارت طرف چپ ثابت نباشد ، آنگاه با تغییر t احتمالا مقدار این عبارت تغییر خواهد کرد در حالی‌که عبارت طرف راست مسلماً عوض نخواهد شد. همین طور ، هرگاه عبارت طرف راست ثابت نباشد ، با تغییر x احتمالا مقدار این عبارت عوض خواهد شد بدون آنکه عبارت طرف چپ تغییر کند. بنابراین

$$\frac{G}{c^2 G}=\frac{F''}{F}=k.$$

از این رابطه بلافاصله دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی

$$F''-kF=0 \tag{۶}$$

و

$$G-c^2 kG=0 \tag{۷}$$

حاصل می‌شود. تا اینجا در این معادلات k عددی دلخواه است.

مرحلهٔ اول. حال جوابهای F و G معادلات (۶) و (۷) راطوری معین می‌کنیم که $u=FG$ در (۲) صدق کند ، یعنی

$u(l,\ t)=F(l)\,G(t)=0$ و $u(0,\ t)=F(0)\,G(t)=0$ ، به‌ازای هر t .

واضح است هرگاه $G\equiv 0$ ، آنگاه $u\equiv 0$ ، که جواب جالبی نیست. بنابراین $G\not\equiv 0$ و

$$\text{(الف)}\ F(0)=0 \qquad \text{(ب)}\ F(l)=0 \tag{۸}$$

به‌ازای $k=0$ جواب عمومی (۶) عبارت است از $F=ax+b$ ، و از (۸) به دست

می‌آوریم $a=b=0$. از این‌رو $F\equiv 0$ ، که مورد نظر ما نیست زیرا در آن صورت $u\equiv 0$. به‌ازای مقدار مثبت $k=\mu^2$ جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$F=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x}$$

و از (۸) ، مانند قبل ، به دست می‌آوریم $F\equiv 0$. بنابراین تنها امکانی که باقی می‌ماند انتخاب kی منفی است ، مثلا ، $k=-p^2$. آنگاه (۶) به صورت

$$F''+p^2F=0$$

در می‌آید که دارای جواب عمومی

$$F(x)=A\cos px+B\sin px$$

است. ازاین جواب و (۸) داریم

$$F(0)=A=0 \qquad \text{و آنگاه} \qquad F(l)=B\sin pl=0.$$

باید فرض‌کنیم $B\neq 0$ زیرا در غیر این صورت $F\equiv 0$. بنابراین $\sin pl=0$ ، یعنی

$$Pl=n\pi \qquad \text{یا} \qquad P=\frac{n\pi}{l} \qquad (n \text{ عددی صحیح است}) \qquad (۹)$$

با قرار دادن $B=1$ ، تعداد نامتناهی جواب $F(x)=F_n(x)$ ،

$$F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n=1,2,\cdots, \qquad (۱۰)$$

که در(۸) صدق می‌کنند به‌دست می‌آوریم. [به‌ازای اعداد صحیح منفی n ضرورتاً، همان جواب‌را بااختلاف یك علامت‌منها به‌دست می‌آوریم، چراکه $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.]

حالا k به مقادیر $k=-p^2=-(n\pi/l)^2$ که از (۹) نتیجه می‌شوند ، محدود شده است. به‌ازای این kها معادلهٔ (۷) به صورت زیر در می‌آید :

$$\ddot{G}+\lambda_n^2G=0 \qquad \text{که در آن} \qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l}.$$

جواب عمومی عبارت است از

$$G_n(t)=B_n\cos\lambda_nt=B_n^*\sin\lambda_nt.$$

در نتیجه توابع $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)$ که به صورت

$$u_n(x,t)=(B_n\cos\lambda_nt+B_n^*\sin\lambda_nt)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (۱۱)$$

نوشته می‌شوند ، جوابهـای (۱) هستند ، و در شرایط کرانه‌ای (۲) هم صدق می‌کنند. این‌توابع را **توابع ویژه**، یا توابع مشخصه می‌نامند ، و مقادیر $\lambda_n=cn\pi/l$ **مقادیرویژه**

یـا مقادیر مشخصهٔ نخ مرتعش نـامیده می‌شونـد. مجموعهٔ $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots\}$ را طیف می‌نامند.

چنانچه مشاهده می‌کنیم هر u_n حرکت‌همسازی بافرکانس $\lambda_n/۲\pi = cn/۲l$ سیکل برواحد زمان را نمایش می‌دهد. این حرکت **مد نرمال** nام نخ نامیده می‌شود. مدنرمال اول $(n=۱)$ به مدبنیادی معروف است، وسایرمدهای نرمال مافوق‌تن نامیده‌می‌شوند؛ از نقطه نظر موسیقی حاصل آنها گام، گام به عـلاوهٔ یك پنجم و مانند آن است. چون در (۱۱) داریم

$$\sin\frac{n\pi x}{e}=۰ \quad \text{در} \quad x=\frac{l}{n},\ \frac{۲l}{n},\ \ldots,\ \frac{n-۱}{n}l،$$

مد نرمـال nام دارای $n-۱$ **گره** است، اینها نقاطی ازنخ هستندکه حرکت نمی‌کنند (شکل ۲۳۱).

شکل ۲۳۲ مد نرمال دوم را به ازای مقادیر مختلف t نشان می‌دهد. نخ درهرلحظه به‌شکل یك موج سینوسی است. وقتی قسمت چپ نخ به‌طرف پایین حرکت می‌کند قسمت راست آن به‌طرف بالا می‌رود و بالعکس. همچنین است برای سایرمدها.

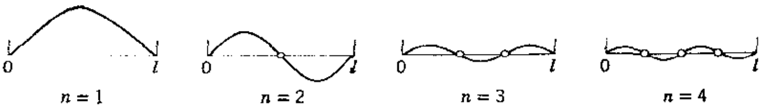
مرحلهٔ سوم. واضح استکـه درحالت‌کلی، یك جواب بخصوص $u_n(x, t)$ در شرایط اولیهٔ (۳) و(۴) صدق نخواهدکرد. اما، ازآنجاکه معادلهٔ (۱) خطی و همگن‌است، از قضیهٔ بنیادی ۱ بخش ۱۰۱۱ نتیجه می‌شودکه مجموع هر تعداد متناهی ازجوابهای B_n، جوابی برای معادلهٔ (۱) است. برای به‌دست آوردن جوابی‌کـه در (۳) و (۴) صدق‌کند به بررسی سری نامتناهی زیر می‌پردازیم:

$$(۱۲)\quad u(x, t)=\sum_{n=۱}^{\infty} u_n(x, t)=\sum_{n=۱}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

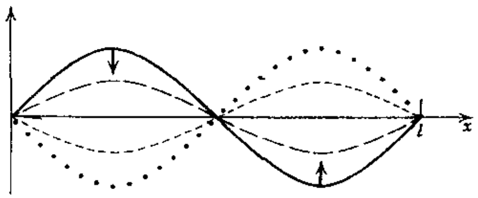
ازاینجا و از (۳) نتیجه می‌شودکه

$$(۱۳)\qquad u(x, ۰)=\sum_{n=۱}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)$$

بنابراین، برای آنکه (۱۲) در(۳) صدق‌کند، ضرایب B_n باید طوری انتخاب شوندکه



شکل ۲۳۱. مدهای نرمال نخ مرتعش



شکل ۲۳۲. مد نرمال دوم به ازای مقادیر مختلف t

$u(x,\circ)$ یك بسط نیم دامنه‌ای $f(x)$ ، یعنی سری سینوسی فوریهٔ $f(x)$ باشد ؛ یعنی [ر.ك (۴) بخش ۵.۱۰]

$$B_n = \frac{۲}{l}\int_\circ^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = ۱,\ ۲,\ \cdots \tag{۱۴}$$

به‌همین نحو ، با مشتق‌گیری از (۱۲) نسبت به t وبا استفاده از (۴) می‌یابیم

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=\circ} = \left[\sum_{n=۱}^{\infty}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t + B_n{}^*\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_{t=\circ}$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} B_n{}^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{l} = g(x).$$

پس ، برای اینکه (۱۲) در (۴) صدق کند ، ضرایب $B_n{}^*$ باید طوری انتخاب شوند که به‌ازای $t=\circ$ ، $\partial u/\partial t$ برابر سری سینوسی فوریهٔ $g(x)$ شود. بنابراین ، با توجه به (۴) بخش ۵.۱۰

$$B_n{}^*\lambda_n = \frac{۲}{l}\int_\circ^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

یا ، چون $\lambda_n = cn\pi/l$ ،

$$B_n{}^* = \frac{۲}{cn\pi}\int_\circ^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n = ۱,\ ۲,\ \cdots \tag{۱۵}$$

نتیجه می گیریم که $u(x,t)$، ارائه شده توسط (۱۲)، باضرایب (۱۴)و(۱۵) جوابی از (۱) است که درشرایط (۲) الی (۴) صدق می کند، مشروط براینکه سری (۱۲) همگرا باشد ، و همچنین سریهایی که با دوبار مشتق گیری (جمله‌به‌جمله) از(۱۲) حاصل می‌شوند همگـرا بوده ، مجموعشان به ترتیب برابر $\partial^۲u/\partial x^۲$ و $\partial^۲u/\partial t^۲$ کـه پیوسته هستند ، باشد.

شکل ۲۳۳. بسط دوره‌ای فرد $f(x)$

بنابراین جواب (۱۲) در وهلهٔ اول صرفاً یك عبارت صوری است، و ما هم‌اکنون می‌خواهیم به‌آن معنی بدهیم. برای سادگی فقط به بررسی حالتی می‌پردازیم که در آن سرعت اولیهٔ $g(x)$ متحد باصفر باشد. آنگاه B_n^* ها صفرند، و (۱۲) به‌صورت

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l} \tag{۱۶}$$

در می‌آید. امکان دارد این سری را جمع کنیم، یعنی، نتیجه را به‌یك صورت بسته یا متناهی بنویسیم. داریم [ر.ك. (۱۱) ضمیمهٔ ۳]

$$\cos\frac{cn\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\}+\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right\}\right].$$

در نتیجه (۱۶) را می‌توان به صورت

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right\}$$

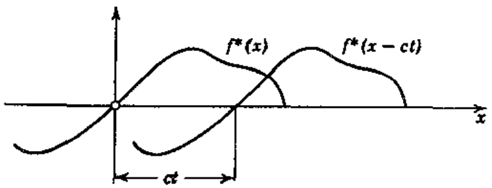
نوشت. این سریها بــه ترتیب از جانشانی $x-ct$ و $x+ct$ به جای متغیر x در سری سینوسی فوریهٔ (۱۳) به ازای $f(x)$ حاصل شده‌اند. بنابراین،

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)] \tag{۱۷}$$

که در آن f^* بسط دوره‌ای فرد f با دورهٔ $2l$ است (شکل ۲۳۳). چون انحراف اولیهٔ $f(x)$ روی فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant l$ پیوسته و در نقاط انتهایی صفر است، از (۱۷) نتیجه می‌شود که $u(x,\ t)$ به‌ازای هرمقداری ازمتغیرها تابعی‌پیوسته ازهر دومتغیر x و t است. با مشتق گیری از (۱۷) مشاهده می‌کنیم که $u(x,\ t)$ جوابی از (۱) است، مشروط براینکه $f(x)$ روی فاصلهٔ $0 < x < l$ دوبار مشتق‌پذیر باشد، در $x=0$ و $x=l$ مشتق دوم یك‌طرفهٔ صفر داشته باشد. تحت این شرایط $u(x,t)$ به‌عنوان جوابی از معادلهٔ (۱) که در شرایط (۲) الی (۴) صدق می‌کند تلقی می‌شود.

هرگاه $f'(x)$ و $f''(x)$ صرفاً تکه‌ای پیوسته باشند (ر.ك. بخش ۱.۵)، یا هرگاه مشتقات یك طــرفهٔ آنها صفر نباشند، آنگــاه به‌ازای هر t مقادیر متعدد و متناهی از x

موجود است به‌طوری که مشتقات دوم u در (۱) درآنها موجود نیست، جز در این نقاط



شکل ۲۳۴. انتگرال‌گیری از (۱۷)

معادلهٔ موج هنوز برقراراست، وبنابراین $u(x, t)$ را می‌توان ازیك دیدگاه عامترجوابی از مسئلهٔ مورد نظر تصور نمود. مثلا، حالت انحراف اولیهٔ مثلثی (مثال ۱، در ذیل) به جوابی ازاین نوع منجر می‌شود.

تعبیر فیزیکی جالبی از (۱۷) را متذکر می‌شویم. نمودار $f^*(x-ct)$ از انتقال نمودار $f^*(x)$ به‌اندازهٔ ct واحد به‌طرف راست حاصل می‌شود (شکل ۲۳۴). یعنی $f^*(x-ct)$ $(c>0)$ نمایش موجی است که باافزایش t به‌طرف راست حرکت می کند به همین نحو، $f^*(x+ct)$ نمایش موجی است که به طرف چپ حرکت می کند، و $u(x, t)$ ترکیب این دو موج است

مثال ۱

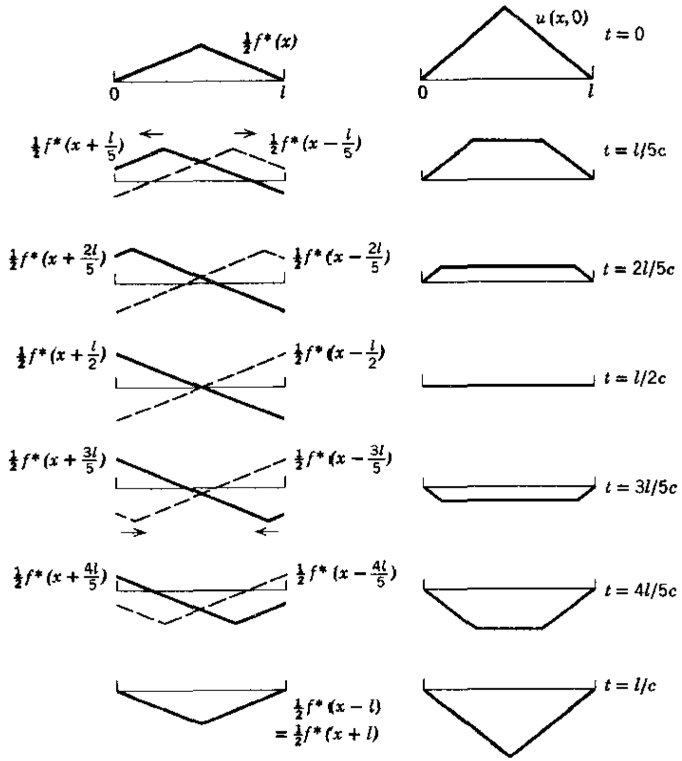
مطلوب است جواب متناظر با انحراف اولیهٔ مثلثی معادلهٔ موج (۱)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{l}x & 0<x<\frac{l}{2}\\[2ex] \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2}<x<l\end{cases}$$

و سرعت اولیهٔ صفر. نظر به‌اینکه $g(x)\equiv 0$، در (۱۲) داریم $B_n^*=0$، وبنا به مثال ۱ بخش ۵.۱۰ مشاهده می‌کنیم که B_n در (۵)، بخش ۵.۱۰ داده شده است. بنابراین (۱۲) به‌صورت

$$u(x,\ t)=\frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi c}{l}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3\pi c}{l}t+-\cdots\right]$$

درمی‌آید. برای رسم نمودار جواب می‌توان از $u(x, 0)=f(x)$ و تعبیردو تابع فوق درنمایش (۱۷) استفاده کرد. این به‌نمودار ترسیم شده درشکل ۲۳۵ منجر می‌شود.



شکل ۲۳۵. جواب $u(x, t)$ در مثال ۱ به‌ازای مقادیر مختلف t (قسمت راست تصویر) همان طور که از ترکیب موجی‌که به سمت راست (خطچین) و موجی‌که به‌چپ (قسمت چپ تصویر) حرکت می‌کند حاصل می‌شود.

مسائل بخش ۳.۱۱

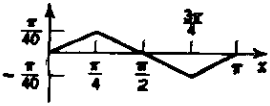
۱. فرکانس مد بنیادی نخ مرتعش به‌چه نحوی به‌طول نخ، کشش، و جرم نخ برواحد طول بستگی دارد؟

مطلوب است انحراف $u(x, t)$ی نخ مرتعش (به‌طول $l=\pi$، با انتهای ثابت، و $c^2 = T/\rho = 1$) متناظر با سرعت اولیهٔ صفر و انحراف اولیهٔ

۲. $0.01 \sin x$ ۳. $k \sin 2x$ ۴. $k(\sin x + \sin 3x)$

.۵

.۶



.۷

.۸ $0.01x(\pi - x)$.۹ $0.01x(\pi^2 - x^2)$

.۱۰ $k\left[\left(\frac{1}{2}\pi\right)^4 - \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^4\right]$

.۱۱ نسبت دامنه‌های نوسان مد بنیادی و مافوق‌تن دوم در مسئلهٔ ۸ چیست؟ نسبت $a_1^2/(a_1^2 + a_2^2 + \cdots)$؟ راهنمایی. از (۷) بخش ۸.۱۰ یا علامت تساوی استفاده کنید.

با جدا کردن متغیرها، جوابهای $u(x, y)$ معادلات زیر را بیابید.

.۱۲ $u_x + u_y = 0$ **.۱۳** $u_x = u_y$ **.۱۴** $u_x = yu_y$

.۱۵ $xu_x = yu_y$ **.۱۶** $ayu_x = bxu_y$

.۱۷ $u_x + u_y = 2(x+y)u$ **.۱۸** $u_{xy} = u$

.۱۹ $u_{xx} + u_{yy} = 0$ **.۲۰** $x^2u_{xy} + 3y^2u = 0$

.۲۱ نشان دهید که جانشانی

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (18)$$

در معادلهٔ موج (۱) معادلهٔ

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G = 0, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

را نتیجه می‌دهد.

.۲۲ (ارتعاشات واداشتهٔ نخی کشسان) نشان دهید که ارتعاشات واداشتهٔ نخی کشسان تحت تأثیر نیروی خارجی $P(x, t)$ بر واحد طول که به‌طور قائم بر نخ وارد می‌شود در معادلهٔ

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho}$$

صدق می‌کند.

معادلهٔ مسئلهٔ ۲۲ را برای نیروی سینوسی $P=A\rho \sin \omega t$ به‌شرح زیر بررسی وحل کنید.

۲۳. نشان دهید

$$\frac{P}{\rho}=A\sin \omega t=\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t)\sin \frac{n\pi x}{l}$$

که درآن $k_n(t)=(2A/n\pi)(1-\cos n\pi)\sin \omega t$ ؛ و در نتیجه (n زوج) $k_n=0$ ، و (n فرد) $k_n=(4A/n\pi)\sin \omega t$.

۲۴. نشان دهید که باجانشانی عبارات نظیر u از مسئلهٔ ۲۱ و P/ρ از مسئلهٔ ۲۳ درمعادلهٔ مورد نظر، به دست می‌آوریم

$$\ddot{G}_n+\lambda_n^2 G_n=\frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin \omega t\ , \qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l}\cdot$$

نشان دهید که هرگاه $\lambda_n^2 \neq \omega^2$ ، جواب عبارت است از

$$G_n(t)=B_n\cos \lambda_n t+B_n^*\sin \lambda_n t=\frac{2A(1-\cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2-\omega^2)}\sin \omega t\ \cdot$$

۲۵. B_n و B_n^* در مسئلهٔ ۲۴ راطوری تعیین کنید که u درشرایط اولیهٔ

$$u(x,0)=f(x)\quad ,\quad u_t(x,0)=0$$

صدق کند.

۴.۱۱ جواب دالامبر معادلهٔ موج

جالب است توجه کنیم که جواب (۱۷)، بخش ۳.۱۱، معادلهٔ موج

$$c^2=\frac{T}{\rho} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

را می‌توان با تبدیل (۱) به روشی مناسب بلافاصله به‌دست‌آورد، یعنی بامعرفی متغیرهای مستقل جدید [1]

$$v=x+ct\ , \qquad z=x-ct \qquad (2)$$

u تابعی از v و z خواهد شد، و با استفاده ازقاعدهٔ زنجیری بخش ۷.۸ مشتقهای موجود

---

۱. متذکر می‌شویم که نظریهٔ کلی معادلات بـا مشتقات جزئی روشی اصولی برای یـافتن این تبدیل که معادله را ساده‌تر می‌کند ارائه می‌دهد. ر.ك. مرجع [E14] در ضمیمهٔ ۱.

در (۱) را می‌توان برحسب مشتقهای نسبت به v و z بیان نمود. بسا نشان دادن مشتقهای جزئی بسا شاخص زیسر، از (۲) نتیجه می‌گیریم کسه ۱ = v_x و ۱ = z_x. برای سادگی $u(x, t)$، به‌عنوان تابعی از v و z را بسا همان حرف u نشان می‌دهیم. دراین صورت

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z \cdot$$

بسا به‌کار بردن قساعدهٔ زنجیری برای طرف راست و بسا استفاده از ۱ = v_x و ۱ = z_x می‌یسابیم

$$u_{xx} = (n_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v u_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

مشتق دیگر موجود در (۱) نیز به‌همین طریق تبدیل می‌شود، و نتیجه عبارت است از

$$u_{tt} = c^2 (u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}).$$

با جانشانی این دو نتیجه در (۱) به‌دست می‌آوریم

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial u \partial z} = 0 \qquad (۳)$$

واضح است که، روش اخیر دارای این حسن است که معادلهٔ حاصل، یعنی معادلهٔ (۳) را بادوبار انتگرال‌گیری متوالی به‌سادگی می‌توان حل کرد. درواقع باانتگرال‌گیری نسبت به z، می‌یابیم

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

که درآن $h(v)$ تابع دلخواهی از v است. باانتگرال‌گیری ازاین عبارت‌نسبت‌به v داریم

$$u = \int h(v)\, dv + \psi(z)$$

که $\psi(z)$ تسابع دلخواهی از z است. چون انتگرال تسابعی از v، مثلا $\phi(v)$ است، جواب u به‌صورت $u = \phi(v) + \psi(z)$ خواهد بود. بنابر (۲) می‌توان نوشت

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \qquad (۴)$$

این جواب به **جواب دالامبر**[1] معادلهٔ موج (۱) معروف است.

توابع ϕ و ψ را می‌توان بسا توجه به شرایط اولیه معین‌کرد. این موضوع را در حالتی‌کسه سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه مقدار مفروض $u(x, 0) = f(x)$ بساشد تشریح می‌کنیم.

---

۱. ژان لورن دالامبر (Jean le Rond d'Alembert)، ۱۷۱۷ ـ ۱۷۸۳، ریاضیدان فرانسوی، که به‌خاطر آثار مهمش درمکانیك شهرت دارد.

بامشتق گیری از (۴) داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\phi'(x+ct)-c\psi'(x-ct) \qquad (۵)$$

که درآن پریمها به‌ترتیب نشان دهندهٔ مشتق نسبت به‌کل عبارت $x+ct$ و $x-ct$ است.
از (۴) ، (۵) ، و شرایط اولیه داریم

$$u(x,\ 0)=\phi(x)+\psi(x)=f(x)$$
$$u_t(x,\ 0)=c\phi'(x)-c\psi'(x)=0$$

بنا به معادلهٔ آخر ، $\psi'=\phi'$. در نتیجه $\psi=\phi+k$ ، و بنا به این تساوی و معادلهٔ اول $2\phi+k=f$ یا $\phi=(f-k)/2$. بااین مقادیر ϕ و ψ جواب (۴) چنین می‌شود :

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)], \qquad (۶)$$

که با (۱۷) بخش ۳.۱۱ مطابقت دارد. دانشجو می‌تواند نشان دهدکه با توجه به‌شرایط کرانه‌ای (۲) آن بخش تابع f ؛ باید تابعی فرد با دورهٔ $2l$ باشد.
این نشان می‌دهدکه دوشرط اولیه و شرایط‌کرانه‌ای جواب را به‌طور یکتا مشخص می‌کنند.

مسائل بخش ۴.۱۱

۱. x و t را برحسب v و z بیان‌کنید ، ر.ك (۲) ، و از نتیجهٔ حاصل برای تبدیل (۳) به (۱) استفاده‌کنید.

با استفاده از (۶) نمودار (ازنوع شکل ۲۳۵ بخش ۳.۱۱) انحراف $u(x,\ t)$ نخ مرتعشی (به‌طول $l=1$ ، با نقاط انتهایی ثابت) باسرعت اولیهٔ صفر و انحراف اولیهٔ $f(x)$ ،که در زیر داده می‌شود ، را رسم‌کنید ، k کوچك است ، مثلا $k=0.01$.

۲. $f(x)=k\sin^2\pi x$ ۳. $f(x)=kx(1-x)$

۴. $f(x)=k(x-x^3)$ ۵. $f(x)=k(x^2-x^4)$

۶. $f(x)=k(x^3-x^5)$ ۷. $f(x)=k\sin^2\pi x$

با استفاده از تبدیلات داده شده ، معادلات زیر را حل‌کنید.

۸. $xu_{xy}=yu_{yy}+u_y \qquad (v=x,\ z=xy)$

۹. $u_{xy}-u_{yy}=0 \qquad (v=x,\ z=x+y)$

۱۰. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0 \quad (v=x,\ z=x-y)$

۱۱. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=0 \quad (v=x,\ z=x+y)$

۱۲. $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}=0 \quad (v=x+y,\ z=2x-y)$

۱۳. **(انواع معادلات با مشتق جزئی خطی)** معادله‌ای به‌صورت

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)$$

را **بیضی‌گون** نامندهرگاه $AC-B^2>0$، **سهمی‌گون** نامندهرگاه $AC-B^2=0$ و **هذلولی‌گون** نامنداگر $AC-B^2<0$. (دراینجا ممکن است A، B، C توابعی از x و y باشند، و ممکن است معادلهٔ (۷) درقسمتهای مختلف صفحهٔ xy از انواع مختلف باشد.) نشان دهید که

معادلهٔ لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ بیضی‌گون‌است،

معادلهٔ گرما $u_t=c^2u_{xx}$ سهمی‌گون است،

معادلهٔ موج $u_{tt}=c^2u_{xx}$ هذلولی‌گون است،

معادلهٔ تریکومی $yu_{xx}+u_{yy}=0$ از نوع آمیخته است (درنیم‌صفحهٔ فوقانی بیضی‌گون، روی محور x ها سهمی‌گون، و در نیم‌صفحهٔ تحتانی هذلولی‌گون است.)

۱۴. هرگاه (۷) هذلولی‌گون باشد، می‌توان آن را با قراردادن $v=\Phi(x,\ y)$، $z=\Psi(x,\ y)$، که در آن ثابت$=\Phi$ و ثابت$=\Psi$ جوابهای $y=y(x)$ معادلهٔ $Ay'^2-2By'+C=0$ هستند (ر.ك. مرجع [E ۱۴])، به صورت نرمال $u_{vz}=F^*(v,\ z,\ u,\ u_v،\ u_z)$ تبدیل کرد. نشان دهید که درمورد معادلهٔ موج (۱)

$$\Phi=x+ct\ , \qquad \Psi=x-ct.$$

۱۵. هرگاه (۷) سهمی‌گون باشد، جایگزین کردن $v=x$، $z=\Psi(x,\ y)$، با Ψ تعریف‌شده در مسئلهٔ ۱۴، آن را به‌صورت نرمال $u_{vv}=F^*(v,\ z,\ u,\ u_v,\ u_z)$ درمی‌آورد. درستی مطلب فوق را برای معادلهٔ مسئلهٔ ۱۰ تحقیق کنید.

۱۶. **(ارتعاشات میله)** می‌توان نشان داد که ارتعاشات قائم آزادکوچك يك میلهٔ یکنواخت در معادلهٔ مرتبهٔ چهار

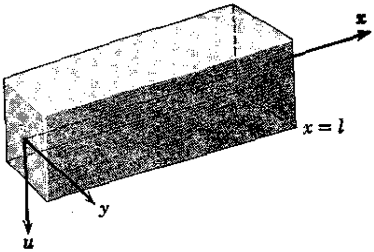
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad (8)$$

(مرجع [E ۱۵])، صدق می‌کند، که در آن $c^2=EI/\rho A$ ($E=$ مدول کشسانی یانگ، $I=$ گشتاور لختی مقطع نسبت به محور y ها، با توجه به‌شکل، $\rho=$ چگالی، $A=$ مساحت مقطع). با قراردادن $u=F(x)\,G(t)$ در (۸) و جداسازی متغیرها، نشان دهید که

$$F^{(4)}/F = -\ddot{G}/c^2G = \beta^4 = \text{ثابت}$$

$$F(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x.$$

$$G(t) = a\cos c\beta^2 t + b\sin c\beta^2 t\,.$$



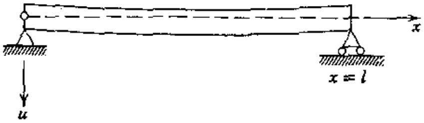
مسئلهٔ ۱۶. میلهٔ تغییرشکل نیافته

۱۷. جوابهای $u_n = F_n(x)\,G_n(t)$ معادلهٔ (۸) متناظر با سرعت اولیهٔ صفر را طوری بیابید که در شرایط کرانه‌ای زیر صدق کنند:

$u(0, t) = 0\,,\ u(l, t) = 0$ (دو انتهای میلهٔ در هرزمان t بدون حرکت هستند)

$u_{xx}(0, t) = 0\,,\ u_{xx}(l, t) = 0$

(گشتاورها صفرند، درنتیجه انحنا در دوانتهای میله صفر است)



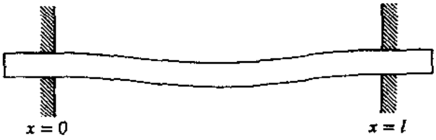
مسئلهٔ ۱۷

۱۸. جوابی از (۸) بیابید که درشرایط مسئلهٔ ۱۷ و شرایط اولیهٔ

$$u(x, 0) = f(x) = x(l - x)$$

صدق کند.

۱۹. هرگاه دوانتهای میله مقید شده باشند، شرایط مرزی چیست؟



مسئلهٔ ۱۹

۲۰. نشان دهید که $F(x)$ درمسئلهٔ ۱۶ درصورتی درشرایط مسئلهٔ ۱۹ صدق می‌کند که βl ریشهٔ معادلهٔ

$$\cosh \beta l \cos \beta l = ۱ \tag{۹}$$

باشد. جوابهای تقریبی (۹) را بیابید.

۵.۱۱ جریان گرمای یك‌بعدی

جریان گرما درجسمی که ازمادهٔ همگن تشکیل شده است ازمعادلهٔ گرمای (ر.ك. بخش ۹.۰۹)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^{۲} \nabla^{۲} u \qquad c^{۲} = \frac{K}{\sigma\rho}$$

پیروی می‌کند. دراین معادله $u(x, y, z, t)$ دمای درون جسم، K رسانایی گرمایی، σ گرمای ویژه، و ρ چگالی مادهٔ جسم است. $\nabla^{۲}u$ لاپلاسی u است، و در مختصات x، y، z عبارت است از

$$\nabla^{۲}u = \frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}}$$

به عنوان کاربردی مهم، دمای یك مفتول نازك دراز یا سیمی راکه با مقطع عرضی ثابت و مادهٔ همگن درطول محور x ها قرار دارد (شکل ۲۳۶) و سطح جانبی‌آن به‌طور کامل عایق پوش شده است، طوری که گرما فقط درجهت محور xها جریان می‌یابد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. دراین‌صورت u فقط به x و t بستگی دارد، و معادلهٔ گرما به شکل **معادلهٔ گرمای یك‌بعدی** در می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^{۲} \frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}. \tag{۱}$$

معادلهٔ (۱) را برای برخی شرایط کرانه‌ای و اولیهٔ مهم حل می‌کنیم. روش حل (۱) شبیه روش حل معادلهٔ موج است. رفتارجوابها دراینجاکاملا با رفتار جوابهای معادلهٔ‌موج متفاوت خواهد بود، زیرا معادلهٔ (۱) شامل u_t است و حال آنکه معادلهٔ موج به‌جای آن u_{tt} را دربر دارد. (از این‌رو دسته‌بندیی که درمسئلهٔ ۱۳ بخش قبل صورت گرفت صرفاً یك موضوع صوری نیست بلکه دارای نتایج بسیاری درمورد رفتارکلی جوابها است).

حالتی را درنظر می‌گیریم که دمای نقاط انتهایی $x = ۰$ و $x = l$ مفتول صفر باشد در این‌صورت شرایطکرانه‌ای عبارتند از

$$u(۰, t) = ۰, \quad u(l, t) = ۰ \quad \text{به ازای هر } t \tag{۲}$$

توجه‌کنید که این‌عبارت به‌همان شکل (۲) از بخش ۳.۱۱ است. فرض می‌کنیم دمای

اولیهٔ مفتول $f(x)$ باشد. آنگاه شرط اولیه عبارت است از

$$u(x, 0) = f(x) \tag{۳}$$

که در آن $f(x)$ تـابع مفروضی است. جواب $u(x, t)$ معادلهٔ (۱) را طوری معین می‌کنیم که در (۲) و (۳) صدق کند.

شکل ۲۳۶. مفتول مورد بررسی

مرحلهٔ اول. با به‌کاربردن روش تفکیک متغیرهـا نخست جوابهایی از (۱) را که درشرایط کرانه‌ای (۲) صدق می‌کنند تعیین می‌کنیم. جواب را به‌صورت

$$u(x, t) = F(x)G(t) \tag{۴}$$

درنظر می‌گیریم. این عبارت و مشتقات آن را در (۱) قرار داده، به دست می‌آوریم

$$F\dot{G} = c^2 F''G$$

که درآن نقطه مشتق نسبت به t و پریم مشتق نسبت به x را نشان می‌دهد. بـا تقسیم این معادله بر c^2FG، می‌یابیم

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} \tag{۵}$$

عبارت طرف چپ‌فقط بستگی به t دارد، حال‌آنکه عبارت سمت راست فقط تابعی از x است. همانند بخش ۳.۱۱، نتیجه می‌شود که طرفین تساوی (۵) باید برابر مقدار ثابتی، مثل k، باشند. خواننده می‌تواند نشان دهد که به‌ازای $k \geqslant 0$ تنها جواب $u = FG$ که در(۲)صدق می‌کندعبارت‌است‌از $u \equiv 0$. بنا بر(۵)به‌ازای مقدارمنفی $k = -p^2$ داریم

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2.$$

چنانچه مشاهده می‌کنیم از تساویهای فوق دو معادله دیفرانسیل معمولی خطی

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{۶}$$

و

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \tag{۷}$$

حاصل می‌شوند.

مرحلهٔ دوم. معادله (۶) را درنظر می‌گیریم. جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$F(x)=A\cos px+B\sin px. \qquad (۸)$$

از (۲) نتیجه می‌شود

$$u(l,\ t)=F(l)\,G(t)=0 \quad \text{و} \quad u(0,\ t)=F(0)\,G(t)=0$$

چون از $G\equiv 0$ نتیجه می‌شود $u\equiv 0$، بنابراین لازم است $F(0)=0\ ,\ F(l)=0$.
بنا بر (۸)، $F(0)=A$. درنتیجه $A=0$ ، و بنابراین

$$F(l)=B\sin pl$$

پس لازم است داشته باشیم $B\neq 0$ ، چون در غیر این صورت $F\equiv 0$. ازاین‌رو شرط $F(l)=0$ منجر به

$$\sin pl=0 \quad \text{یا} \quad p=\frac{n\pi}{l}\ ،\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

می‌شود. با جانشانی $B=1$ ، جوابهای زیر را که در (۲) نیز صدق می‌کنند برای (۶) به‌دست می‌آوریم:

$$F_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\ , \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

(مانند بخش ۳.۱۱ نیازی به بررسی مقادیر صحیح منفی n نداریم.)

حال معادلهٔ دیفرانسیل (۷) را درنظر می‌گیریم. به‌ازای $p=n\pi/l$ این معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{G}+\lambda_n^2 G_n=0 \quad \text{که درآن} \quad \lambda_n=\frac{cn\pi}{l}$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$G_n(t)=B_n e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

که B_n عددی ثابت است. پس توابع

$$u_n(x,\ t)=F_n(x)\,G_n(t)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\,e^{-\lambda_n^2 t} \quad n=1,\ 2,\ \cdots. \qquad (۹)$$

جوابهای معادلهٔ گرمای (۱) هستند که در (۲) نیز صدق می‌کنند.

مرحلهٔ سوم. برای به‌دست آوردن جوابی که در (۳) نیز صادق باشد، به‌بررسی سری

$$(۱۰)\quad u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad \left(\lambda_n=\frac{cn\pi}{l}\right)$$

می‌پردازیم. از اینجا و (۳)

$$u(x, 0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}=f(x).$$

بنابراین، برای آنکه (۱۰) در (۳) صدق کند، ضرایب B_n باید طوری انتخاب شوند که $u(x, 0)$ یك بسط نیم‌دامنه‌ای از $f(x)$، یعنی سری سینوسی فوریهٔ $f(x)$ باشد؛ یعنی [ر. ك. (۴) بخش ۵.۱۰]،

$$(۱۱)\qquad B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n=1, 2, \cdots$$

جواب فوق درصورتی‌که $f(x)$ روی فـاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant l$ تکه‌ای پیوسته (ر. ك. بخش ۱.۵)، و دارای مشتق یك طرفه[1] در هرنقطهٔ داخلی این فاصله باشد، برقرار است؛ یعنی، تحت این مفروضات سری (۱۰) بـا ضرایب (۱۱) جواب مسئلهٔ فیزیکی مورد نظر است. اثبات این مطلب که مستلزم دانستن همگرایی یکنواخت سریها است، بعداً درفرصت مناسب بیان خواهد شد (مسائل ۱۹، ۲۰ انتهای بخش ۱۶.۶).

به‌علت وجود عامل نمایی، وقتی‌که t به‌سمت بینهایت میل کند تمام جملات (۱۱) به‌سمت صفر میل می‌کنند. میزان تلاشی با n تغییر می‌کند.

مثال ۱

هر گاه دمای اولیه برابر

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<l/2 \\ l-x & l/2<x<l \end{cases}$$

باشد (ر. ك. شکل ۲۳۷ که در آن $l=\pi$ و $c=1$)، آنگاه از (۱۱) به‌دست می‌آوریم

$$(۱۲)\qquad B_n=\frac{2}{l}\left(\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right)$$

با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود که به‌ازای مقادیر زوج n، $B_n=0$ و

$$B_n=\frac{4l}{n^2\pi^2} \qquad (n=1, 5, 9, \cdots),$$

---

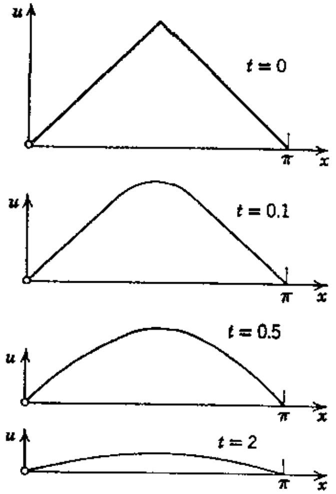
۱. ر. ك. پانوشت ۴ بخش ۲.۱۰.

$$B_n = -\frac{4l}{n^2\pi^2} \qquad (n=3,\ 7,\ 11,\ \cdots).$$

درنتیجه جواب عبارت است از

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{l}e^{-(c\pi/l)^2 t}-\frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}e^{-(3c\pi/l)^2 t}+\cdots\right].$$

خواننده می‌تواند شکل ۲۳۷ را باشکل ۲۳۵ از بخش ۳.۱۱ مقایسه کند.



شکل ۲۳۷ ـ جواب مثال ۱ به‌ازای مقادیر مختلف t

مسائل بخش ۵.۱۱

۱. شکلهای ۲۳۵ و ۲۳۷ رامقایسه کنید وتفاوت رفتارجوابهای دومعادله را توصیف کنید.

۲. چگونگی بستگی میزان تلاشی (۹) به گرمای‌ویژه، چگالی، و رسانایی گرمایی را، به‌ازای n ثابت، مشخص کنید.

۳. نمودار u_1 ، u_2 ، u_3 [ر.ك. (۹)، با $B_n=1$ ، $c=1$ ، $l=\pi$] را به‌عنوان توابعی از x به‌ازای مقادیر $t=0,\ 1,\ 2,\ 3$ رسم کنید. رفتار این توابع را مقایسه کنید.

۴. نمودار جوابهای مسئلهٔ ۳ را به‌صورت رویه‌هایی برصفحهٔ xt نمایش دهید.

۵. دوانتهای میله‌ای، که درمفروضات متن کتاب صدق می‌کند، در دماهای ثابت و متفاوت $u(0,\ t)=U_1$ و $u(l, t)=U_2$ قرار گرفته است. دمای $u_I(x)$ میله را بعد ازطی یك مدت طولانی پیداکنید (به‌طور نظری: $t\to\infty$).

مطلوب است دمای $u(x,\ t)$ میله‌ای نقره‌ای (به طول ۱۰ cm ، مقطع ثابت ۱ cm² ، چگالی ۱۰٫۶ gm/cm³ ، رسانایی گرمایی ۱٫۰۴ cal/cm deg sec ، گرمای ویژهٔ ۰٫۰۵۶ cal/gm deg) که سطح جانبیش به‌طور کامل عایق‌پوش شده است ، نقاط انتهایی آن در دمای ثابت °۰ سانتیگراد قرار گرفته و دمای اولیهٔ (برحسب درجهٔ سانتیگراد) $f(x)$ است ، که

۶. $f(x)=\sin ۰٫۲\pi x$ **۷.** $f(x)=\sin ۰٫۱\pi x$

۸.
$$f(x)=\begin{cases} x & ۰<x<۵ \\ ۰ & ۵<x<۱۰ \end{cases}$$

۹.
$$f(x)=\begin{cases} x & ۰<x<۵ \\ ۱۰-x & ۵<x<۱۰ \end{cases}$$

۱۰. $f(x)=x\,(۱۰۰-x^{۲})$

۱۱. $f(x)=x(۱۰-x)$

۱۲. مطلوب است دمای $u(x,\ t)$ میله‌ای به‌طول l که به طور کامل عایق‌پوش شده است ، حتی درنقاط انتهایی $x=۰$ و $x=l$ ، با این فرض که $u(x,\ ۰)=f(x)$. اطلاع فیزیکی شار گرمایی که از مقاطع انتهایی می گذرد با مقادیر $\partial u/\partial x$ در همانجا متناسب است. نشان دهید که این متناظر است با

$$u_x(۰,\ t)=۰\ , \qquad u_x(l,\ t)=۰\ , \qquad u(x,\ ۰)=f(x).$$

ثابت کنید که روش تفکیك متغیرها جواب

$$u(x,\ t)=A_۰+\sum_{n=۱}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{l}\,e^{-(cn\pi/l)^{۲}t}$$

حاصل می‌شود ، که در آن ، بنا به (۲) بخش ۵.۱۰

$$A_۰=\frac{۱}{l}\int_۰^l f(x)\,dx\ , \qquad A_n=\frac{۲}{l}\int_۰^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\ ,$$

$$n=۱,\ ۲,\ \cdots$$

۱۳. در مسئلهٔ ۱۲ وقتی که $t\to\infty$ ، $u\to A_۰$. آیا این با مشهودات فیزیکی شما مطابقت دارد؟

مطلوب است دمای میلهٔ توصیف شده درمسئلهٔ ۱۲ ، درصورتی که $l=\pi$ ، $c=۱$ و

۱۴. $f(x)=۱$ ۱۵. $f(x)=x^{۲}$

۱۶. $f(x)=\sin x$

۱۷. $$f(x)=\begin{cases} x & \circ<x<\pi/۲ \\ \circ & \pi/۲<x<\pi \end{cases}$$

۱۸. $$f(x)=\begin{cases} ۱ & \circ<x<\pi/۲ \\ \circ & \pi/۲<x<\pi \end{cases}$$

۱۹. در مسئلهٔ ۵، فرض می‌کنیم که دمای اولیه برابر $u(x,\circ)=f(x)$ باشد. نشان‌دهید که دما در هرلحظهٔ دلخواه $t>\circ$ عبارت است از

$$u(x,\ t)=u_I(x)+u_{II}(x,\ t)$$

که u_I مانند قبل تعریف می‌شود و

$$u_{II}=\sum_{n=۱}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-(cn\pi/l)^{۲}t}$$

در این رابطه

$$B_n=\frac{۲}{l}\int_{\circ}^{l}[f(x)-u_I(x)]\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{۲}{l}\int_{\circ}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{۲}{n\pi}[(-۱)^n U_۲-U_۱].$$

۲۰. میلهٔ توصیف شده درمسائل ۶ تا ۱۱ را درنظرمی گیریم. فرض می‌کنیم که دمای نقاط انتهایی آن برای زمانی طولانی برابر ۱۰۰°C باشد. آنگاه درلحظهٔ، مثلا در $t=\circ$، دما در $x=l$ به طور ناگهانی به ۰°C تغییر یابد، و همین مقدار بماند، ضمن آنکه دما در $x=\circ$ کماکان ۱۰۰°C باشد. دما در وسط میله درلحظات $t=۱,\ ۲,\ ۳,\ ۱۰,\ ۵۰$ ثانیه چقدر است؟

۶.۱۱ جریان گرما در میله‌ای نامتناهی

در این بخش می‌خواهیم جوابهای معادلهٔ گرمای

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} \qquad (۱)$$

را در مورد میله‌ای که ازهردوسوتا بینهایت ادامه دارد (و مانند قبل، سطح جانبی آن کاملا عایق‌پوش شده است) بررسی کنیم. در این حالت شرایط کرانه‌ای نخواهیم داشت بلکه تنها شرط اولیهٔ

$$u(x,0)=f(x) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{۲}$$

را داریم، که در آن $f(x)$ دمای اولیهٔ میله است.

برای حل این مسئله کار را مانند بخش قبل شروع می‌کنیم، یعنی در (۱) قرار می‌دهیم $u(x,\ t)=F(x)\,G(t)$. درنتیجه دومعادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیرحاصل‌می‌شود

$$F''+p^2F=0 \qquad \text{[ر.ك. (۶) بخش ۵.۱۱]} \tag{۳}$$

و

$$\dot{G}+c^2p^2G=0 \qquad \text{[ر.ك. (۷) بخش ۵.۱۱]} \tag{۴}$$

جواب معادلات فوق به‌ترتیب عبارتند از

$$F(x)=A\cos px+B\sin px \qquad \text{و} \qquad G(t)=e^{-c^2p^2t}؛$$

در اینجا A و B هرعدد ثابت دلخواهی می‌توانند باشند. پس یك جواب معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$u(x,\ t;\ p)=FG=(A\cos px+B\sin px)\,e^{-c^2p^2t}. \tag{۵}$$

[همانند بخش قبل، لازم است که ثابت k را منفی بگیریم، $k=-p^2$، زیرا مقادیر مثبت k منجر به حضور یك تابع نمایی صعودی در (۵) می‌گردد، که دارای معنی فیزیکی نیست.]

هرسریی ازتوابع (۵)، که به‌روش معمول بافرض اینکه p ها مضارب عددمشخص ثابتی باشند به‌دست آید، منتهی به تابعی می‌گردد که به‌ازای $t=0$ تابعی دوره‌ای از x است. در هرصورت، از آنجاکه در (۲) تابع $f(x)$ دوره‌ای فرض نشده است، طبیعی است که دراین حالت انتگرال فوریه را به‌جای سری فوریه به‌کار بریم.

نظربه اینکه در (۵)، A و B دلخواه هستند، می‌توان این مقادیررا به‌صورت‌تابعی از p درنظر گرفت و نوشت $A=A(p)$ و $B=B(p)$. چون معادلهٔ گرما خطی وهمگن است،آنگاه تابع

$$u(x,\ t)=\int_0^\infty u(x,\ t\ ;\ p)\,dp= \tag{۶}$$

$$\int_0^\infty [A(p)\cos px+B(p)\sin px]\,e^{-c^2p^2t}\,dp$$

جواب معادلهٔ (۱) است، مشروط بر اینکه این انتگرال وجود داشته باشد و بتوان از آن

دوبار نسبت به x و یك بار نسبت به t مشتق گرفت.

از نمایش (۶) و شرط اولیهٔ (۲) نتیجه می‌شود

$$u(x,\ 0)=\int_0^{\infty}[A(p)\cos px+B(p)\sin px]\,dp=f(x). \tag{۷}$$

بنابراین با استفاده از (۴) و (۵) بخش ۹.۱۰ به‌دست می‌آوریم

$$A(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos pv\,dv\ , \tag{۸}$$

$$B(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin pv\,dv\ .$$

بنابر (۱۶) مسئلهٔ ۲۰، بخش ۹.۱۰، این انتگرال فوریه را می‌توان نوشت

$$u(x,\ 0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(px-pv)\,dv\right]dp\,,$$

و بنابراین، (۶) همین بخش چنین می‌شود:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(px-qv)\,e^{-c^2p^2t}\,dv\right]dp\,,$$

با فرض اینکه می‌توان ترتیب انتگرالگیری را عوض کرد، به‌دست می‌آوریم

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_0^{\infty}e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)\ p\right]dv. \tag{۹}$$

انتگرال داخل کروشه را می‌توان با استفاده از فرمول

$$\int_0^{\infty}e^{-s^2}\cos 2bs\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2} \tag{۱۰}$$

که در بخش ۴.۱۷ (مسئلهٔ ۹) به‌دست خواهد آمد، محاسبه کرد. با واردکردن متغیر جدید انتگرالگیری p با قرار دادن $s=cp\sqrt{t}$ و انتخاب

$$b=\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}$$

(۱۰) چنین می‌شود:

$$\int_0^{\infty}e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)\,dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}}\,e^{-(x-v)^2/4c^2t}$$

با نشاندن این عبارت در (۹) نمایش

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}dv \qquad (11)$$

حاصل می‌شود. بالاخره متغیر انتگرالگیری $z=(v-x)/2c\sqrt{t}$ را معرفی می‌کنیم. بنابراین

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2cz\sqrt{t})e^{-z^2}\,dz \qquad (12)$$

هرگاه $f(x)$ به‌ازای همهٔ مقادیر x کراندار و در هرفاصلهٔ متناهی انتگرالپذیر باشد، می‌توان نشان داد (ر.ك. مرجع [D ۱]) که تابع (۱۱) یا (۱۲) در (۱) و (۲) صدق می کند. پس دراین مورد تابع فوق جواب مطلوب است.

مثال ۱. دما درمیله‌ای نامتناهی

مطلوب است دما در میله‌ای نامتناهی هرگاه دمای اولیه برابر

$$f(x)=\begin{cases} U_0=\text{ثابت} & |x|<1,\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

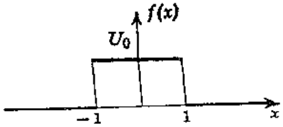
باشد (شکل ۲۳۸). بنابه (۱۱) داریم

$$u(x,t)=\frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1}\exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}dv\,.$$

هرگاه متغیر انتگرالگیری z راکه دربالا معرفی شد به‌کاربریم، آنگاه انتگرالگیری نسبت به v از ۱− تا ۱ متناظر می‌شود با انتگرالگیری نسبت به z از $(-1-x)/2c\sqrt{t}$ تا $(1-x)/2c\sqrt{t}$ و

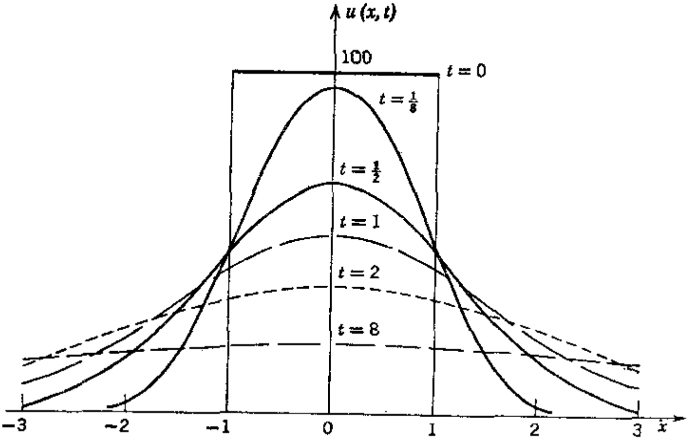
$$u(x,t)=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-(1+x)/2c\sqrt{t}}^{(1-x)/2c\sqrt{t}} e^{-z^2}dz \qquad (t>0). \qquad (13)$$

متذکر می‌شویم که این انتگرال، یك تابع مقدماتی نیست، اما می‌توان آن را به سادگی برحسب تابع خطا، که مقادیر آن در جدول آمده است بیان کرد. (جدول A5 ضمیمهٔ ۴ بعضی از این مقادیر را دربر دارد، جدولهای بزرگتر در مرجع [۱۱] ضمیمهٔ ۱ لیست



شکل ۲۳۸. دمای اولیه در مثال ۱

شده‌اند. مسائل۲ تا ۷ زیر را هم ببینید.) شکل ۲۳۹، $u(x, t)$ را به‌ازای $U_\circ = ۱۰۰°C$، $c^۲ = ۱\ cm^۲/sec$ ، و بعضی مقادیر t نشان می‌دهد.



شکل ۲۳۹. جواب $u(x, t)$ مثال ۱ به ازای $U_\circ = ۱۰۰°C$ ، $c^۲ = ۱\ cm^۲/sec$، و بعضی مقادیر t

مسائل بخش ۶.۱۱

۱. مطلوب است رسم نمودار دما درمثال ۱ (با $U_\circ = ۱۰۰°C$ و $c^۲ = ۱\ cm^۲/sec$) درنقاط $x = ۰٫۵$، $x = ۱$، و $x = ۱٫۵$ به‌صورت توابعی از t. آیا نتایج حاصل با شهود فیزیکی شما مطابقت دارد؟

تابع خطا . تابع خطا با انتگرال

$$\operatorname{erf} x = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_\circ^x e^{-w^۲}\, dw .$$

تعریف می‌شود. این تابع در ریاضیات مهندسی مهم است. برای آشنا شدن با این تابع دانشجو می‌تواند به حل مسائل زیر بپردازد. (چند فرمول در ضمیمهٔ ۳ گنجانیده شده‌اند، (۳۵) الی (۳۷) را ببینید. همچنین به مثال ۱ بخش ۱۵.۱۹ مراجعه کنید.)

۲. نشان دهید که $\operatorname{erf} x$ فرد است .

۳. نشان دهید که

$$\int_a^b e^{-w^۲}\, dw = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}(\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a) \quad ، \quad \int_{-b}^b e^{-w^۲} dw = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} b \ .$$

۴. با استفاده از جدول تابع نمائی، نمودار انتگران $\operatorname{erf} x$ را رسم کنید (این نمودار اصطلاحاً منحنی زنگی شکل نامیده می‌شود).

۵. با شمردن مربعهای زیر منحنی مربوط به مسئلهٔ ۴ یا به یک روش سادهٔ انتگرالگیری تقریبی دیگر جدول کوچکی برای $\operatorname{erf} x$ به ازای

$$x = ۰,\ ۰٫۲,\ ۰٫۴,\ \ldots,\ ۱٫۰,\ ۱٫۵,\ ۲٫۰$$

به‌دست آورید، و نتیجه را با مقادیر واقعی که تا دو رقم اعشار عبارت از

$$۰٫۰۰,\ ۰٫۲۲,\ ۰٫۴۳,\ ۰٫۶۰,\ ۰٫۷۴,\ ۰٫۸۴,\ ۰٫۹۷,\ ۱٫۰۰$$

هستند مقایسه کنید.

۶. سری مکلورن $\operatorname{erf} x$ را با انتگرالگیری جمله‌به‌جمله از سری مکلورن انتگرال‌آن به‌دست آورید.

۷. نشان دهید که (۱۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$u(x,\ t) = \frac{U_\circ}{۲}\left[\operatorname{erf}\frac{۱-x}{۲c\sqrt{t}} + \operatorname{erf}\frac{۱+x}{۲c\sqrt{t}}\right] \qquad (t > ۰)\,.$$

۸. هرگاه وقتی که $x > ۰$، $f(x) = ۱$ و وقتی که $x < ۰$، $f(x) = ۰$. نشان دهید که (۱۲) چنین می‌شود:

$$u(x,\ t) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/۲c\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^۲}\,dz \qquad (t > ۰)\,.$$

۹. می‌توان ثابت کرد که $\operatorname{erf}(\infty) = ۱$ با استفاده از این، نشان دهید که در مسئلهٔ ۸،

$$u(x,\ t) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\operatorname{erf}\left(x/۲c\sqrt{t}\,\right).$$

۱۰. هرگاه میله از یک طرف نامتناهی باشد، از ۰ تا ∞ ادامه داشته باشد، و دمای انتها $x = ۰$، ۰ و دمای اولیه $f(x)$ باشد، نشان دهید که دمای میله برابر است با

$$u(x,\ t) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-x/\tau}^{\infty} f(x+\tau w)e^{-w^۲}\,dw - \int_{x/\tau}^{\infty} f(-x+\tau w)e^{-w^۲}\,dw\right],$$

که در آن $\tau = ۲c\sqrt{t}$.

۱۱. با فرض آنکه $f(v)$ مذکور در (۱۱) فرد است، (۱۴) را از (۱۱) به‌دست آورید.

۱۲. هرگاه درمسئلهٔ ۱۰ ، $f(x)=1$ ، نشان دهید که

$$u(x,\ t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x/\tau} e^{-w^{2}}\,dw=\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) \qquad (t>0).$$

۱۳. هرگاه وقتی که $a<x<b$ ($a>0$)، $f(x)=1$ ودرغیراین‌صورت $f(x)=0$، (۱۴) به چه‌صورتی در می‌آید ؟

۱۴. نشان دهید که نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۲ را می‌توان با استفاده از $f(x)=1$ $(x>0)$ و $f(x)=-1$ $(x<0)$ از ۱۱ یا ۱۲ به‌دست آورد. به چه دلیلی؟

۱۵. نشان دهید که در مسئلهٔ ۱۲ زمان لازم برای آنکه هر دو نقطهٔ دلخواه به‌یك دما برسند متناسب با مربع فواصل آنها ازکرانهٔ $x=0$ است.

۷.۱۱ مدلسازی : غشای مرتعش. معادلهٔ موج‌دوبعدی

به‌عنوان مسئلهٔ مهم دیگری از مبحث ارتعاشات ، به بررسی حرکت یك غشای کشیده شده مانند پوستهٔ طبل ، می‌پردازیم. خواننده توجه دارد که‌بررسیهای فعلی ماشبیه است به‌آنچه درمورد نخ مرتعش در بخش ۲.۱۱ بررسی شد.

مفروضات زیر را درنظر می‌گیریم :

۱. جرم غشا برای واحد سطح ثابت است («غشای همگن»). غشا کاملا انعطاف‌پذیربوده و به‌قدری نازك است‌که هیچگونه مقاومتی درمقابل خمش از خود نشان نمی‌دهد.

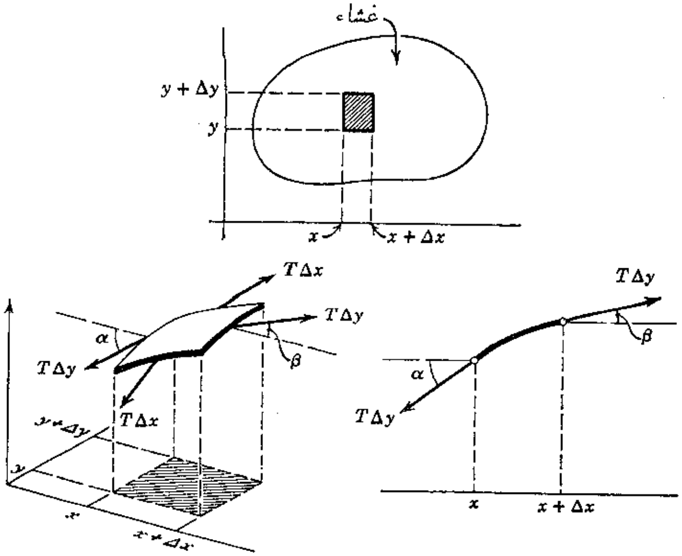
۲. غشای کشیده شده و سپس درسراسرکرانهٔ خود در صفحهٔ xy ثابت شده است. کشش بر واحد طول T که بر اثرکشیدن غشای ایجاد شده در همهٔ نقاط ودرتمام امتدادها یکی است و ضمن حرکت تغییر نمی‌کند.

۳. انحراف $u(x,\ y,\ t)$ غشا در اثنای حرکت نسبت به‌اندازهٔ غشا کوچك است ، و تمام زوایای میل کوچکند.

گرچه درعمل‌این مفروضات نمی‌توانند تحقق یابند ، ولی ارتعاشات کوچك عرضی یك غشای فیزیکی نازك به طور نسبتاً دقیقی دراین مفروضات صدق می‌کنند.

برای رسیدن بـه معادلهٔ دیفرانسیلی که حرکت غشا از آن پیروی می‌کند ، مطـابق شکل ۲۴۰ به‌بررسی نیروهـای وارد برتکهٔ کوچکی از غشا می‌پردازیم. چون انحرافهای غشا و زوایای میل‌کوچکند، کناره‌های تکهٔ مزبور به‌تقریب برابرΔx و Δy گرفته می‌شود. کشش T نیرو برواحد طول است. ازاین‌رو نیروهـای وارد برلبه‌های این تکه به‌ترتیب $T\,\Delta x$ و $T\,\Delta y$ هستند. نظر بـه اینکه غشا کامـلا انعطاف‌پذیر است ، این نیروهـا برغشا مماس هستند.

نخست به بررسی مؤلفه‌های افقی نیروها می‌پردازیم. این مؤلفه‌ها از ضرب نیروها



شکل ۲۴۰ . غشای مرتعش

درکسینوسهای زوایای میل به‌دست می‌آیند. چون این زوایا کوچك هستند، کسینوسهایشان نزدیك ۱ است. درنتیجه مؤلفه‌های افقی نیروها درلبه‌های مقابل تقریباً برابرند. بنابراین، حرکت ذرات غشا درامتداد افقی بسیار کوچك است. از اینجا نتیجه می گیریم که حرکت غشا را می‌توان عرضی در نظر گرفت، به این معنی فرض کرد هر ذره به طور قائم حرکت می‌کند.

مؤلفه‌های قائم نیروها درطول لبه‌های موازی باصفحهٔ yu عبارتند از[1] (شکل ۲۴۰)

$$T\,\Delta y \sin\beta\ , \qquad -T\,\Delta y\sin\alpha\ ;$$

دراینجا حضور علامت منها بدان علت است که جهت نیروی وارد برلبهٔ چپ به‌طرف پایین فرض شده است. چون زوایا کوچك هستند، می‌توان به جای سینوس آنها تانژانتشان را قرار داد. سپس برآیند دومؤلفهٔ قائم آنها عبارت است از

$$\begin{aligned} T\,\Delta y(\sin\beta-\sin\alpha) &\approx T\,\Delta y\,(\tan\beta-\tan\alpha) \\ &= T\,\Delta y\,[u_x(x+\Delta x, y_1)-u_x(x,\ y_2)] \end{aligned} \qquad (1)$$

---

۱. توجه‌کنید که زاویهٔ میل درطول لبه‌ها تغییرمی‌کند، و α و β مقادیرآن‌زاویه درنقطه‌ای مناسب از یالهای مورد نظر هستند.

که درآن شاخص زیر x ، مشتق جزئی را نشان می‌دهد و y_1 و y_2 مقادیری بین y و $y+\Delta y$ هستند. به‌همین نحو، برآیند مؤلفه‌های قائم نیروی وارد بر دولبهٔ دیگر این تکه عبارت است از

$$T\,\Delta x\,[u_y(x_1,\ y+\Delta y)-u_y(x_2,\ y)] \tag{۲}$$

که درآن x_1 و x_2 مقادیری بین x و $x+\Delta x$ هستند.

بنا به‌قانون دوم نیوتن (ر.ك. بخش ۶.۲)، مجموع نیروهای داده شده با (۱) و (۲) برابر $\rho\,\Delta A$ ، جرم تکهٔ مزبور، درشتاب $\partial^2 u/\partial t^2$ است؛ دراینجا ρ جرم غشای منحرف نشده بر واحد مساحت و $\Delta A=\Delta x\,\Delta y$ مساحت تکه است وقتی که تکه منحرف نشده باشد. بنابراین

$$\rho\,\Delta x\,\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\,\Delta y\,[u_y(x+\Delta x,\ y_1)-u_x(x,\ y_2)]$$
$$+T\,\Delta x\,[u_y(x_1,\ y+\Delta y)-u_y(x_2,y)]$$

که مشتق طرف چپ درنقطهٔ مناسبی مانند $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ متعلق به تکهٔ مزبور محاسبه می‌شود. از تقسیم طرفین تساوی فوق بر $\rho\,\Delta x\,\Delta y$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x,\ y_1)-u_x(x,\ y_2)}{\Delta x}+\frac{u_y(x_1,\ y+\Delta y)-u_y(x_2,\ y)}{\Delta y}\right].$$

هرگاه Δx و Δy به‌سمت صفر میل کنند، آنگاه معادله با مشتق جزئی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\qquad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{۳}$$

حاصل می‌شود. این معادله‌را **معادلهٔ موج دو بعدی** می‌نامند. عبارت داخل پرانتز لاپلاسی $\nabla^2 u$ تابع u است (ر.ك. بخش ۸.۸) و (۳) را می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u \tag{۳'}$$

۸.۱۱ غشای مستطیلی

برای حل مسئلهٔ غشای مرتعش، باید جوابی مانند $u(x,\ y,\ t)$ از معادلهٔ موج دوبعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{۱}$$

راکه درشرط کرانه‌ای

(۲) $u=0$ روی کرانهٔ غشا به‌ازای هر $t \geqslant 0$

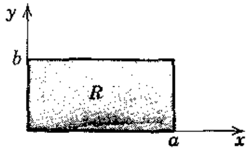
و دو شرط اولیهٔ

(۳) $u(x, y, 0)=f(x, y)$ [تغییر مکان اولیهٔ دادهٔ شدهٔ $f(x, y)$]

و

(۴) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x, y)$ [سرعت اولیهٔ داده شدهٔ $g(x, y)$] .

صدق می‌کند به‌دست آوریم. این شرایط کاملا شبیه شرایطی هستندکه درمورد نخ مرتعش داشتیم.



شکل ۲۴۱. غشای مستطیلی

غشای مستطیلی R را که در شکل ۲۴۱ نشان داده شده است به عنوان اولین مورد مهم بررسی می‌کنیم.

مرحلهٔ اول. با به‌کاربردن روش جداسازی نخست جوابهایی از (۱) راکه درشرط (۲) صدق می‌کنند تعیین می‌کنیم. بدین منظور فرض می‌کنیم

(۵) $$u(x, y, t)=F(x, y)G(t) .$$

با قرار دادن طرف دوم این تساوی در معادلهٔ موج (۱) داریم

$$F\ddot{G}=c^2(F_{xx}G+F_{yy}G)$$

که در آن شاخصهای زیر مشتقات جزئی و نقطه‌ها مشتق نسبت به t را نشان می‌دهند. با تقسیم طرفین بر c^2FG ، می‌یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}(F_{xx}+F_{yy}) .$$

چون توابع طرف چپ به t بستگی دارند درحالی‌که توابع طرف راست بستگی به t ندارند، باید طرفین تساوی فوق برابر با یك ثابت باشند. با کمی بررسی می‌توان نشان داد که تنها مقادیر منفی این ثابت منجر به جوابهایی می‌گردندکه بدون آنکه همواره صفر باشند در (۲) صدق می‌کنند؛ این کار همانند روشی است که در بخش ۳.۱۱ به کار گرفته

شد. اگر این مقدار ثابت را با $-\nu^{2}$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{\ddot{G}}{c^{2}G}=\frac{1}{F}(F_{xx}+F_{yy})=-\nu^{2}$$

از اینجا دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی زیر حاصل می‌شود

(۶) $\ddot{G}+\lambda^{2}G=0$ که در آن $\lambda=c\nu$،

و

(۷) $$F_{xx}+F_{yy}+\nu^{2}F=0\ .$$

حال (۷) را درنظر می گیریم و روش تفکیك متغیرها را یك بار دیگر به‌کار می بریم، یعنی ، جوابهایی به‌صورت

(۸) $$F(x,\ y)=H(x)\,Q\,(y)$$

برای (۷) تعیین می کنیم که مقادیرشان بر کرانهٔ غشا صفرباشند. با جانشینی (۸) در (۷) نتیجه می‌شود

$$\frac{d^{2}H}{dx^{2}}Q=-\left(H\frac{d^{2}Q}{dy^{2}}+\nu^{2}HQ\right).$$

از تقسیم طرفین این تساوی بر HQ می‌یابیم

$$\frac{1}{H}\ \frac{d^{2}H}{dx^{2}}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{d^{2}Q}{dy^{2}}+\nu^{2}Q\right).$$

توابع موجـود در طرف چپ فقط به x بستگی دارند و حال آنکه توابع طرف راست فقط به y بستگی دارند. پس طرفین تساوی فوق باید مساوی عددی ثابت باشد. این‌ثابت باید منفی ، مثلا $-k^{2}$ ، باشد زیرا تنها مقادیر منفی منجربه جوابهایی می‌شوند که در (۲) صدق می کنند. بدون آنکه همواره صفر باشند. بنابراین

$$\frac{1}{H}\ \frac{d^{2}H}{dx^{2}}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{d^{2}Q}{dy^{2}}+\nu^{2}Q\right)=-k^{2}$$

از این تساویها معادلات دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌شوند :

(۹) $$\frac{d^{2}H}{dx^{2}}+k^{2}H=0$$

و

(۱۰) $\frac{d^{2}Q}{dy^{2}}+p^{2}Q=0$ که در آن $p^{2}=\nu^{2}-k^{2}$

مرحلهٔ دوم. جوابهای عمومی (۹) و (۱۰) عبارتند از

$$Q(y)=C\cos py+D\sin py \quad \text{و} \quad H(x)=A\cos kx+B\sin kx$$

که A، B، C، و D ثابت هستند. از (۵) و (۲) نتیجه می‌شود که $F=HQ$ باید روی کرانه صفر باشد، که متناظر است با $x=0$، $x=a$، $y=0$، و $y=b$. شکل ۲۴۱ را ببینید. یعنی شرایط زیر نتیجه می‌شود:

$$H(0)=0, \qquad H(a)=0, \qquad Q(0)=0, \qquad Q(b)=0.$$

بنابراین $H(0)=A=0$، و در نتیجه

$$H(a)=B\sin ka=0.$$

باید فرض کنیم $B\neq 0$ چون درغیراین‌صورت $H\equiv 0$ و $F\equiv 0$. ازاین‌رو $\sin ka=0$ یا $ka=m\pi$، یعنی

$$k=\frac{m\pi}{a} \qquad (\text{عددی است صحیح } m)$$

درست به همین روش نتیجه می‌شود که $C=0$ و p باید محدود به مقادیر $p=n\pi/b$ باشد که n عددی صحیح‌است. بنابراین جوابهای زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a} \quad \text{و} \quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad m=1, 2, \cdots, \quad n=1, 2, \cdots$$

(مانند حالت نخ مرتعش، لازم نیست $m, n=-1, -2, \ldots$ را بررسی کنیم، چون جوابهای متناظر با این اعداد صرف‌نظر ازیك ضریب -1 الزاماً همان جوابهای مربوط به m و n مثبت هستند.) نتیجه می‌شود که توابع

$$F_{mn}(x, y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad m=1, 2, \cdots, \quad n=1, 2, \cdots. \tag{11}$$

جوابهایی از معادلهٔ (۷) هستند که روی کرانهٔ غشای مستطیلی صفرند.

نظر به اینکهٔ در (۱۰)، $p^2=\nu^2-k^2$ و در (۶)، $\lambda=c\nu$ داریم

$$\lambda=c\sqrt{k^2+p^2}$$

در نتیجه به‌ازای $k=m\pi/a$ و $p=n\pi/b$ مقدار

$$\lambda=\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} \qquad m=1, 2, \cdots, \quad n=1, 2, \cdots, \tag{12}$$

و جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$G_{mn}(t)=B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

نتیجه می‌گیریم توابع $u_{mn}(x,\ y,\ t)=F_{mn}(x,\ y)G_{mn}(t)$ ، که به‌صورت

$$(۱۳)\quad u_{mn}(x,\ y,\ t)=(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

نوشته می‌شوند با λ_{mn} ی که در (۱۲) تعریف‌شده است جوابهای معادلهٔ موج (۱) هستند که درشکل ۲۴۱ روی کرانهٔ غشای مستطیلی صفرنـد. این توابع را **توابع ویژه** یا توابع مشخصه می‌نامند، و اعـداد λ_{mn} **مقادیر ویژه** یـا مقادیر مشخصه غشای مرتعش نـامیده می‌شوند. فرکانس u_{mn} برابر است با $\lambda_{mn}/۲\pi$.

جالب است توجه‌کنیم کـه بسته به a و b ممکن است چندین تـابع F_{mn} دارای یك مقدار ویـژه مشترك بـاشند. از نقطه نظر فیزیکی این بـدان معنی است‌که امکان دارد ارتعاشاتی با فرکانس یکسان موجود باشند‌که **خطوط‌گرهی** (منحنیهای نقاطی از غشا که حرکت نمی‌کنند) آنها کامـلا متفاوت هستند. این مـوضوع را بـا ارائهٔ مثال زیر روشن می‌کنیم.

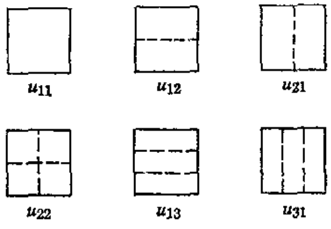
مثال ۱. غشای مربعی

غشای مربعی را که برای آن $a=b=۱$، درنظر می‌گیریم. با توجه‌به (۱۲) مشاهده می‌کنیم که مقادیر ویژه عبارتند از

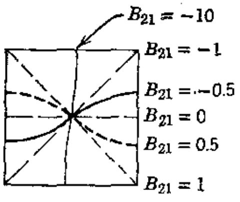
$$(۱۴)\qquad \lambda_{mn}=c\pi\sqrt{m^۲+n^۲}$$

در نتیجه

$$\lambda_{mn}=\lambda_{nm}$$



شکل ۲۴۲. خطوط‌گرهی جـوابهای $u_{۱۱}$، $u_{۱۲}$ ، $u_{۲۱}$ ، $u_{۲۲}$ ، $u_{۱۳}$ ، $u_{۳۱}$ در مـورد غشای مربعی



شکل ۲۴۳. خطوط گـرهی جواب (۱۵) به ازای بعضی مقادیر $B_{۲۱}$

ولی به‌ازای $m\neq n$ مطمئناً توابع متناظر

$$F_{mn}=\sin m\pi x\sin n\pi y \quad و \quad F_{nm}=\sin n\pi x\sin m\pi y$$

با هم متفاوت هستند. مثلا با $\lambda_{12}=\lambda_{21}=c\pi\sqrt{5}$ دو تابع

$$F_{21}=\sin 2\pi x \sin \pi y \quad \text{و} \quad F_{12}=\sin \pi x \sin 2\pi y$$

متناظر می‌شوند. در نتیجه جوابهای مربوطه

$$u_{12}=(B_{12}\cos c\pi\sqrt{5}t+B^*_{12}\sin c\pi\sqrt{5}t)F_{12}$$

و

$$u_{21}=(B_{21}\cos c\pi\sqrt{5}t+B^*_{21}\sin c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$

به ترتیب دارای خطوط گرهی $y=1/2$ و $x=1/2$ هستند (شکل ۲۴۲). با فرض $B_{12}=1$ و $B^*_{12}=B^*_{21}=0$ ، به‌دست می‌آوریم

$$u_{12}+u_{21}=\cos c\pi\sqrt{5}t\,(F_{12}+B_{21}F_{21})\,, \tag{۱۵}$$

که ارتعاش دیگری متناظر با مقدار ویژهٔ $c\pi\sqrt{5}$ را نمایش می‌دهد. خط گرهی این تابع جواب معادلهٔ

$$F_{12}+B_{21}F_{21}=\sin \pi x \sin 2\pi y+B_{21}\sin 2\pi x \sin \pi y=0$$

است، یا، نظر به اینکه $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\sin \pi x \sin \pi y(\cos \pi y+B_{21}\cos \pi x)=0 \tag{۱۶}$$

این جواب به‌مقدار B_{21} بستگی دارد (شکل ۲۴۳).

با توجه به (۱۴) مشاهده می‌کنیم که حتی بیشتر از دو تابع می‌توانند با یك مقدار عددی λ_{mn} متناظر شوند. مثلا، چهارتابع F_{18} ، F_{81} ، F_{47} ، F_{74} متناظرند با مقدار $\lambda_{18}=\lambda_{81}=\lambda_{47}=\lambda_{74}=c\pi\sqrt{65}$، زیرا

$$1^1+8^2=4^2+7^2=65$$

این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که ۶۵ را به روشهای گوناگون می‌توان به صورت مجموع مربعهای دو عدد طبیعی نوشت. طبق قضیه‌ای از گاوس، برای هر مجموعی از دو مربع که حداقل دو عامل اول آن به‌صورت $4n+1$ باشد چنین است، n عددی صحیح و مثبت است. در حالت اخیر

$$65=5\times 13=(4+1)(12+1)$$

مرحلهٔ سوم. برای به دست آوردن جوابی که در شرایط اولیهٔ (۳) و (۴) نیز صدق کند، به‌روشی مشابه بخش ۳.۱۱ عمل می‌کنیم. سری دوگانهٔ[1]

---

۱. مسائل همگرایی و یکتایی را بررسی نمی‌کنیم.

$$u(x, y, t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x, y, t)$$

(۱۷)

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

را درنظر می‌گیریم. از این سری و (۳) به‌دست می‌آوریم

(۱۸) $$u(x, y, 0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y).$$

این سری، **سری دوگانهٔ فوریه** نامیده می‌شود. فرض کنیم که $f(x, y)$ را بتوان به‌چنین سریی بسط داد.[۱] آنگاه ضرایب‌فوریهٔ B_{mn} تابع $f(x, y)$ در (۱۸) را می‌توان به‌شرح زیر تعیین کرد. با قرار دادن

(۱۹) $$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

(۱۸) را می‌توان به‌صورت

$$f(x, y)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

نوشت. این سری به‌ازای یك مقدار معین از y، به‌عنوان تابعی از x، سری سینوسی فوریه $f(x, y)$ است، و از (۴) بخش ۵.۱۰ نتیجه می‌شود که ضرایب این بسط عبارتند از

(۲۰) $$K_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x, y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

بعلاوه، (۱۹) برابراست باسری سینوسی فوریهٔ $K_m(y)$، و از (۴) بخش ۵.۱۰ ضرایب نتیجه می‌شوند

$$B_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy .$$

ازاین‌رو (۲۰) **فرمول اویلر تعمیم یافته**

---

۱. شرایط کافی: f، $\partial f/\partial x$، $\partial f/\partial y$، $\partial^2 f/\partial x\partial y$ باید در مستطیل R که مورد بررسی است پیوسته باشند.

$$(۲۱) \quad B_{mn}=\frac{۴}{ab}\int_{\circ}^{b}\int_{\circ}^{a} f(x,\ y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$m=۱,\ ۲,\ \cdots,$$

$$n=۱,\ ۲,\ \cdots,$$

برای ضرایب فوریه $f(x,\ y)$ که درسری فوریهٔ دوگانه (۱۸) تعریف شده‌اند حاصل می‌شود.

هم اکنون B_{mn} هایی‌که در (۱۷) ظاهر می‌شوند برحسب $f(x,\ y)$ معین شده‌اند. برای تعیین B^*_{mn}، از (۱۷) نسبت به t جمله‌به‌جمله مشتق می‌گیریم؛ با استفاده از (۴) به‌دست می‌آوریم

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=\circ}=\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty} B^*_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y)\,,$$

فرض می‌کنیم‌که $g\,(x,y)$ را بتوان به‌صورت سری فوریهٔ دوگانهٔ فوق بسط داد. آنگاه با انجام عملیاتی نظیر آنچه گذشت، می‌یابیم

$$(۲۲)\ \ B^*_{mn}=\frac{۴}{ab\lambda_{mn}}\int_{\circ}^{b}\int_{\circ}^{a} g(x,\ y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy \quad \begin{matrix} m=۱,\ ۲,\cdots, \\ n=۱,\ ۲,\cdots, \end{matrix}$$

این مطلب نشان می‌دهد برای‌آنکه (۱۷) درشرایط اولیه صدق‌کند، لازم است‌که ضرایب B_{mn} و B^*_{mn} طبق (۲۱) و (۲۲) انتخاب شوند.

مسائل بخش ۸۰۱۱

۱. هرگاه‌کشش غشا افزایش یابد، فرکانس جواب (۱۳) چطور تغییر می‌کند؟

۲. خطوط‌گرهی جوابهای (۱۳) را به‌ازای $m=۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴$ و $n=۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴$ درحالت $a=b=۱$ یافته، نمودار آنها را رسم‌کنید.

۳. مسئلهٔ ۲ را به‌ازای $a=۲$ و $b=۱$ حل‌کنید.

۴. تعدادی مقادیرویژهٔ غشای مربعی به‌ضلع ۱ را طوری بیابیدکه با هریك ازآنهاچهار تابع ویژهٔ مختلف متناظر قرارگیرد.

۵. مقادیر ویژهٔ غشای مستطیلی به اضلاع $a=۲$ و $b=۱$ را طوری بیابیدکه با هریك از آنها دو یا تعدادی بیشتر توابع ویژهٔ مختلف متناظر باشد.

۶. نشان دهیدکه، مابین تمام غشاهای مستطیلی با مساحت $A=ab$ و c ی یکسان، غشای مربعی‌غشایی‌است‌که برای‌آن $u_{۱۱}$ [ر.ك. (۱۳)] دارای‌پایین‌ترین‌فرکانس‌است.

۷. نتیجه‌ای شبیه نتیجهٔ حاصل از مسئلهٔ ۶ برای‌فرکانس یکی از جوابهای (۱۳) با m و n مشخص دلخواه به‌دست آورید.

توابع $f(x, y)$ زیر ($\circ<x<a$ و $\circ<y<b$) را بسا یك سری دو گانهٔ فوریه به صورت (۱۸) نمایش دهید.

۸. $f=۱$ **۹.** $f=x+y$ **۱۰.** $f=xy$

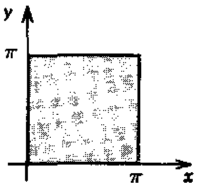
۱۱. $f=xy(a-x)(b-y)$ **۱۲.** $f=xy(a^{۲}-x^{۲})(b^{۲}-y^{۲})$

۱۳. نشان دهید که ارتعاشات واداشتهٔ غشا در

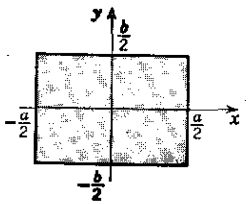
$$u_{tt}=c^{۲}\nabla^{۲}u+\frac{P}{\rho}$$

صدق می‌کنند، که در آن $P(x, y, t)$ نیروی خارجی بر واحد مساحت است که عمود بر صفحهٔ xy وارد می‌شود.

۱۴. مطلوب است توابع ویژهٔ غشای مستطیلی شکل زیر که در طول کرانه‌اش ثابت شده است.



مسئله ۱۴. غشای مستطیلی



مسئله ۱۹. ورقه مربعی

مطلوب است انحراف $u(x, y, t)$ غشای مربعی با $a=b=۱$، $c=۱$، در صورتی که سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه $f(x, y)$ باشد، و

۱۵. $f=۰٫۰۱\,xy(۱-x)(۱-y)$ **۱۶.** $f=kx(۱-x^{۲})\,y(۱-y^{۲})$

۱۷. $f=k\sin\pi x\sin ۲\pi y$ **۱۸.** $f=k\sin^{۲}\pi x\sin^{۲}\pi y$

۱۹. دمای ضلعهای ورقهٔ مربعی نازکی صفر و دو روی ورقه کاملا عایق‌پوش است. دمای اولیه $u(x, y, \circ)=f(x, y)$ فرض می‌شود. با استفاده از روش تفکیك متغیرها در مورد معادلهٔ گرمای دو بعدی $u_t=c^{۲}\nabla^{۲}u$ نشان دهید که دما ورقه عبارت‌است از

$$u(x, y, t)=\sum_{m=۱}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}B_{mn}\sin mx\sin ny\,e^{-c^{۲}(m^{۲}+n^{۲})t}$$

که در آن

$$B_{mn}=\frac{۴}{\pi^۲}\int_۰^\pi\int_۰^\pi f(x,\ y)\sin mx\sin ny\,dx\,dy\ .$$

۲۰. مطلوب است دمای ورقهٔ مسئلهٔ ۱۹ درصورتی که

$$\cdot\ f(x,\ y)=x\,(\pi-x)y\,(\pi-y)$$

۹.۱۱ لاپلاسی در مختصات قطبی

در ارتباط با مسائل مقدار مرزی درمورد معادلات با مشتق جزئی، استفاده از دستگاههای مختصاتی که نسبت به آنها کرانهٔ ناحیهٔ مورد نظر دارای نمایش سادهای باشد اصلی کلی است. دربخش بعدی غشاهای مستدیررا مورد بررسی قرارخواهیم داد. بنابراین مختصات قطبی r و θ که با

$$x=r\cos\theta\ , \qquad y=r\sin\theta$$

تعریف میشوند، برای این مسئله مناسب خواهد بود، چراکه در این مختصات میتوان کرانهٔ غشا را توسط معادلهٔ سادهٔ ثابت $=r$ نمایش داد.

وقتی از r و θ استفاده میکنیم، باید لاپلاسی

$$\nabla^۲u=\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲u}{\partial y^۲}$$

معادلهٔ موج را برحسب مختصات جدید بنویسیم.

نیاز به تبدیل عبارات دیفرانسیلی ازیك دستگاه به دستگاه دیگر کراراً در کاربردها پیش میآید. بنابراین لازم است دانشجو این مطالب را با دقت بیشتری تعقیب کند.

مانند بخش ۴.۱۱ قاعدهٔ زنجیری را بهکار میبریم. برای سادگی، مشتقات جزئی رابا شاخص زیر مشخص میکنیم و $u(x,\ y,\ t)$ را وقتیکه تابعی از r و θ و t درنظر گرفته میشود، با همان حرف u نشان میدهیم.

با بهکار بردن قاعدهٔ زنجیری (۴)، بخش ۷.۸، بهدست میآوریم

$$u_x=u_r r_x+u_\theta\theta_x$$

با مشتقگیری مجدد از این تساوی نسبت به x، نخست داریم

$$\begin{aligned}u_{xx}&=(u_r r_x)_x+(u_\theta\theta_x)_x\\&=(u_r)_x r_x+u_r r_{xx}+(u_\theta)_x\theta_x+u_\theta\theta_{xx}\ .\end{aligned}$$

حال، با بهکاربردن مجدد قاعدهٔ زنجیری، مییابیم

$$(u_\theta)_x=u_{\theta r}r_x+u_{\theta\theta}\theta_x \quad , \qquad (u_r)_x=u_{rr}r_x+u_{r\theta}\theta_x.$$

برای تعیین مشتقات جزئی r_x و θ_x باید از

$$\theta=\operatorname{Arc}\tan\frac{y}{x} \quad , \qquad r=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

مشتق بگیریم:

$$\theta_x=\frac{۱}{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^۲}\left(-\frac{y}{x^۲}\right)=-\frac{y}{r^۲} \quad , \qquad r_x=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=\frac{x}{r}$$

با مشتقگیری مجدد از این دو فرمول، به‌دست می‌آوریم

$$r_{xx}=\frac{r-xr_x}{r^۲}=\frac{۱}{r}-\frac{x^۲}{r^۳}=\frac{y^۲}{r^۳} \quad , \qquad \theta_{xx}=-y\left(-\frac{۲}{r^۳}\right)r_x=\frac{۲xy}{r^۴}.$$

همهٔ این عبارات را در (۱) قرار می‌دهیم. با فرض پیوستگی مشتقات جزئی اول و دوم، داریم $u_{r\theta}=u_{\theta r}$ و پس از ساده‌کردن به‌دست می‌آوریم

$$u_{xx}=\frac{x^۲}{r^۲}u_{rr}-۲\frac{xy}{r^۳}u_{r\theta}+\frac{y^۲}{r^۴}u_{\theta\theta}+\frac{y^۲}{r^۳}u_r+۲\frac{xy}{r^۴}u_\theta. \qquad (۲)$$

به طریقی مشابه نتیجه می‌شود که

$$u_{yy}=\frac{y^۲}{r^۲}u_{rr}+۲\frac{xy}{r^۳}u_{r\theta}+\frac{x^۲}{r^۴}u_{\theta\theta}+\frac{x^۲}{r^۳}u_r-۲\frac{xy}{r^۴}u_\theta. \qquad (۳)$$

با جمع‌کردن (۲) و (۳) مشاهده می‌کنیم که لاپلاسی در مختصات قطبی عبارت است از

$$\nabla^۲u=\frac{\partial^۲u}{\partial r^۲}+\frac{۱}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲u}{\partial\theta^۲} \qquad (۴)$$

مسائل بخش ۹.۱۱

۱. نشان دهید که (۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\nabla^۲u=\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲u}{\partial\theta^۲}$$

۲. هرگاه u مستقل از θ باشد، آنگاه (۴) به‌صورت $\nabla^۲u=u_{rr}+u_r/r$ در می‌آید.

این نتیجه را مستقیماً از لاپلاسی در مختصات دکارتی بـا فرض آنکه u مستقل از θ است استنتاج کنید.

۳. (۴) را به‌مختصات دکارتی تبدیل کنید.

۴. هرگاه x و y مختصات دکارتی باشند، نشان دهید که $x^* = x\cos\alpha - y\sin\alpha$، $y^* = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ مختصات دکارتی هستند، و با محاسبه تحقیق کنید کـه $\Delta^2 u = u_{x^*x^*} + u_{y^*y^*}$.

۵. $\nabla^2 u$ را بـر حسب مختصات $x^* = ax + b$، $y^* = cy + d$، کـه در آن x، y مختصات دکارتی هستند، بیان کنید.

۶. **(لاپلاسی درمختصات استوانه‌ای)** نشان دهید که لاپـلاسی درمختصات استوانـه‌ای r، θ, z کـه بـا $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$، $z = z$ تعریف می‌شود عبارت است از

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

۷. فرض می‌کنیم r، θ, ϕ **مختصات کروی** باشند که به‌صورت

$$x = r\cos\theta\sin\phi\ , \qquad y = r\sin\theta\sin\phi\ , \qquad z = r\cos\phi$$

تعریف شده‌اند. هرگاه $u(x, y, z)$ تنها تابعی از $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ باشد، نشان دهید که

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r$$

۸. **(لاپلاسی در مختصات کروی)** نشان دهید لاپلاسی درمختصات استوانه‌ای r، θ، ϕ که درمسئلهٔ ۷ تعریف شده است به‌صورت

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + \frac{\cot\phi}{r^2} u_\phi + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi} u_{\theta\theta}$$

در می‌آیـد.

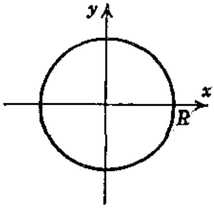
۹. هرگاه دمای سطح کرهٔ صلب همگن $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ در صفر نگهداشته شود و دمای اولیه در داخل کره $f(r)$ باشد که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$، نشان دهید که دمای $u(r, t)$ در کره جوابی ازمعادلهٔ $u_t = c^2(u_{rr} + 2u_r/r\,u_r)$ است که در شرایط $u(R, t) = 0$، $u(r, 0) = f(r)$ صدق می‌کند.

۱۰. با قراردادن $v=ru$ نشان دهید که فرمولهای مسئلهٔ ۹ به صورت $v_t=c^2v_{rr}$ ، $v(R,t)=0$ ، $v(r,0)=rf(r)$ درمی‌آیند. شرط $v(0,t)=0$ را اضافه کنید (زیرا که u باید در $r=0$ کراندار باشد)، ومسئلهٔ حاصل را به روش تفکیک متغیرها حل کنید.

۱۰.۱۱ غشای مستدیر. معادلهٔ بسل

هم اکنون می‌خواهیم ارتعاشات غشای مستدیری به شعاع R (شکل ۲۴۴) را بررسی کنیم با استفاده از مختصات قطبی که با $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ تعریف شده است معادلهٔ موج (′۳) بخش ۷.۱۱ به‌صورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$



شکل ۲۴۴. غشای مستدیر

در می‌آید، ر.ك. (۴) بخش ۹.۱۱ . دربخش حاضر جوابهای $u(r,\theta)$ این معادله راکه تقارن شعاعی دارند، یعنی، بستگی به θ ندارند، در نظر می گیریم در نتیجه معادلهٔ موج شکل ساده‌تری به خود می گیرد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (1)$$

چون غشا درطول کرانهٔ $r=R$ ثابت شده است، شرط کرانه‌ای

$$u(R,t)=0 \quad \text{به ازای هر } t\geqslant 0 \qquad (2)$$

برقرار است. جوابهایی که به θ بستگی ندارند وقتی پدید می‌آیند که شرایط اولیه به θ بستگی نداشته باشد، یعنی، زمانی که این شرایط به‌صورت

$$u(r,0)=f(r) \qquad [\text{انحراف اولیه } f(r)] \qquad (3)$$

و

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r) \qquad [\text{سرعت اولیه } g(r)] \qquad (4)$$

باشند.

مرحلهٔ اول. با استفاده از روش جداسازی متغیرها، نخست جوابهای (۱) را که درشرایط کرانه‌ای (۲) صدق می کنند تعیین می کنیم. برای شروع، فرض می کنیم

$$u(r,\ t)=W(r)\,G(t)\,. \tag{۵}$$

با مشتقگیری و جانشانی (۵) در (۱) و تقسیم معادلهٔ حاصل بر c^2WG به دست می‌آوریم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{W}\left(W''+\frac{1}{r}W'\right)$$

که در آن نقطه‌ها **مشتق** نسبت به t و پریمها مشتق نسبت به r را نشان می‌دهند. طرفین تساوی فوق باید برابر مقدار ثابتی باشند، و این ثابت باید منفی باشد، مثلاً $-k^2$، تا آنکه بتوانیم جوابهایی که درشرط کرانه‌ای صدق می کنند و متحد با صفر نیستند به دست آوریم. بنابراین

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{W}\left(W''+\frac{1}{r}W'\right)=-k^2.$$

از این تساویها دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی خطی

$$\ddot{G}+\lambda^2G=0 \tag{۶}$$

که در آن $\lambda=ck$ و

$$W''+\frac{1}{r}W'+k^2W=0 \tag{۷}$$

نتیجه می‌شوند.

مرحلهٔ دوم. نخست (۷) را بررسی می کنیم. با معرفی متغیر مستقل $s=kr$ داریم $1/r=k/s$،

$$W''=\frac{d^2W}{ds^2}k^2\ ,\qquad W'=\frac{dW}{dr}=\frac{dW}{ds}\ \frac{ds}{dr}=\frac{dW}{ds}k$$

با قرار دادن این عبارات در (۷) و حذف عامل مشترک k^2 به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d^2W}{ds^2}+\frac{1}{s}\ \frac{dW}{ds}+W=0$$

این **معادلهٔ بسل** (۱)، بخش ۵.۴، به‌ازای $\nu=0$ است. جواب‌عمومی‌این معادله عبارت است از (ر.ك. بخش ۶.۴)

$$W = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s)$$

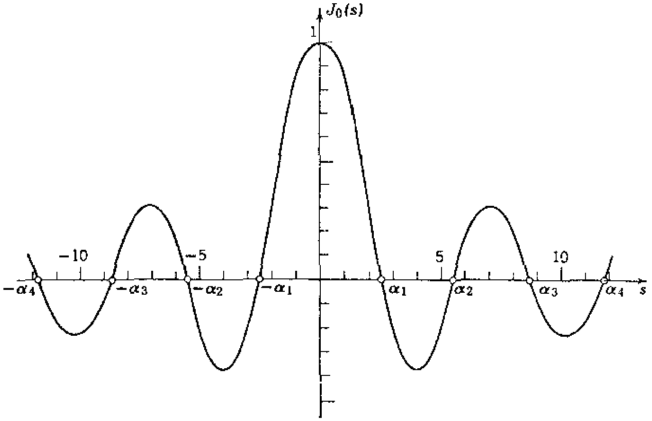
که درآن J_0 و Y_0 توابع بسل نوع اول و دوم ازمرتبهٔ صفرهستند. چون‌همواره انحراف غشا متناهی است و از طـرفی Y_0 وقتی‌که s به‌سمت صفر میل کند به‌سمت بینهایت میل می‌کند، بنابراین از Y_0 نمی‌توان استفاده‌کرد و باید $C_2 = 0$ انتخاب‌کنیم. واضح است که $C_1 \neq 0$ زیرا درغیراین صورت $W \equiv 0$. می‌توان قرارداد $C_1 = 1$، بنابراین

$$W(r) = J_0(s) = J_0(kr) \,. \qquad (۸)$$

بر کرانهٔ $r = R$ بایدداشته‌باشیم $u(R, t) = W(R)\,G(t) = 0$. چون‌از $G \equiv 0$ تساوی $u \equiv 0$ نتیجه می‌شود، لازم است که

$$W(R) = J_0(kR) = 0$$

تابع بسل J_0 دارای (تعدادی نامتناهی) صفرهای حقیقی است. صفرهای مثبت $J_0(s)$ را با $s = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ نمایش می‌دهیم (شکل ۲۴۵). متذکر می‌شویم‌که مقادیرعددی (با



شکل ۲۴۵. تابع بسل $J_0(s)$

چهار رقم اعشار) عبارتند از

$\alpha_1 =$ ۲٫۴۰۴۸ , $\alpha_2 =$ ۵٫۵۲۰۱ , $\alpha_3 =$ ۸٫۶۵۳۷ , $\alpha_4 =$ ۱۱٫۷۹۱۵

$\alpha_5 =$ ۱۴٫۹۳۰۹

مشاهده می‌کنیم‌که این صفرها به‌طور نامنظم از هم فاصله دارند، و همین طورند صفرهای دیگر α_6، α_7، .... (جداول جامع‌تردر مرجع[A8] ضمیمهٔ۱ آمده است.) حالا ازمعادلهٔ (۸) نتیجه می‌شود

$$m=1, 2, \cdots \quad , \quad k=k_m=\frac{\alpha_m}{R} \quad \text{یا} \quad kR=\alpha_m \tag{9}$$

در نتیجه توابع

$$W_m(r)=J_0(k_m r)=J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) \qquad m=1, 2, \cdots \tag{10}$$

جوابهایی از (۷) هستند که در $r=R$ صفر می‌شوند.

جوابهای عمومی (۶) که با $\lambda=\lambda_m=ck_m$ متناظر هستند، عبارتند از

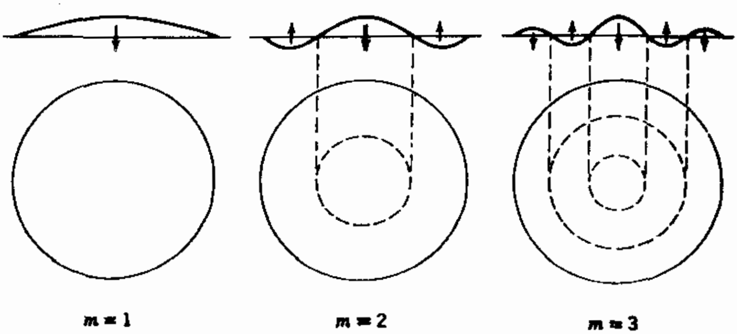
$$G_m(t)=a_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t.$$

از این‌رو توابع

$$u_m(r, t)=W_m(r)G_m(t)=(a_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t)J_0(k_m r) \tag{11}$$

که در آنها $m=1, 2, \ldots$، جوابهایی از معادلهٔ موج (۱) هستند که در شرط کرانه‌ای (۲) صدق می‌کنند: اینها توابع ویژهٔ مسئلهٔ ما هستند و مقادیر ویژهٔ متناظر با این توابع λ_m ها می‌باشند.

ارتعاش غشای متناظر با u_m را **مد نرمال** m ام می‌نامند؛ فرکانس این ارتعاش $\lambda_m/2\pi$ دور بر واحد زمان است. چون صفرهای J_0 به طور منظم بر روی محور جایگزین نشده‌اند (برخلاف صفرهای توابع سینوسی که درمورد نخ مرتعش ظاهر می‌شدند)، صدای طبل به کلی با صدای ویولن تفاوت دارد. صورتهای مختلف مدهای نرمال که در شکل ۲۴۶ نشان داده شده‌اند به سادگی از شکل ۲۴۵ به‌دست می‌آیند. به ازای $m=1$ و همهٔ نقاط غشا همزمان به‌طرف بالا (یا به طرف پایین) حرکت می‌کنند. به ازای $m=2$، وضع به شرح زیر است. تابع



شکل ۲۴۶. مدهای نرمال غشای مستدیر در حالتی که ارتعاشات مستقل از زاویه‌اند.

$$W_2(r) = J_0\left(\frac{\alpha_2}{R} r\right)$$

به‌ازای $\alpha_2 r/R = \alpha_1$ یا $r = \alpha_1 R/\alpha_2$ برابر صفر است. بنابراین، دایرهٔ $r = \alpha_1 R/\alpha_2$ یك خط گرهی است، و وقتی که دریك لحظهٔ معین بخش مرکزی غشا به‌طرف بالا حرکت می‌کند، بخش خارجی $(r > \alpha_1 R/\alpha_2)$ به‌طرف پایین حرکت می‌کند، و بالعکس. جواب $u_m(r, t)$ دارای $m - 1$ خط گرهی است که دوایر متحدالمرکز هستند (شکل ۲۴۶).

مرحلهٔ سوم. برای به دست آوردن جوابی که در شرایط آغازی (۳) و (۴) صدق کند، همان طور که درمورد نخ مرتعش عمل کردیم عمل می‌کنیم، یعنی، سری[1]

$$(12)\qquad u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r) G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos\lambda_m t + b_m \sin\lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right).$$

را با قرار دادن $t = 0$ و استفاده از (۳)، به‌دست می‌آوریم

$$(13)\qquad u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = f(r).$$

درنتیجه، برای اینکه (۱۲) در (۳) صدق کند، a_m باید ضریب سری بسل ـ فوریه‌ای باشد که $f(r)$ را برحسب $J_0(\alpha_m r/R)$ نمایش می‌دهد، یعنی [ر.ك. (۹) بخش ۹.۴]،

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

مشتق‌پذیری $f(r)$ در فاصلهٔ $0 \leqslant r \leqslant R$ برای وجود بسط (۱۳) کفایت می‌کند، ر.ك. مرجع [B ۱۸]. ضرایب b_m در (۱۲) را می‌توان به‌طریقی مشابه به‌کمك (۴) تعیین کرد. برای به‌دست آوردن مقادیرعددی a_m و b_m، می‌توان یکی ازروشهای معمولی انتگرال‌گیری تقریبی را با استفاده از جداول J_0 و J_1 به‌کار برد.

مسائل بخش ۱۰.۱۱

۱. مقدار عددی شعاعهای خطوط گرهی u_2 و u_3 [ر.ك. (۱۱)] را، به ازای $R = 1$، تعیین کنید.

۲. به سؤالی که در مسئلهٔ ۱ شده است درمورد u_4، u_5، u_6 پاسخ دهید.

---

۱. مسئلهٔ همگرایی ویکتایی را مورد بررسی قرار نمی‌دهیم.

۳. شکلی مانند شکل ۲۴۶ برای u_4 ، u_5 ، u_6 رسم کنید.

۴. هر گاه کشش غشا زیادشود، فرکانس هریك ازمدلهای نرمال(۱۱) چطور تغییرمی کند؟

۵. نشان دهید برای اینکه (۱۲) در (۴) صدق کند،

$$b_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0(\alpha_m r/R) dr , \quad m = 1, 2, \cdots$$

۶. آیا امکان دارد به‌ازای c و R معین یا تعداد بیشتری از توابع u_m [ر.ك. (۱۱)] که خطوط گرهی متفاوتی دارند با یك مقدار ویژهٔ مشخص متناظر قرار گیرند؟

۷. **(ارتعاشات وابسته به r و θ)** با قراردادن $u = F(r, \theta) G(t)$ درمعادلهٔ موج

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) \tag{۱۴}$$

نشان دهید که این معادله به معادلات

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \text{ ، که درآن } \lambda = ck \text{ ،} \tag{۱۵}$$

$$F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + k^2 F = 0 \tag{۱۶}$$

منجر می‌شود.

۸. با قراردادن $F = W(r) Q(\theta)$ در (۱۶) نتیجه بگیرید

$$Q'' + n^2 Q = 0 \tag{۱۷}$$

$$r^2 W'' + rW' + (k^2 r^2 - n^2) W = 0 \tag{۱۸}$$

۹. نشان دهید که $Q(\theta)$ باید دوره‌ای با دورهٔ 2π باشد، و بنابراین در (۱۷) و (۱۸)، $n = 0, 1, \cdots$. نشان‌دهید که ازاین جوابهای $Q_n = \cos n\theta$ ، $Q^*_n = \sin n\theta$ ، $W_n = J_n(kr)$ ، $n = 0, 1, \cdots$ حاصل می‌شوند.

۱۰. نشان دهید که شرط کرانه‌ای

$$u(R, \theta, t) = 0 \tag{۱۹}$$

منجر به‌مقادیر $k = k_{mn} = \alpha_{mn}/R$ می‌شود که $s = \alpha_{mn}$ صفرمثبت m ام $J_n(s)$ است.

۱۱. نشان دهید جوابهای (۱۴) که در (۱۹) صدق می‌کنند عبارتند از

$$u_{mn} = (A_{mn}\cos ck_{mn}t + B_{mn}\sin ck_{mn}t) J_n(k_{mn}r) \cos n\theta$$

$$u_{mn}^* = (A_{mn}^* \cos ck_{mn}t + B_{mn}^* \sin ck_{mn}t) J_n(k_{mn}r) \sin n\theta .$$

۱۲. نشان دهید که $u_{mo}^* \equiv 0$ و u_{mo} همان فرمول (۱۱) همین بخش است.

۱۳. نشان دهید که u_{mn} دارای $m+n-1$ خط گرهی است.

خطوط گرهی جوابهای زیر را رسم کنید

۱۴. u_{3n} , $n = 1, 2, 3$ **۱۵.** u_{4n} , $n = 1, 2, 3$

۱۶. u_{mn}^* , $m, n = 1, 2, 3$

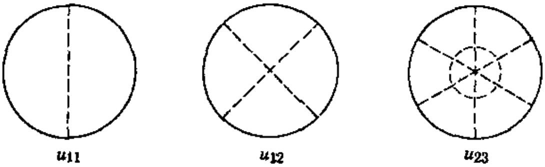
۱۷. نشان دهید که شرط اولیهٔ $u_t(r, \theta, 0) = 0$ در (۲۰) به $B_{mn} = 0$ ، $B_{mn}^* = 0$ منجر می‌شود.

انحراف $u(r, t)$ غشای مستدیری به شعاع $R = 1$ را بیابید، اگر وقتی $c = 1$، سرعت اولیه صفر، و انحراف اولیه $f(r)$ باشد که در آن

۱۸. $f = 0.1\, J_0(\alpha_2 r)$ **۱۹.** $f = k(1 - r^2)$

۲۰. $f = k(1 - r^4)$

راهنمایی. مسائل ۲۵ الی ۳۲ بخش ۹.۴ را ملاحظه کنید.



شکل ۲۴۷ ـ خطوط گرهی برخی از جوابهای (۲۰)

۱۱.۱۱ معادلهٔ لاپلاس . پتانسیل

یکی از مهمترین معادلات با مشتق جزئی در فیزیک معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2 u = 0 \tag{1}$$

است. در اینجا $\nabla^2 u$ لاپلاسی u است. لاپلاسی u برحسب مختصات دکارتی x ، y ، z درفضا عبارت است از

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{2}$$

نظریهٔ جوابهای معادلهٔ لاپلاس **نظریهٔ پتانسیل** نامیده می‌شود. جوابهای (۱) که دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته باشند به **توابع همساز** موسومند.

درحالت دو بعدی، یعنی وقتی که u فقط به دو متغیر وابسته است، مناسبترین راه استفاده از روشهای آنالیز مختلط است. این موضوع در بخش ۵.۱۲ و فصل ۱۸ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای روشن‌شدن اهمیت معادلهٔ لاپلاس در ریاضیات مهندسی، برخی کاربردهای اساسی را ذکر می‌کنیم.

معادلهٔ لاپلاس در ارتباط با نیروهای گرانشی پیش می‌آید. در مثال ۴ بخش ۸.۸ دیدیم که هر گاه ذرهٔ A به‌جرم M در نقطهٔ (ξ, η, ζ) ثابت باشد و ذرهٔ دیگری مانند B درنقطهٔ (x, y, z) قرار داشته باشد، آنگاه ذرهٔ A ذرهٔ B را جذب می‌کند، و نیروی گرانشی تابع اسکالر است.

$$u(x, y, z)=\frac{c}{r}, \qquad c=GMm=\text{ثابت}$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \qquad (>0)$$

این تابع که **پتانسیل** میدان گرانشی نامیده می‌شود در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

تعمیم این موضوع به پتانسیل و نیروی حاصل از توزیع پیوستهٔ جرم کاملاً روشن است. هر گاه جرمی به‌چگالی $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ سرتاسر یك‌ناحیهٔ R ازفضا توزیع شده‌باشد، آنگاه پتانسیل متناظر u درنقطه (x, y, z) که خالی‌از جرم‌است. چنین تعریف می‌شود:

$$u(x, y, z)=k\iiint_R \frac{\rho}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (k>0). \tag{۳}$$

نظر به‌اینکه $1/r\ (r>0)$ جواب معادلهٔ (۱) است، یعنی $\nabla^2(1/r)=0$ و ρ بستگی به x، y و z ندارد، بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$\nabla^2 u=k\iiint_R \rho\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta=0,$$

یعنی، پتانسیل گرانشیی که توسط (۳) تعریف می‌شود در هرنقطه‌ای که بدوسیلهٔ ماده‌اشغال نشده است درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

در الکتروستاتیك نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعهٔ بین ذرات از قانون کولن (ر.ك. بخش ۸.۸) که همان‌صورت ریاضی قانون گرانش نیوتن را دارد، پیروی می‌کند. ازاینجا نتیجه می‌شود که میدان حاصل از یك توزیع بار الکتریکی از نقطه‌نظر ریاضی می‌تواند با تابع پتانسیلی، که در هرنقطه‌ای که توسط بار اشغال نشده است در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، بیان شود.

درفصل ۱۸ مشاهده خواهیم کرد که معادلهٔ لاپلاس در نظریهٔ جریان سیال تراکم - ناپذیر نیز ظاهر می‌شود.

به‌علاوه، معادلهٔ اساسی در مسائل هدایت‌گرما معادلهٔ گرمای (ر.ک. بخشهای ۹.۰۹ و ۵.۱۱)

$$u_t = c^2 \nabla^2 u,$$

است و هرگاه دمای u مستقل از زمان t باشد («حالت مانا») این معادله به معادلهٔ لاپلاس تبدیل می‌شود.

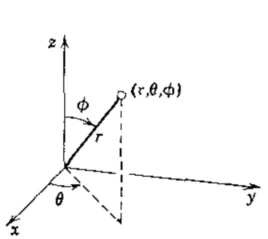
دراغلب کاربردهایی که به‌معادلهٔ لاپلاس منتهی‌می‌شوند، لازم‌است که **مسائل بامقدار کرانه‌ای** حل کنیم، یعنی جوابهایی از (۱) را که در شرایط کرانه‌ای مفروض بر روی رویه‌های معینی صدق می‌کنند مشخص‌کنیم. بنابراین انتخاب مختصاتی درفضاکه بتوان‌این رویه‌ها را به طریقی ساده در آن مختصات نمایش داد لازم می‌آید. این امر نیاز به تبدیل لاپلاسی (۲) به لاپلاسی در دستگاههای مختصات دیگر دارد. واضح است که این تبدیل بسیار شبیه تبدیل لاپلاسی تابع دومتغیری خواهد بود (ر.ک. بخش ۹.۱۱).

از (۴) بخش ۹.۱۱ بلافاصله نتیجه می‌شود که لاپلاسی تابع u در **مختصات استوانه‌ای**[۱] (شکل ۲۴۸)

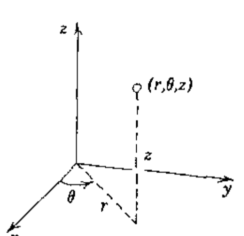
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \operatorname{Arc}\tan \frac{y}{x}, \qquad z = z \tag{۴}$$

عبارت است از

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{۵}$$



شکل ۲۴۸. مختصات استوانه‌ای



شکل ۲۴۹. مختصات کروی

---

۱. توجه‌کنید که نسبت y/x کاملا θ را مشخص نمی‌کند بلکه باید علامتهای x و y را نیز درنظر بگیریم.

مختصات مهم دیگر **مختصات کروی**[1] $\phi,\ \theta,\ r$ هستند که به شکل زیر به مختصات دکارتی مربوط می‌شوند (شکل ۲۴۹):

$$(۶)\quad x=r\cos\theta\sin\phi\ ,\qquad y=r\sin\theta\sin\phi\ ,\qquad z=r\cos\phi .$$

لاپلاسی تابعی مانند u درمختصات کروی عبارت‌است از

$$(۷)\qquad \nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\cot\phi}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial \phi}+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

این عبارت را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$(۷')\quad \nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\,\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)+\frac{1}{\sin^2\phi}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right].$$

این فرمول را به‌طریقی مشابه با آنچه دربخش ۹.۱۱ دیدیم می‌توان نتیجه‌گرفت؛جزئیات آن‌را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

مسائل بخش ۱۱.۱۱

۱. مطلوب است لاپلاسی در مختصات قائم $x^*=ax$ ، $y^*=by$ ، $z^*=cz$ ، که در آن $z,\ y,\ x$ مختصات دکارتی هستند.

۲. با شروع از (۲)، با محاسبه نسبت‌به مختصات دکارتی که با (۹) و (۱۰) بخش ۹.۸ تعریف شده‌اند تحقیق کنید که

$$\nabla^2 u=u_{x^*x^*}+u_{y^*y^*}+u_{z^*z^*}\ .$$

نشان‌دهید توابع $u=f(x,y)$ زیردرمعادلهٔ لاپلاس‌صدق می‌کنند، نمودار برخی‌ازخطوط هم پتانسیل ثابت $=u$ را رسم‌کنید.

۳. x^2-y^2 **۴.** x^3-3xy^2 **۵.** $\dfrac{x}{(x^2+y^2)}$

۶. $\dfrac{y}{(x^2+y^2)}$ **۷.** $\dfrac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

۸. مختصات کروی را که با (۶) تعریف شده‌اند، برحسب مختصات دکارتی تحقیق کنید.

۹. درستی (۵) را با تبدیل مجدد $\nabla^2 u$ به‌مختصات دکارتی تحقیق کنید.

---

۱. گاهی **مختصات قطبی** نیز نامیده می‌شود.

۱۰. تحقیق کنید که $u=c/r$ درمعادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی صدق می‌کند.

۱۱. نشان دهید تنها جواب $\nabla^2 u=0$ که فقط به $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ بستگی دارد برابر $u=c/r+k$ است، دراینجا c و k ثابت هستند.

۱۲. در مسئلهٔ ۱۱، c و k را طوری تعیین کنید که u نمایش پتانسیل الکترواستاتیك بین دو کرهٔ متحدالمرکز به‌شعاعهای $r_1=10$ سانتیمتر و $r_2=2$ سانتیمتر، که به‌ترتیب در پتانسیلهای $U_1=110$ ولت و $U_2=10$ ولت قرار گرفته‌اند، باشد.

۱۳. نشان دهید تنها جواب معادلهٔ لاپلاس دوبعدی کـه تنها به $r=\sqrt{x^2+y^2}$ بستگی دارد $u=c\ln r+k$ است.

۱۴. پتانسیل الکترواستاتیکی بین دو استوانهٔ هم محور با شعاعهای $r_1=10$ سانتیمتر و $r_2=2$ سانتیمتر را، که به‌ترتیب درپتانسیلهای $U_1=110$ ولت و $U_2=10$ ولت قرارگرفته‌اند، بیابید. نمودار جوابهای مسائل ۱۲ و ۱۴ را رسم کرده و باهم مقایسه کنید.

۱۵. هرگاه $u(r,\theta)$ در $\nabla^2 u=0$ صدق کند، نشان دهید که $v(r,\theta)=u(r^{-1},\theta)$ در $\nabla^2 v=0$ صدق می‌کند. (r و θ مختصات قطبی هستند.)

۱۶. فرض می‌کنیم r، θ، ϕ مختصات استوانه‌ای باشند. هرگاه $u(r,\theta,\phi)$ در $\nabla^2 u=0$ صدق کند، نشان‌دهید که $v(r,\theta,\phi)=r^{-1}u(r^{-1},\theta,\phi)$ در $\nabla^2 v=0$ صدق می‌کند.

۱۷. نشان دهید که باجانشانی $u=U(x,y,z)e^{-i\omega t}$، $(i=\sqrt{-1})$ در معادلهٔ موج سه‌بعدی $u_{tt}=c^2\nabla^2 u$ **معادلهٔ هلمهولتز**[1]

$$\nabla^2 U+k^2 U=0 \qquad k=\omega/c$$

حاصل می‌شود.

مطلوب است توزیع دمای حالت مانا (مستقل از زمان):

۱۸. بین دوصفحهٔ موازی $x=x_0$ و $x=x_1$ که دمای آنها به‌ترتیب u_0 و u_1 است.

۱۹. بین دو استوانهٔ مستدیر هم‌محور باشعاعهای r_0 و r_1 که به‌ترتیب در دماهای u_0 و u_1 قرار گرفته‌اند.

۲۰. بین دو کرهٔ متحدالمرکز باشعاعهای r_0 و r_1 که دمای آنها به‌ترتیب u_0 و u_1 است.

---

۱. هرمان فن‌هلمهولتز (Hermann Von Helmholtz)، ۱۸۲۱-۱۸۹۴، فیزیکدان آلمانی که به‌خاطر آثار مهمش در ترمودینامیك، هیدرودینامیك و اکوستیك معروف است.

۱۲.۱۱ معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی. معادلهٔ لژاندر

هم‌اکنون به‌بررسی یک‌مسئلهٔ بامقدار کرانه‌ای نمونه‌وار که شامل معادلهٔ لاپلاس درمختصات کروی است می‌پردازیم. فرض می‌کنیم کرهٔ S که شعاع آن R است درتوزیع پتانسیل الکتریکی ثابت

$$u(R,\ \theta,\ \phi)=f(\phi) \qquad (۱)$$

قرارداشته باشد، دراینجا r، θ، ϕ مختصات کروی هستند که دربخش قبل تعریف شده‌اند، به‌این‌شرط که مرکز S، مبدأ مختصات فرض‌شود و تابع $f(\phi)$ مفروض باشد. قصد ما یافتن پتانسیل u درهمهٔ نقاط فضا که خالی از باراضافی فرض شده است می‌باشد. نظر به‌اینکه پتانسیل روی S مستقل‌از θ است، درنتیجه پتانسیل درفضا نیز چنین خواهد بود. بنابراین $\partial^2 u/\partial\theta^2=0$، و بنابه ($'$۷) از بخش ۱۱.۱۱ معادلهٔ لاپلاس به صورت

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\ \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\,\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)=0 \qquad (۲)$$

درمی‌آید. به‌علاوه، دربینهایت پتانسیل صفر است:

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\ \phi)=0 \qquad (۳)$$

می‌خواهیم مسئلهٔ با مقدارکرانه‌ای مرکب از معادلهٔ (۲) و شرایط‌کرانه‌ای (۱) و (۳) را به‌روش تفکیك متغیرها حل‌کنیم. با قراردادن جوابی به‌صورت

$$u(r,\ \phi)=G(r)\,H(\phi)$$

در (۲)، و تقسیم معادلهٔ حاصل بر GH، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{G}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dG}{dr}\right)=-\frac{1}{H\sin\phi}\ \frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\,\frac{dH}{d\phi}\right)$$

طبق معمول، طرفین این‌معادله باید مساوی مقدارثابتی، مثلاً k، باشد، طوری‌که

$$\frac{1}{\sin\phi}\ \frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\,\frac{dH}{d\phi}\right)+kH=0 \qquad (۴)$$

و

$$\frac{1}{G}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dG}{dr}\right)=k\,.$$

معادلهٔ دوم را می‌توان چنین نوشت

$$r^2G''+2rG'-kG=0.$$

این معادلهٔ کشی است، و دربخش ۷.۲ دیدیم که معادلهٔ کشی دارای جوابهایی به‌صورت

$G=r^\alpha$ است. این جوابها دارای صورت ساده‌تری خواهد شد هرگاه نمادگذاری را عوض کنیم و به‌جای k، $n(n+1)$ قراردهیم. درواقع، با این نمادگذاری معادلهٔ مزبور چنین می‌شود:

$$r^2G''+2rG'-n(n+1)G=0 \tag{5}$$

که درآن n هنوز دلخواه است. باقراردادن $G=r^\alpha$ در (۵) داریم

$$[\alpha(\alpha-1)+2\alpha-n(n+1)]r^\alpha=0 .$$

صفرهای عبارت داخل کروشه $\alpha=n$ و $\alpha=-n-1$ هستند. درنتیجه جوابهای زیر حاصل می‌شوند:

$$G_n(r)=r^n \quad , \qquad G_n{}^*(r)=\frac{1}{r^{n+1}} \tag{6}$$

با واردکردن $k=n(n+1)$ در (۴) و قراردادن

$$\cos\phi=w ,$$

و $\sin^2\phi=1-w^2$ خواهیم داشت

$$\frac{d}{d\phi}=\frac{d}{dw}\,\frac{dw}{d\phi}=-\sin\phi\frac{d}{dw}$$

درنتیجه، (۴) به‌صورت

$$\frac{d}{dw}\left[(1-w^2)\frac{dH}{dw}\right]+n(n+1)H=0 \tag{7}$$

یا

$$(1-w^2)\frac{d^2H}{dw^2}-2w\frac{dH}{dw}+n(n+1)H=0 \tag{7'}$$

درمی‌آید. این معادلهٔ لژاندر است (ر.ك. ۳.۴). به ازای عدد صحیح[1] $n=0, 1, \ldots$ چندجمله‌ایهای لژاندر

$$H=P_n(w)=P_n(\cos\phi) , \qquad n=0, 1, \ldots$$

جواب‌معادلهٔ (۷) هستند. بنابراین دو رشتهٔ جوابهای $u=GH$ به‌صورت زیر برای‌معادلهٔ لاپلاس (۲) حاصل می‌شوند:

---

۱. تاکنون، n دلخواه بود زیرا k دلخواه بود. می‌توان نشان دادکه تحدید n به عدد صحیح برای آنکه جواب (۷) همراه مشتق آن در فاصلهٔ $-1\leqslant w\leqslant 1$ یا $0\leqslant\phi\leqslant\pi$ باشد امری ضروری است.

$$(8^*)\qquad u_n(r,\ \phi)=A_n r^n P_n(\cos\phi)\ ,\qquad u_n^*(r,\ \phi)=\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\phi)$$

که در آن $n=0, 1, \ldots$ ، و A_n و B_n ثابت هستند.

برای یافتن جوابی از (۲) که درنقاط **داخلی** کره برقرار بوده و در (۱) صدق کنند، به بررسی[1] زیر می‌پردازیم

$$(8)\qquad u(r,\ \phi)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\phi)\ .$$

برای اینکه (۸) در (۱) صدق کند باید داشته باشیم

$$(9)\qquad u(R,\ \phi)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\phi)=f(\phi)\ ;$$

یعنی، (۹) باید برابر سری فوریهٔ $f(\phi)$ برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر باشد. از (۶) و (۷) بخش ۷.۴ و (۲) بخش ۹.۴ نتیجه می‌شود

$$A_n R^n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(w)P_n(w)\,dw$$

که در آن $f(w)$ تابع $f(\phi)$ را به‌صورت تابعی از $w=\cos\phi$ نشان می‌دهد. چون $dw=-\sin\phi\,d\phi$ ، و حدود انتگرالگیری ۱− و ۱ به ترتیب با $\phi=\pi$ و $\phi=0$ متناظر است، داریم

$$(10)\qquad A_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_{0}^{\pi} f(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi\ ,\ \ n=0,\ 1,\ \ldots$$

بنابراین سری (۸) با ضرایب (۱۰) جواب مسئلهٔ فوق درنقاط داخل کره است.

برای یافتن جواب در نقاط خارج کره نمی‌توان از توابع $u_n(r,\ \phi)$ استفاده کرد زیرا این‌توابع در (۳) صدق نمی‌کنند، ولی می‌توان از توابع $u^*(r,\ \phi)$ ، که در (۳) صدق می‌کنند، استفاده کرد و مانند قبل عمل کرد. این به‌جواب

$$(11)\qquad u(r,\ \phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\phi)\qquad (r\geqslant R)$$

---

۱. همگرائی را مورد بررسی قرار نمی‌دهیم، می‌توان نشان داد که هرگاه $f(\phi)$ و $f'(\phi)$ درفاصلهٔ $0\leqslant\phi\leqslant\pi$ تکه‌ای پیوسته باشند، ازسری (۸) باضرایب (۱۰) می‌توان جمله‌به‌جمله نسبت به r و ϕ مشتق گرفت و سریهای حاصل همگرا و به‌ترتیب $\partial^2u/\partial r^2$ و $\partial^2u/\partial\phi^2$ را نمایش می‌دهند. پس سری (۸) با ضرایب (۱۰) جواب مسئلهٔ موردنظر در داخل کره است.

با ضرایب

$$B_n = \frac{۲n+۱}{۲} R^{n+۱} \int_۰^{\pi} f(\phi) P_n(\cos\phi) \sin\phi \, d\phi \qquad (۱۲)$$

منجر می‌شود.

مسائل بخش ۱۲.۱۱

۱. با جانشانی تحقیق کنید $u_n(r, \phi)$ و $u_n^*(r, \phi)$، $n = ۰, ۱, ۲$، که با (*۸) داده شده‌اند جوابهای (۲) هستند.

۲. رویه‌هایی را که توابع $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$ بر آنها صفر هستند بیابید.

۳. نمودار توابع $P_n(\cos\phi)$ را به ازای $n = ۰, ۱, ۲$ رسم کنید [ر. ك. ('۱۱) بخش ۳.۴].

۴. توابع $P_۳(\cos\phi)$ و $P_۴(\cos\phi)$ را رسم کنید.

فرض می‌کنیم r, θ, ϕ مختصات کرویی که درمتن کتاب مورد استفاده قرار گرفته، باشند. مطلوب است پتانسیل در داخل کرهٔ $R = ۱$، با فرض آنکه هیچ باری در داخل کره وجود ندارد و پتانسیل روی کره برابر $f(\phi)$ است که

۵. $f(\phi) = ۱$ ۶. $f(\phi) = \cos\phi$ ۷. $f(\phi) = \cos^۲\phi$

۸. $f(\phi) = \cos^۳\phi$ ۹. $f(\phi) = \cos ۲\phi$ ۱۰. $f(\phi) = \cos ۳\phi$

۱۱. $f(\phi) = ۱۰ \cos^۳\phi = ۳\cos^۲\phi - ۵\cos\phi - ۱$

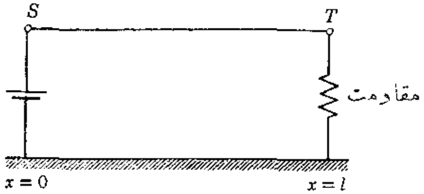
۱۲. نشان دهید درمسئلهٔ ۵، پتانسیل درخارج کره برابر پتانسیل حاصل از یك بار نقطه‌ای است که در مبدأ قرار دارد.

۱۳. فصل مشترك رویه‌های هم‌پتانسیل مسئلهٔ ۶ باصفحهٔ xz را رسم کنید.

۱۴. مطلوب است پتانسیل درخارج کره‌ای که درمسائل ۵ تا ۱۱ آمده‌است.

۱۵. با جانشانی تحقیق کنید که جواب مسئلهٔ ۷ در (۲) صدق می‌کند.

۱۶. **(معادلات خط انتقال)** یك کابل یا سیم تلفن طولانی (شکل را ببینید) را که به‌طور ناقص عایق‌پوش شده‌است، به‌طوری که سیم درسراسر طولش نشست می‌کند، درنظر می‌گیریم. چشمهٔ S جریان $i(x, t)$ سیم در $x = ۰$ و انتهای دریافت کنندهٔ T در $x = l$ واقع است. جریان از S به‌طرف T برقرار می‌شود و از داخل مصرف کننده به‌زمین برمی‌گردد. فرض می‌کنیم R, L, C و G به ترتیب، مقاومت، القا، ظرفیت



مسئلهٔ ۱۶. خط انتقال

نسبت به زمین و هدایت نسبت به زمین برای واحد کابل باشد. نشان دهید که

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad \text{(اولین معادلهٔ خط انتقال)}$$

که در آن $u(x, t)$ پتانسیل در کابل است. راهنمایی. قانون ولتاژ کیرشهف را برای تکهٔ کوچکی از کابل که بین x, $x+\Delta x$ واقع است به‌کار برید (اختلاف پتانسیل بین x و $x+\Delta x$، افت القائی + افت مقاومتی $= x+\Delta x$).

۱۷. نشان دهید که برای کابل مسئلهٔ ۱۶

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{(دومین معادلهٔ خط انتقال)}$$

راهنمایی. از قانون جریان کیرشهف استفاده کنید (اختلاف جریان در x و $x+\Delta x$، اتلاف به‌علت نشت به‌زمین + اتلاف ظرفیتی $= x+\Delta x$).

۱۸. نشان‌دهید که با حذف i از معادلات خط انتقال معادلهٔ

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu$$

حاصل می‌شود.

۱۹. **(معادلات تلگراف)** در مورد کابلهای زیردریایی G قابل چشم پوشی است و فرکانسها پایین هستند. نشان‌دهید که این‌فرضها منجر به معادلاتی که اصطلاحاً **معادلات کابل زیر دریایی** یا **معادلات تلگراف** نام دارند می‌شوند:

$$u_{xx} = RCu_t \ , \qquad i_{xx} = RCi_t \ .$$

۲۰. **(معادلات خط بالا فرکانس)** نشان دهید که درمورد جریانهای متناوب بالا فرکانس معادلهٔ مذکور درمسئلهٔ ۱۸وهمین‌طور معادلهٔ‌جریان i را می‌توان باتقریب به‌معادلات

زیرکه اصطلاحاً معادلات خط بالا فرکانس نام دارد تبدیل کرد.

$$u_{xx}=LCu_{tt}\ ,\qquad i_{xx}=LCi_{tt}\ .$$

۱۳.۱۱ کاربرد تبدیل لاپلاس درمعادلات با مشتق جزئی

خوانندگانی که با تبدیل لاپلاس (فصل ۵) آشنا هستند ممکن است مایل باشند بدانند که آیا روش مزبور رامی‌توان برای حل معادلات با مشتق جزئی به‌کار برد. پاسخ مثبت است، و ما اساس انجام این‌کار را با آوردن مثال نوعی (زیر) روشن می کنیم. (مسائل پیچیده‌تر با استفاده‌از روشهای آنالیز مختلط قابل‌حلند؛ ر.ك. به‌مرجع [B۳] که درضمیمهٔ ۱ لیست شده است. بعضی‌اوقات تبدیل فوریه (ر.ك. بخش ۹.۱۰) مناسبتر است؛ برای روشن‌شدن این‌نکته مرجع [B ۱۶] را ببینید).

درفصل ۵ دیدیم که درمورد معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، تبدیل لاپلاس یك معادلهٔ جبری برای تبدیل به‌دست می‌دهد. درموردمعادله با مشتق جزئی دومتغیره چنانچه مشاهده‌خواهیم کرد، این‌روش منجر به‌یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای تبدیل می‌شود. دلیل این‌امر آن است‌که ما معادلهٔ مفروض را نسبت به یکی از متغیرهای مستقل، معمولا نسبت‌به t، تبدیل می کنیم، طوری که‌مشتقات نسبت‌به دیگرمتغیرهای مستقل درمعادلهٔ تبدیل‌شده باقی می‌مانند. هرگاه ضرایب معادلهٔ مفروض بستگی‌به t نداشته باشند، تبدیل لاپلاس مسئله را ساده‌تر خواهد کرد.

مثال ۱. یك معادلهٔ مرتبهٔ اول

مسئلهٔ

$$(۱)\qquad \frac{\partial w}{\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial t}=0\ ,\quad w(x,\ 0)=0\ ,\quad w(0,\ t)=t\qquad (t\geqslant 0)$$

را حل کنید. دراینجا به‌این‌دلیل w را به‌کاربرده‌ایم که u را برای نمایش‌دادن تابع پله‌ای واحد (بخش ۳.۵) لازم داریم.

حل. تبدیل لاپلاس (۱) نسبت‌به t را درنظر می گیریم. بنابه (۱) بخش ۲.۵

$$(۲)\qquad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+x[s\,\mathcal{L}\{w\}-w(x,\ 0)]=0\ .$$

دراینجا $w(x,\ 0)=0$، فرض می کنیم کــه بتوان در جملهٔ اول ترتیب انتگرالگیری و مشتقگیری را عوض کرد:

$$(۳)\quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial w}{\partial x}dt=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}w(x,\ t)dt=\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\{w(x,\ t)\}\ .$$

با نوشتن $W(x, s)=\mathcal{L}\{w(x, t)\}$ ، از (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial W}{\partial x}+xsW=0$$

این معادله را می‌توان یك معادله دیفرانسیل معمولی که متغیرمستقل آن x است فرض کرد، چرا که در آن مشتق نسبت‌به s وجود ندارد. جواب عمومی عبارت است از (بخش ۷.۱)

$$W(x, s)=c(s)e^{-sx^2/2}.$$

چون $\mathcal{L}(t)=1/s^2$ ، از شرط $w(0, t)=t$ نتیجه می‌شود $W(0, s)=1/s^2$ ، یعنی،

$$W(0, s)=c(s)=\frac{1}{s^2}$$

در نتیجه

$$W(x, s)=\frac{1}{s^2}e^{-sx^2/2}.$$

حال $t=\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\}$ ، بنابراین دومین قضیهٔ انتقال (بخش ۳.۵) به‌ازای $a=x^2/2$ نتیجه می‌دهد

$$w(x, t)=\left(t-\frac{x^2}{2}\right)u_{x^2/2}(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{x^2}{2}\\ t-\frac{1}{2}x^2 & t>\frac{x^2}{2}\end{cases} \tag{۴}$$

چون تا اینجا فقط صوری عمل کرده‌ایم، باید تحقیق کنیم که (۴) در (۱) صدق می‌کند. این کار را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

مثال ۲. نخ از یك‌سو نامتناهی

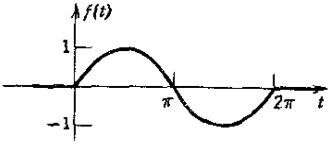
مطلوب‌است تغییرمکان[1] $w(x, t)$ نخ کشسانی که شرایط زیر را دارد.

(الف) نخ در آغاز کار برروی محور xها از $x=0$ تا ∞ («نخ نیمه بینهایت») قرار دارد و بی‌حرکت است.

(ب) به‌ازای $t>0$ معادلهٔ حرکت انتهای چپ نخ عبارت‌است از (شکل ۲۵۰)

---

۱. w را دراینجا به‌کار برده‌ایم زیرا u را برای نمایش‌دادن تابع پله‌ای واحد لازم‌داریم.



شکل ۲۵۰. حرکت انتهای چپ نخ مذکور
درمثال به‌عنوان تابعی از t

$$w(\circ,\ t)=f(t)=\begin{cases}\sin t & \circ\leqslant t\leqslant \text{۲}\pi\\ \circ & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

(پ) به علاوه

$$\lim_{x\to\infty} w(x,\ t)=\circ \qquad \text{به ازای } t\geqslant\circ$$

البته نخ باطول بینهایت وجود خارجی ندارد ولی مدل ما نخ یا طنابی طویل (با وزنی ناچیز) است که انتهای راست آن درنقطهٔ دوری واقع بر محور xها ثابت شده است.

حل. باید معادلهٔ موج (بخش ۱۱.۲)

$$\frac{\partial^{\text{۲}} w}{\partial t^{\text{۲}}}=c^{\text{۲}}\frac{\partial^{\text{۲}} w}{\partial x^{\text{۲}}} \qquad c^{\text{۲}}=\frac{T}{\rho} \tag{۵}$$

را تحت «شرایط کرانه‌ای»

$$w(\circ,\ t)=f(t)\ ,\qquad \lim_{x\to\infty} w(x,t)=\circ \qquad (t\geqslant\circ) \tag{۶}$$

به‌ازای fی که دربالا داده شده است، وشرایط اولیه

$$w(x,\ \circ)=\circ \tag{۷}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=\circ}=\circ \tag{۸}$$

حل کنیم. نسبت به t تبدیل لاپلاس می گیریم. بنابه (۲) بخش ۵.۲

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^{\text{۲}} w}{\partial t^{\text{۲}}}\right\}=s^{\text{۲}}\mathcal{L}\{w\}-sw(x,\ \circ)-\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=\circ}=c^{\text{۲}}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^{\text{۲}} w}{\partial x^{\text{۲}}}\right\}.$$

بنابه (۷) و (۸) دوجمله حذف می‌شوند. فرض می کنیم در طرف راست بتوان ترتیب

انتگرالگیری و مشتقگیری را عوض کرد:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}w(x,\ t)\,dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{w(x,\ t)\}$$

با نوشتن $W(x,\ s)=\mathcal{L}\{w(x,\ t)\}$، به‌دست می‌آوریم

$$s^2W=c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{s^2}{c^2}W=0\ .$$

چون این معادله فقط شامل یك مشتق نسبت‌به x است، آن را می‌توان به‌عنوان یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای $W(x,\ s)$ به‌عنوان تابعی‌از x تصور کرد. جواب‌عمومی‌عبارت است از

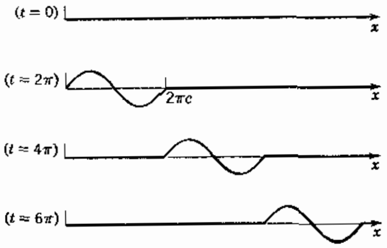
$$W(x,\ s)=A(s)e^{sx/c}+B(s)e^{-sx/c}\ . \qquad (۹)$$

از (۶)، با نوشتن $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ ، به‌دست می‌آوریم

$$W(0,\ s)=\mathcal{L}\{w(0\ ,\ t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$$

و ، بافرض‌آنکه می‌توان تقدم انتگرالگیری نسبت‌به t و حدگیری وقتی‌که $x\to\infty$ را عوض کرد ، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}W(x,\ s)&=\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}\,w(x,\ t)\,dt\\&=\int_0^\infty e^{-st}\lim_{x\to\infty}w(x,\ t)\,dt=0\ .\end{aligned}$$



شکل ۲۵۱. موج سیار مثال ۲

از اینجا لازم می‌آید که در (۹)، $A(s)=0$ زیرا $c>0$، بنابراین به‌ازای هر s ثابت مثبت با افزایش x تابع $e^{sx/c}$ زیاد می‌شود. توجه کنید که می‌توان فرض کرد $s>0$ چرا که همیشه تبدیل لاپلاس به‌ازای هر s بزرگتر از عدد مشخصی مانند γ موجود است (بخش ۲.۵). درنتیجه داریم

$$W(0,\ s)=B(s)=F(s)\ ,$$

بنابراین (۹) چنین می‌شود:

$$W(x,\ s)=F(s)\,e^{-sx/c}\ .$$

از دومین قضیهٔ انتقال (بخش ۳.۵) به‌ازای $a=x/c$ تبدیل معکوس (شکل ۲۵۱)

$$w(x,\ t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)u_{x/c}(t)\ , \tag{۱۰}$$

به‌دست می‌آید، یعنی،

$$w(x,\ t)=\sin\left(t-\frac{x}{c}\right) \quad \text{اگر} \quad \frac{x}{c}<t<\frac{x}{c}+2\pi \quad \text{یا} \quad ct>x>(t-2\pi)c$$

و درغیراین‌صورت W صفر است. این یک‌موج سینوسی منفرد است که با سرعت c به‌طرف راست درحال حرکت است. توجه کنید که نقطهٔ x تا لحظهٔ $t=x/c$ ساکن می‌ماند، $t=x/c$ زمان‌لازم برای رسیدن به x است اگرآغاز حرکت در $t=0$ (آغاز حرکت طرف چپ) بوده وسرعت حرکت c باشد. نتیجه حاصل با شهود فیزیکی مطابقت دارد. چون اثبات صوری است، باید تحقیق کنیم که (۱۰) درشرایط مفروض صدق می‌کند. این مرحله را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

مسائل بخش ۱۳.۱۱

۱. مطلوب‌است رسم شکلی مانند شکل ۲۵۱ هرگاه $c=1$، و f مانند تابع مذکور درمثال ۱، بخش ۳.۱۱، به‌ازای $k=l/2=1$ «مثلثی» باشد.

۲. سرعت موجی که درمثال ۳ تشریح شد چگونه به‌کشش و جرم نخ بستگی دارد؟

۳. درستی جواب مثال۲ را تحقیق کنید. هرگاه درلحظه $t=0$ شروع به‌اعمال حرکت سینوسی به‌انتهای چپ نخ درلحظه $t=0$ بکنیم چه موج سیاری به‌دست می‌آید؟

با به‌کاربردن تبدیل لاپلاس معادلات زیر را حل کنید

۴. $\frac{\partial u}{\partial x}+2x\frac{\partial u}{\partial t}=2x$ ، $u(x,\ 0)=1$ ، $u(0,\ t)=1$.

۵. $x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=xt$ ، $u(x,\ 0)=0$ اگر $x\geqslant 0$ ، $u(0,\ t)=0$ اگر $t\geqslant 0$.

۶. مسئلهٔ ۵ را به‌روش دیگری حل کنید.

مطلوب است دمای $w(x,\ t)$ در میله‌ای از یك سو نامتناهی با سطح جانبی عایق‌پوش‌شده که روی محور x از 0 تا ∞ قرار گرفته است، با فرض اینکه دمای اولیه صفر باشد و هنگامی که $x\to\infty$ به‌ازای هر $t\geqslant 0$ مشخص، $w(x,\ t)\to 0$، و $w(0,\ t)=f(t)$. به شرح زیر عمل کنید.

۷. مدلی بسازید و نشان دهید که تبدیل لاپلاس منجر به

$$sW(x,\ s)=c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x}\qquad\qquad W=\mathcal{L}\{w\}$$

و

$$W(x,\ s)=F(s)\,e^{-\sqrt{s}\,x/c}\qquad\qquad F=\mathcal{L}\{f\}$$

می‌شود.

۸. با به‌کاربردن قضیهٔ پیچش درمسئلهٔ ۷، نشان دهید که

$$w(x,\ t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t f(t-\tau)\tau^{-3/2}e^{-x^2/4c^2\tau}\,d\tau$$

۹. فرض می‌کنیم $w(0,\ t)=f(t)=u_0(t)$ (بخش ۳.۵). w، W و F متناظر را با w_0، W_0 و F_0 نشان دهید. آنگاه ثابت کنید که درمسئلهٔ ۸

$$w_0(x,\ t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t \tau^{-3/2}e^{-x^2/4c^2\tau}\,d\tau=1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

که در آن تابع خطای erf دارای همان تعریفی است که در مجموعهٔ مسائل بخش ۶.۱۱ آمده است.

۱۰. (فرمول دوهامل) درمسئله ۹ نشان دهید،

$$W_0(x,\ s)=\frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}\,x/c}$$

و بنا به قضیهٔ پیچش

$$w(x,\ t)=\int_{0}^{t} f(t-\tau)\frac{\partial w_{0}}{\partial \tau}\,d\tau\ .$$

[این صورتی از فرمول معروف به فرمول دوهامل است که جواب متناظر با هر تابع مفروض f را برحسب w_{0} متناظر با $f(t)=u_{0}(t)$ بیان می‌کند.]

۱۲

اعداد مختلط. توابع تحلیلی مختلط

بسیاری از مسائل مهندسی را می‌توان با روشهای آنالیز مختلط بررسی و حل کرد. این گونه مسائل را می‌توان به دو دستهٔ بزرگ تقسیم نمود. دستهٔ اول از «مسائل مقدماتی» تشکیل یافته است که برای حل آنها آگاهی از اعداد مختلط به میزانی که در جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش دانشگاهی* فراگرفته شده، کافی است. به عنوان مثال، بسیاری از مسائل کاربردی مربوط به مدارهای الکتریکی و دستگاههای ارتعاش کنندهٔ مکانیکی از این دسته‌اند. برای دستهٔ دوم مسائل، اطلاعات مبسوطی از نظریهٔ توابع تحلیلی مختلط (یا به اختصار «نظریهٔ توابع») و روشهای دقیق و پرقدرتی، که در این شاخه از ریاضیات به کار گرفته شده‌اند، لازم است. مسائل جالب نظریهٔ گرما، دینامیک سیالات و الکترواستاتیک، به این دسته تعلق دارند.

فصلهای بعدی این کتاب به مباحث عمدهٔ نظریهٔ توابع تحلیلی مختلط و کاربرد آنها اختصاص دارد. خواهیم دید که اهمیت این توابع در ریاضیات مهندسی ریشه در سه موضوع اصلی زیر دارد.

۱. قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی جوابهای معادلهٔ لاپلاس هستند. درنتیجه مسائل پتانسیل دوبعدی را می‌توان، با روشهایی که در ارتباط با توابع تحلیلی به وجود آمده‌اند بررسی کرد.

۲. بسیاری از انتگرالهای حقیقی و مختلط پیچیده‌ای که در کاربردها پیش می‌آیند با روشهای انتگرالگیری مختلط قابل محاسبه هستند.

---

* منظور دورهٔ پیش دانشگاهی امریکاست.ـ م.

۳. بخش اعظم توابع غیرمقدماتی که در ریاضیات مهندسی ظاهر می‌شوند توابع تحلیلی هستند، و بررسی این توابع هنگامی که متغیر مستقل مختلط است سبب تعمیق و توسعهٔ آگاهی ما از خواص آنها می‌شود.

در این فصل اعداد مختلط و توابع تحلیلی و خواص عمومی آنها را بررسی می کنیم. نیمهٔ دوم این فصل به مهمترین توابع مختلط مقدماتی اختصاص یافته‌است.

پیشنیاز این فصل: حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت F.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱۲.۱ اعداد مختلط

وجود معادلاتی که هیچ عدد حقیقی در آنها صدق نمی‌کند، مثلا

$$x^۲+۳=۰\ , \qquad x^۲-۱۰x+۴۰=۰\ .$$

در گذشتهٔ بسیار دوری کشف شد و همین امر بالاخره سبب تعریف اعداد مختلط گردید.[1]

تعریف

عدد مختلط z یك زوج مرتب (x,y) ازاعداد حقیقی x و y است، ومی‌نویسیم

$$z=(x,\ y).$$

x را **قسمت حقیقی** z و y را **قسمت موهومی** z می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\operatorname{Re} z=x\ , \qquad \operatorname{Im} z=y\ .$$

به‌عنوان مثال، $\operatorname{Re}(۴,-۳)=۴$ و $\operatorname{Im}(۴,-۳)=-۳$. به علاوه تعریف می کنیم که دو عدد مختلط $z_۱=(x_۱,\ y_۱)$ و $z_۲=(x_۲,\ y_۲)$ **مساوی** هستند وقتی و فقط وقتی که قسمتهای حقیقی آنها با هم و قسمتهای موهومیشان باهم برابر باشند.

جمع اعداد مختلط $z_۱=(x_۱,y_۱)$ و $z_۲=(x_۲,\ y_۲)$ با قاعدهٔ زیر تعریف‌می‌شود:

$$z_۱+z_۲=(x_۱,\ y_۱)+(x_۲,\ y_۲)=(x_۱+x_۲,y_۱+y_۲)\,. \qquad (۱)$$

---

۱. اولین کسی که اعداد مختلط را بدین‌منظور به‌کاربرد ریاضیدان ایتالیایی **جیرولامو کاردانو** Girolamo Cardano (۱۵۰۱–۱۵۷۶) همان کسی که فرمولی برای حل معادلات درجه سوم به‌دست آورده بود. اصطلاح «اعداد مختلط» به وسیلهٔ ریاضیدان بزرگ آلمانی کارل فردریش گاوس (ر.ك. پانوشت بخش ۴.۴) وضع شد وهم اوبود که راه را برای استفادهٔ عمومی وسیستماتیك ازاعداد مختلط بازکرد.

ضرب با قاعدهٔ

$$z_1 z_2=(x_1,\ y_1)(x_2,\ y_2)=(x_1 x_2-y_1 y_2,\ x_1 y_2+x_2 y_1) \quad (۲)$$

تعریف می‌شود. در دنبالهٔ بحث راجع به این اعمال حسابی بیشتر صحبت می‌کنیم.

نمایش به صورت $z=x+iy$

عدد مختلطی که قسمت موهومی آن صفر باشد به‌صورت $(x, 0)$ است. برای این اعداد از روابط (۱) و (۲) به‌آسانی نتیجه می‌شود، که مانند اعداد حقیقی،

$$(x_1,\ 0)+(x_2,\ 0)=(x_1+x_2,\ 0)$$

$$(x_1,\ 0)(x_2,\ 0)=(x_1 x_2,\ 0)$$

این موضوع ما را وسوسه می‌کند که $(x, 0)$ را با عدد حقیقی x یکی بگیریم. از این‌رو دستگاه اعداد مختلط گسترشی از دستگاه اعداد حقیقی است. به‌علاوه، عدد مختلط

$$i=(0,\ 1)$$

یکهٔ موهومی نامیده می‌شود. بنا به (۲)، به‌ازای هر y حقیقی داریم

$$iy=(0,\ 1)(y,\ 0)=(0,\ y)\ .$$

توجه کنید که، بنا به (۱)، برای $z=(x, y)$ داریم

$$(x,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ y)\ ,$$

با قراردادن x به‌جای $(x, 0)$ و با استفاده از $iy=(0, y)$، به‌شکل مناسب

$$z=x+iy$$

می‌رسیم، شکلی که می‌توان گفت درعمل همیشه به‌کار می‌رود. یک خاصیت مهم i این است که

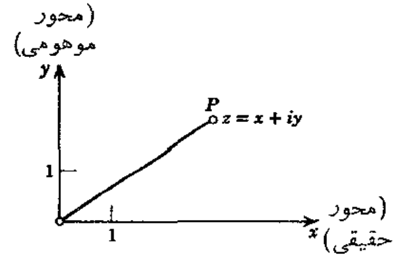
$$i^2=-1 \quad (۳)$$

این نتیجه از (۲) به‌دست می‌آید. در واقع، $i^2=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)=-1$.

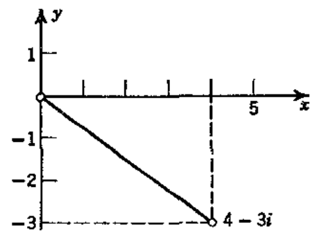
صفحهٔ مختلط

در اینجا از نمایش هندسی اعداد مختلط به‌صورت نقاطی در صفحه صحبت می‌کنیم. چنین نمایشی از نظر کاربردی اهمیت بسیار دارد. ایدهٔ این کار بسیار ساده و طبیعی است. دو محور مختصات عمود برهم انتخاب می‌کنیم، محور افقی x، که **محور حقیقی** نامیده می‌شود، و محور قائم y که آن‌را **محور موهومی** می‌نامیم. واحد طول را برای هر دو محور یکسان

می گیریم (شکل ۲۵۲). این دستگاه را **دستگاه مختصات دکارتی**[1] می‌نامند. حال $z=(x, y)=x+iy$ را مانند نقطهٔ P با مختصات x و y رسم می‌کنیم. صفحهٔ xy را، که در آن اعداد مختلط بدین‌طریق نمایش داده می‌شوند، **صفحهٔ مختلط** یا **نمودار آرگان**[2] می‌نامند.



شکل ۲۵۲. صفحهٔ مختلط



شکل ۲۵۳. عدد $۴-۳i$ درصفحهٔ مختلط

به‌جای اینکه بگوییم «نقطه‌ای که درصفحهٔ مختلط با z نمایش‌داده‌شده‌است» به‌اختصار می‌گوییم «نقطهٔ z درصفحهٔ مختلط». این اختصار اشتباهی‌را سبب نمی‌شود.

اعمال حسابی

اکنون می‌توانیم از نمادگذاری $z=x+iy$ و صفحهٔ مختلط استفاده کنیم.

جمع. مجموع z_1+z_2 (۱) را می‌توان به‌صورت

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{۴}$$

نوشت. می‌بینیم که جمع اعداد مختلط با قانون متوازی‌الاضلاع که درمکانیك جمع نیروها را باآن انجام می‌دهند مطابقت دارد (شکل ۲۵۴).

تفریق. این عمل به‌عنوان معکوس عمل‌جمع تعریف می‌شود، یعنی، تفاضل z_1-z_2 عدد مختلط z است به‌طوری که $z_1=z+z_2$. بدیهی‌است (ر.ك. شکل ۲۵۵)

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \tag{۵}$$

ضرب. حاصل‌ضرب z_1z_2 (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

---

۱. این نامگذاری به افتخار فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی **رناتوس کارتیسیوس** Renatus Cartesius (لاتینی‌شدهٔ رنه دکارت René Descartes (۱۵۹۶ـ۱۶۵۰))، که هندسه تحلیلی را اختراع کرد، صورت گرفته است.

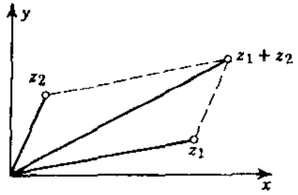
۲. **ژان ربرت آرگان** Jean Robert Argand (۱۷۶۸ـ۱۸۲۲)، ریاضیدان فرانسوی. مقالهٔ آرگان دربارهٔ صفحهٔ مختلط در۱۸۰۶، سه سال پس ازانتشار مقالهٔ مشابهی ازریاضیدان نروژی **کاسپار وسل** Caspar Wessel (۱۷۴۵ـ۱۸۱۸)، منتشر شد.

$$(۶)\qquad z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

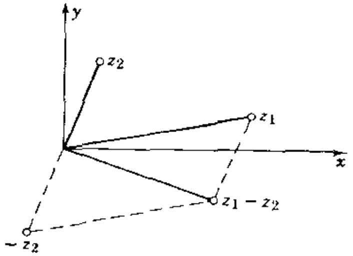
به‌خاطر سپردن فرمول بالا ساده‌است زیرا این فرمول به‌طور صوری از قواعد حساب اعداد حقیقی و با استفاده از (۳)، یعنی $i^2=ii=-1$ ، به‌دست آمده است.

تقسیم. این عمل به عنوان معکوس عمل ضرب تعریف می‌شود؛ خارج قسمت $z=z_1/z_2$ عدد مختلط $z=x+iy$ است به‌طوری که

$$(۷)\qquad z_1=zz_2=(x+iy)(x_2+iy_2)\qquad (z_2\neq 0)$$



شکل ۲۵۴. جمع اعداد مختلط



شکل ۲۵۵. تفریق اعداد مختلط

نشان می‌دهیم که به ازای $z_2\neq 0$ خارج قسمت $z=x+iy=z_1/z_2$ عبارت است از

$$(۸^*)\qquad x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\qquad (z_2\neq 0)$$

قاعدهٔ عملی برای به‌دست آوردن (۸*) ضرب کردن صورت و مخرج خارج‌قسمت z_1/z_2 در x_2-iy_2 و ساده کردن حاصل‌ضرب است:

$$(۸)\quad z=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

مثلاً، اگر $z_1=2-3i$ و $z_2=-5+i$ ، آنگاه

$$\frac{2-3i}{-5+i}=\frac{(2-3i)(-5-i)}{(-5+i)(-5-i)}=\frac{-10-2i+15i-3}{25+1}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

نتیجه‌ای که خواننده می‌تواند با نشان‌دادن

$$zz_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)(-5+i)=2-3i=z_1$$

آن‌را امتحان کند. یك اثبات (۸*) به‌ترتیب زیر صورت می‌گیرد. از (۶) می‌بینیم که (۷) را می‌توان نوشت

$$x_1 + i y_1 = (x_2 x - y_2 y) + i(y_2 x + x_2 y)$$

بنا به تعریف تساوی، قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی دوطرف باید باهم مساوی باشند:

$$x_1 = x_2 x - y_2 y$$

$$y_1 = y_2 x + x_2 y$$

این یك دستگاه دومعادله‌ای خطی بامجهولات x و y است. به‌فرض آن‌که x_2 و y_2 هر دو صفر نباشند (اختصاراً می‌نویسیم $z_2 \neq 0$)، جواب یکتای (*۸) را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱. جمع، تفریق، ضرب، تقسیم

فرض می‌کنیم $z_1 = 2 - 3i$ و $z_2 = -5 + i$. دراین صورت

$$z_1 + z_2 = -3 - 2i, \quad z_1 - z_2 = 7 - 4i, \quad z_1 z_2 = -7 + 17i$$

$$z_1 / z_2 = (-1 + i)/2$$

خواص اعمال حسابی

بنابر قوانین معروف اعداد حقیقی قوانین زیر را برای اعداد مختلط دلخواه z_1 ، z_2، z_3 به‌دست می‌آوریم

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \end{aligned}\right\} \text{(قوانین جابه‌جایی)}$$

$$\left.\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \end{aligned}\right\} \text{(قوانین انجمنی)}$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \text{(قانون پخش‌پذیری)} \quad (9)$$

$$0 + z = z + 0 = z$$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

$$z \times 1 = z$$

که $0 = (0, 0)$ و $-z = -x - iy$.

اعداد مختلط مزدوج

فرض کنید $z = x + iy$ یك‌عدد مختلط باشد. دراین‌صورت $x - iy$ را مزدوج z نامیده، با $\bar{z}$ نشان می‌دهند. بنابراین،

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

مثلاً، مزدوج $z=۵+۲i$ می‌شود $\bar{z}=۵-۲i$ (شکل ۲۵۶). از این‌گذشته با جمع و تفریق کردن نتیجه می گیریم

$$z+\bar{z}=۲x, \quad z-\bar{z}=۲iy$$

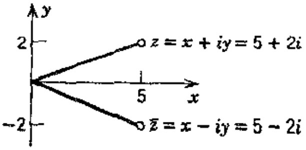
ازاینجا به‌فرمولهای مهم زیر می‌رسیم

$$\operatorname{Re} z=x=\frac{۱}{۲}(z+\bar{z}), \quad \operatorname{Im} z=y=\frac{۱}{۲i}(z-\bar{z}) \tag{۱۰}$$

درحالت خاص، درمورد عدد حقیقی $z=x$ داریم $z=\bar{z}$. درمورد $z=۰+iy=iy$ داریم $\bar{z}=-z$. چنین عددی که قسمت حقیقی‌آن صفراست **عدد موهومی محض** نامیده می‌شود. این عدد متناظر با نقطه‌ای واقع بر محور موهومی است.

همچنین داریم

$$\begin{aligned} &\overline{(z_۱+z_۲)}=\bar{z}_۱+\bar{z}_۲, \quad \overline{(z_۱-z_۲)}=\bar{z}_۱-\bar{z}_۲ \\ &\overline{(z_۱ z_۲)}=\bar{z}_۱\bar{z}_۲, \quad \overline{\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right)}=\frac{\bar{z}_۱}{\bar{z}_۲} \end{aligned} \tag{۱۱}$$



شکل ۲۵۶. اعداد مختلط مزدوج

مسائل بخش ۱۰۱۲

۱. **(توانهای یکهٔ موهومی)** نشان دهید که

$$\begin{aligned} &i^۲=-۱, \quad i^۳=-i, \quad i^۴=۱, \quad i^۵=i, \quad \ldots \\ &\frac{۱}{i}=-i, \quad \frac{۱}{i^۲}=-۱, \frac{۱}{i^۳}=i, \; \ldots \end{aligned} \tag{۱۲}$$

فرض کنید $z_۱=۳+۴i$ و $z_۲=۵-۲i$. مقادیر زیر را (به‌صورت $x+iy$) پیدا کنید

۲. $(z_۱-z_۲)^۲$ **۳.** $z_۱/z_۲$ **۴.** $۱/z_۱^۲$ **۵.** $z_۲/۲z_۱$

مطلوب است

۶. $\operatorname{Re}\frac{۱}{۲+i}$ ۷. $\operatorname{Im}\frac{۲+i}{۳+۴i}$ ۸. $\operatorname{Re} z^{۳}$ ۹. $\operatorname{Im} z^{۴}$

۱۰. $\operatorname{Re}\frac{(۱+i)^{۲}}{۳+۲i}$ ۱۱. $\operatorname{Im}\frac{۲-i}{۴-۳i}$ ۱۲. $\operatorname{Im}\frac{۱}{z^{۲}}$ ۱۳. $\operatorname{Re}\frac{z}{\bar{z}}$

۱۴. قوانین جابه‌جایی (۹) را ثابت کنید.

۱۵. قوانین انجمنی (۹) را ثابت کنید.

۱۶. قانون پخش‌پذیری (۹) را ثابت کنید.

۱۷. هرگاه حاصل ضرب دو عدد مختلط صفر باشد نشان دهید که حداقل یکی از دو عدد صفر است.

ثابت کنید:

۱۸. هرعدد با مزدوج مزدوج خودش برابراست.

۱۹. $\overline{iz}=-i\bar{z}$

۲۰. z حقیقی است اگر و تنها اگر $\bar{z}=z$.

۲۱. z موهومی محض است اگر وتنها اگر $\bar{z}=-z$.

۲۲. z حقیقی یا موهومی محض است اگر وتنها اگر $(\bar{z})^{۲}=z^{۲}$

۲۳. فرمولهای (۱۱) را.

۲۴. $\operatorname{Re}(iz)=-\operatorname{Im} z$ ، $\operatorname{Im}(iz)=\operatorname{Re} z$.

۲۵. فرمولهایی شبیه فرمولهای مسئلهٔ ۲۴ برای $\operatorname{Re}(\overline{iz})$ و $\operatorname{Im}(\overline{iz})$ بیابید.

۲.۱۲ شکل قطبی اعداد مختلط. نامساوی مثلث

مختصات قطبی r ، θ درصفحهٔ مختلط با روابط زیر معرفی می‌شوند

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \tag{۱}$$

دراین‌صورت هرعدد مختلط $z=x+iy\neq ۰$ را می‌توان چنین نوشت:

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{۲}$$

این را **شکل قطبی** و یا شکل مثلثاتی عدد مختلط می‌نامند. r را **قدر مطلق** یا **مدول** z نامیده، با $|z|$ نشان می‌دهند. بنابراین (شکل ۲۵۷)

$$|z| = r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} = \sqrt{z\bar{z}} \qquad (\geqslant ۰) \tag{۳}$$

زاویهٔ جهت‌دار بین محــور xهای مثبت و OP را **آوند** (آرگومان) z نامیده، با $\arg z$ نمایش می‌دهند؛ در این کتاب زوایا برحسب رادیان اندازه‌گیری خواهند شد و جهت مثبت آنها عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت فرض می‌شود. نظیر مثلثات داریم

$$\arg z = \theta = \arcsin\frac{y}{r} = \arccos\frac{x}{r} = \arctan\frac{y}{x} \tag{۴}$$

توجه کنید که به‌ازای $z = ۰$ زاویهٔ $\theta = \arg z$ تعریف‌شده نیست، به‌همین‌دلیل‌است که در بالا شرط کردیم $z \neq ۰$.

ازنظرهندسی، $|z|$ فاصلهٔ z از مبدأ است (شکل ۲۵۷). لذا نامساوی

$$|z_۱| > |z_۲|$$

بدین‌معنی است که نقطهٔ $z_۱$ نسبت‌به نقطهٔ $z_۲$ از مبدأ دورتر است، و $|z_۱ - z_۲|$ فاصلهٔ بین نقاط $z_۱$ و $z_۲$ است (شکل ۲۵۸).

ضمنــاً متذکر می‌شویم که برای اعــداد مختلط (اگــر روی محور حقیقی نباشند) نامساویهایی نظیر $z_۱ < z_۲$ یا $z_۱ \geqslant z_۲$ معنی ندارد.

برای $z(\neq ۰)$ مفروض، آوند θ بامقادیری که اختلاف آنها ازهم مضارب صحیح ۲π است مشخص می‌شود. مقداری از θ که درفاصلهٔ

$$-\pi < \theta \leqslant \pi$$

قراردارد **مقدار اصلی** آوند z نام دارد.

مثال ۱. شکل قطبی اعداد مختلط. مقدار اصلی

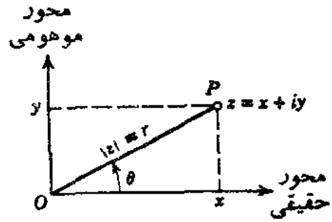
فرض‌کنید $z = ۱ + i$. دراین‌صورت

$$z = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right), \quad |z| = \sqrt{۲}, \quad \arg z = \frac{\pi}{۴} \pm ۲n\pi \ \ (n = ۰, ۱, \dots)$$

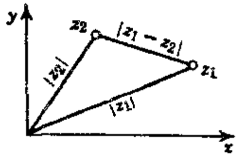
مقدار اصلی $\arg z$ برابر $\frac{\pi}{۴}$ است (شکل ۲۵۹).

مثال ۲. شکل قطبی اعداد مختلط. مقدار اصلی

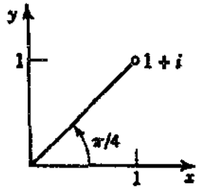
فرض‌کنید $z = ۳ + ۳\sqrt{۳}\, i$. دراین‌صورت $z = ۶\left(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳}\right)$، قدرمطلق z برابراست با $|z| = ۶$، و مقداراصلی $\arg z$ برابراست با $\frac{\pi}{۳}$. ▲



شکل ۲۵۷. صفحه مختلط، شکل قطبی عدد مختلط



شکل ۲۵۸. فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحهٔ مختلط



شکل ۲۵۹. مثال ۱

شکل قطبی اعداد مختلط مخصوصاً درمحاسبهٔ ضرب وتقسیم مفید است، فرض کنید

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \quad \text{و} \quad z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

بنا بر (۶)، بخش ۱.۱۲، حاصل‌ضرب z_1 و z_2 عبارت است‌از

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

با استفاده از قضایای معروف مربوط به سینوس و کسینوس مجموع، می‌توان نوشت

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \qquad (۵)$$

از اینجا قواعد مهم زیر حاصل می‌شود:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad (۶)$$

و

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (\text{صرف‌نظر از مضارب } 2\pi) \qquad (۷)$$

به‌طریقی مشابه، ازتعریف تقسیم نتیجه می گیریم که

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (۸)$$

و

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \quad (\text{صرف‌نظر از مضارب } 2\pi) \qquad (۹)$$

مثال ۳. فرمول دموآور

از (۶) و (۷) به دست می‌آوریم

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

و ازاینجا فرمول زیر، که مشهور به **فرمول دموآور**[1] است، نتیجه می‌شود:

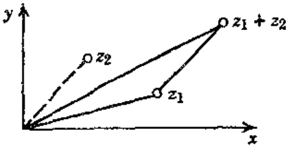
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad \blacktriangle$$

نامساویها

برای اعداد مختلط دلخواه، **نامساوی مثلثی** (شکل ۲۶۰) مهم

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{10}$$

را داریم که بکرات از آن استفاده خواهیم کرد. از آنجا که نقاط ۰ ، z_1 و z_1+z_2 رئوس مثلثی[2] (شکل ۲۶۰) به اضلاع $|z_1|$ ، $|z_2|$ و $|z_1+z_2|$ را تشکیل می‌دهند و یك ضلع نمی‌تواند ازمجموع دوضلع دیگر بزرگتر باشد، این نامساوی نتیجه‌می‌شود. اثبات‌صوری به‌خواننده وا گذار می‌شود (مسئلهٔ ۱۹).



شکل ۲۶۰. نامساوی مثلثی

با روش استقرا می‌توان نامساوی مثلثی را به هر جمع دلخواهی تعمیم داد:

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \tag{11}$$

یعنی، قدرمطلق مجموع چندعدد مختلط حداکثر برابر بامجموع قدرمطلقهای آن اعداد است.
نامساویهای مفید دیگر عبارتند از

$$|\mathrm{Re}\, z|\leqslant|z|,\quad |\mathrm{Im}\, z|\leqslant|z| \tag{12}$$

این نامساویها ازآنجا نتیجه می‌شوند که به‌ازای هر $z=x+iy$ داریم

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant|x|$ و همین‌طور $|z|\geqslant|y|$.

مسائل بخش ۲.۱۲

مطلوب است

۱. $|1+i|^2$ ۲. $|-3i|$ ۳. $|\cos\theta+i\sin\theta|$

---

۱. آبراهام دموآور Abraham De Moivre (۱۶۶۷–۱۷۵۴)، ریاضیدان فرانسوی که کمیتهای موهومی را وارد مثلثات کرد و دربارهٔ نظریهٔ احتمال ریاضی کار کرد.
۲. هرگاه z_1 و z_2 برروی خطی که ازمبدأ می‌گذرد واقع باشند این مثلث تبهگون می‌شود.

۴. $\left|\frac{1+4i}{4+i}\right|$ ۵. $\frac{z-1}{z+1}$ ۶. $\left|\frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3}\right|$ ۷. $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|$

مقدار اصلی آوند اعداد زیر را تعیین کنید:

۸. -3 ۹. $3+3i$ ۱۰. $1-\sqrt{3}i$ ۱۱. $-4i$

اعداد زیر را به شکل قطبی نمایش دهید:

۱۲. $-3-3i$ ۱۳. -5 ۱۴. $-4i$ ۱۵. $1/(4+3i)$

۱۶. درستی نامساوی مثلثی را برای $z_1=-1-i$ و $z_2=-2+3i$ تحقیق کنید.

۱۷. درستی نامساوی مثلثی را به‌ازای $z_1=5+2i$ و $z_2=1-4i$ تحقیق کنید.

۱۸. تحت چه‌شرایطی نامساوی مثلثی به‌تساوی تبدیل می‌شود؟

۱۹. نامساوی مثلثی را ثابت کنید.

۲۰. با استفاده از نامساوی مثلثی ثابت کنید که $|z_1+z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|$.

۲۱. نشان دهید که $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |x|+|y|$. مثال بزنید.

۲۲. نشان دهید که $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

۲۳. درستی رابطهٔ (۱۲) را به‌ازای $z=(4+5i)^2$ تحقیق کنید.

۲۴. (**ضرب در i**) نشان‌دهید که ضرب یك‌عدد مختلط در i بردار نظیر آن‌را به‌اندازهٔ $\pi/2$، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، دوران می‌دهد.

۲۵. با استفاده‌از شکل قطبی اعداد مختلط، یك تعبیر هندسی برای حاصل‌ضرب دوعدد‌مختلط پیشنهاد کنید. مطلب را با یك مثال، مثلا $(1+i)(3+2i)$ روشن سازید.

۳.۱۲ منحنیها و نواحی در صفحهٔ مختلط

منحنیها و نواحی واقع‌در صفحهٔ مختلط درکارهای بعدی، بسیارمورد نیاز خواهند بود. حال برای اینکه وارد بحث شویم، بعضی انواع مهم منحنیها و نواحی و طـرز نمایش‌آنهـا با معادلات و نامساویها را بررسی می کنیم. این‌امر به‌ما کمك خواهدکرد تا با صفحهٔ مختلط بیشتر آشنا شویم.

چون فاصلهٔ بین دونقطهٔ z و a عبارت‌است‌از $|z-a|$، نتیجه می گیریم که دایرهٔ به‌شعاع ρ، و مرکز a (شکل ۲۶۱)، را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$|z-a|=\rho \qquad (۱)$$

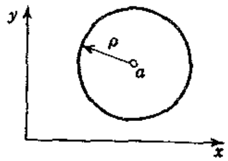
درنتیجه، نامساوی

$$|z-a|<\rho \qquad (۲)$$

درمورد هر نقطهٔ z داخل C برقرار است؛ یعنی، (۲) نقاط درونی C را نمایش می‌دهد. چنین ناحیه‌ای را **قرص دایره‌ای** می‌نامند، یا، دقیقتر بگوییم، قرص دایره‌ای باز، در مقابل قرص دایره‌ای بستهٔ

$$|z-a|\leqslant\rho,$$

که متشکل از نقاط درونی C و خود C است. و قرص باز (۲) یك **همسایگی** از نقطهٔ a نیز نامیده می‌شود. واضح است که a بینهایت از این همسایگیها دارد، که هریك متناظر با مقدار معینی از $\rho(>0)$ است.



شکل ۲۶۱. دایره در صفحهٔ مختلط

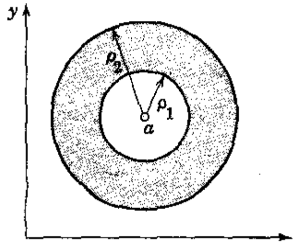
به‌همین نحو، نامساوی

$$|z-a|>\rho$$

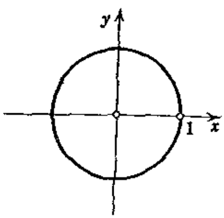
نقاط بیرونی دایرهٔ C را نمایش می‌دهد. به‌علاوه ناحیهٔ بین دو دایرهٔ متحدالمرکز به‌شعاعهای ρ_1 و $\rho_2(>\rho_1)$ را می‌توان به‌صورت

$$\rho_1<|z-a|<\rho_2,$$

که در آن a مرکز دوایر است، نمایش داد. چنین ناحیه‌ای را حلقهٔ دایره‌ای باز یا **طوق** باز می‌نامند (شکل ۲۶۲).



شکل ۲۶۲. طوق درصفحهٔ مختلط



شکل ۲۶۳. دایرهٔ یکه

معادلهٔ

$$|z|=1$$

دایرهٔ یکه را نمایش می‌دهد، یعنی، دایره‌ای به‌شعاع ۱ را که مرکز آن درمبدأ است (شکل ۲۶۳) این دایره درمباحث مختلف ریاضی نقش مهمی دارد.

مثال ۱. قرص دایره‌ای

ناحیهٔ $|z-3+i|\leqslant 4$ را درصفحهٔ مختلط مشخص کنید.

حل. این نامساوی برای هرمقدار z که فاصلهٔ آن از $a=3-i$ بیشتر از ۴ نباشد، دقیقاً برقرار است لذا ناحیهٔ موردنظر یك قرص دایره‌ای بسته به‌شعاع ۴ و به‌مرکز $3-i$ است.

مثال ۲. دایرهٔ یکه و قرص یکه

هریك از نواحی زیر را مشخص کنید

(الف) $|z|<1$ (ب) $|z|\leqslant 1$ (پ) $|z|>1$.

حل. (الف) نقاط درونی دایرهٔ واحد. این ناحیه را قرص یکهٔ باز گویند.
(ب) دایرهٔ واحد ونقاط درونی آن. این ناحیه را قرص یکهٔ بسته گویند.
(پ) نقاط بیرونی دایرهٔ یکه.

آشنایی کامل دانشجو با نمایش منحنیها ونواحی درصفحهٔ مختلط حائزاهمیت‌است. بنابراین باید به‌مسائلی که دراین بخش مطرح‌شده توجه خاص مبذول داشت تا ازمشکلاتی که ممکن‌است بعداً پیش‌آید، کاسته شود.

سرانجام، به‌تعریف مفاهیمی می‌پردازیم که ازاهمیت‌کلی برخوردارند و در کارهای بعدی مورد استفاده قرار می گیرند.

اصطلاح **مجموعهٔ نقاط** درصفحهٔ مختلط به هرنوع گردآورده‌ای ازنقاط، متناهی یا نامتناهی، اطلاق می‌شود. به‌عنوان‌مثال، جوابهای یك‌معادلهٔ درجه دوم، نقاط روی یك‌خط، ونقاط داخل یك دایره مجموعه‌اند.

مجموعهٔ S را **باز** نامند هرگاه هرنقطهٔ S همسایگی‌ای داشته باشدکه هرنقطهٔ ازآن متعلق به S باشد. مثلا، نقاط درونی یك دایره ویا یك مربـع مجموعه‌ای بـاز را تشکیل می‌دهند، و همین‌طور نقاط «نیم‌صفحهٔ راست» $\operatorname{Re} z=x>0$. مجموعهٔ متشکل از نقاط درونی دایرهٔ C و روی C («قرص دایره‌ای بسته») باز نیست، زیرا هیچ همسایگی نقاط روی C تماماً درمجموعه قرار نمی گیرد.

مجموعهٔ S در صفحهٔ مختلط را **بسته** نامنـد هرگاه مکمل آن بـاز باشد. **مکمل** مجموعهٔ S درصفحهٔ مختلط مجموعهٔ تمام‌نقاطی ازصفحهٔ مختلط است که متعلق‌به S نباشند.

به‌عنوان مثال، نقاط داخل و روی دایرهٔیک مجموعه‌ای بسته تشکیل می‌دهند (مثال ۲ را نیز ببینید).

یك مجموعه را **کراندار** نامند هر گاه تمام نقاطش در دایره‌ای، باشعاع به‌قدر کافی بزرگ، قرار داشته‌باشند. به‌عنوان‌مثال، نقاط‌داخل یك مستطیل مجموعه‌ای کراندار تشکیل می‌دهند، درحالی‌که نقاط روی یك خط راست مجموعه‌ای کراندار تشکیل نمی‌دهند.

مجموعهٔ باز S را **همبند** نامند هر گاه هردونقطهٔ‌دلخواه آن‌را بتوان‌با خط‌شکسته‌ای که از تعدادی متناهی پاره‌خط تشکیل شده‌است به‌طوری، که تمام‌آنها متعلق‌به S باشد، به هم وصل‌کرد. مجموعهٔ همبند باز را **حوزه** می‌نامند. لذا نقاط درونی دایره حوزه است.

نقطهٔ کرانه‌ای مجموعهٔ S نقطه‌ای است‌که هرهمسایگی‌آن هم شامل نقاطی‌است‌که به S متعلقند وهم شامل نقاطی است‌که به S تعلق ندارند. مثلا، نقاط‌کرانه‌ای یك طوق، نقاط‌واقع‌بر روی دو دایرهٔ کرانه‌ای‌آن طوق هستند. واضح است که هرگاه مجموعهٔ S باز باشد آنگاه هیچ‌نقطهٔ‌کرانه‌ای به S تعلق ندارد، هرگاه S بسته باشد آنگاه هرنقطهٔ کرانه‌ای به S تعلق دارد.

ناحیه مجموعه‌ای است متشکل‌از یك حوزه و، شاید، برخی ویا تمام‌نقاط‌کرانه‌ای آن حوزه. (یادآوری می‌کنیم که بعضی‌از مؤلفین اصطلاح «ناحیه» را برای آنچه ما حوزه می‌خوانیم [به‌تبعیت از اصطلاح متعارف‌امروزی] به‌کار می‌برند، و دیگران بین این دو اصطلاح تمایزی قائل نیستند).

مسائل بخش ۱۲‏.۳

مکانهای زیررا مشخص‌کنید وآنهارا رسم نمایید:

۱. $\operatorname{Im} z \geqslant -1$　۲. $\operatorname{Im}(z^2) \leqslant 2$　۳. $\operatorname{Re}(z^2) \geqslant 1$

۴. $|\arg z| < \pi/4$　۵. $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$　۶. $|1/z| > 1$

۷. $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = 2$　۸. $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| = 1$　۹. $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = 1$

۱۰. $\operatorname{Im}\dfrac{z+1}{z-1} \leqslant 2$　۱۱. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} > 1$　۱۲. $\operatorname{Im}\dfrac{2z+1}{4z-4} \leqslant 1$

۱۳. فرض‌کنید z_1 و z_2 اعداد مختلط دلخواهی باشند. مکان هندسی نقاط $\alpha z_1 + \beta z_2$، که درآن α و β حقیقی و غیرمنفی هستند و $\alpha+\beta=1$ چیست؟

۱۴. نشان دهیدکه هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را می‌توان به‌صورت $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ نوشت.

۱۵. معادلهٔ $|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$ نمایش‌دهندهٔ یك بیضی‌است. (الف) این‌مطلب

را با بحثی هندسی نشان دهید. (ب) آن‌را به‌طریق جبری نشان دهید.

۴.۱۲ تابع مختلط. حد. مشتق. تابع تحلیلی

اکنون بعضی‌از مفاهیم اساسی آنالیز مختلط را مطرح می‌کنیم، یعنی، توابع یك متغیرمختلط وحدود مشتق چنین توابعی رابررسی می‌کنیم. یادآور می‌شویم‌که این‌مفاهیم شبیه مفاهیمی است‌که درحساب دیفرانسیل و انتگرال بیان می‌شوند. سپس توابع تحلیلی (مختلط) را تعریف می‌کنیم. این توابع درآنالیز مختلط نقش‌اصلی را بازی می‌کنند.

بحث را با تعریف تابعی از یك متغیر مختلط شروع می‌کنیم.

فرض‌کنید S مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد. منظور ازیك **تابع** تعریف شده بر S، قاعده‌ای است که به هر z در S یك عدد مختلط یکتای w نسبت دهد. دراین‌صورت می‌نویسیم

$$w=f(z)$$

یا $w=g(z)$، وغیره، یا بعضی مواقع به‌طورساده $w(z)$. اینجا z در S تغییر می‌کند و **متغیر مختلط** نامیده می‌شود. مجموعهٔ S را حوزهٔ تعریف[1] $f(z)$ می‌نامند. وقتی که z در S تغییر کند، مجموعهٔ اعداد مختلطی راکه $w=f(z)$ اختیار می‌کند برد مقادیر تابع $w=f(z)$ می‌گویند.

فرض کنید u و v قسمتهای حقیقی و موهومی w باشند. دراین صورت، چون w وابسته به $z=x+iy$ است، واضح است که درحالت کلی u و همین‌طور v به x و y بستگی دارند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y),$$

و این نشان می‌دهد که تابع مختلط $f(z)$ با دو تابع حقیقی $u(x,\ y)$ و $v(x,\ y)$، که هریك به دومتغیرحقیقی x و y بستگی دارند، هم‌ارز است.

---

۱. این جمله‌ای استاندارد اما نارساست زیرا نیازی نیست‌که S حوزه‌ای طبق آنچه در بخش ۳.۱۲ تعریف‌شد (یعنی، مجموعه‌ای همبند و باز) باشد. گرچه دربسیاری حالات چنین‌است. در نوشته‌های مربوط به‌آنالیزمختلط گاه روابطی به‌کارمی‌رود که ممکن‌است به‌یك مقدار z بیش از یك مقدار w نظیر کنند و برحسب عادت چنین رابطه‌ای را تابع می‌نامند («تابع چند مقداری»). ما این قرارداد را نمی‌پذیریم بلکه فرض می‌کنیم تمام توابعی که به‌کار می‌بریم روابطی **تك مقداری** هستند، یعنی، توابع معمولیند.

$f(z)$ به مفهوم مقدار f در z است، اما به‌غلط مصطلح شده است‌که به‌آن تابع $f(z)$ می‌گویند (به‌جای تابع f)، وبدین‌طریق نمادی‌را هم‌که برای متغیرمستقل به‌کارمی‌برند معرفی می‌کنند.

مثال ۱. تابع یك متغیر مختلط

فرض کنید

$$w=f(z)=z^{۲}+۳z.$$

در این صورت

$$v(x, y)=\operatorname{Im}f(z)=۲xy+۳y \quad \text{و} \quad u(x, y)=\operatorname{Re}f(z)=x^{۲}-y^{۲}+۳x$$

در $z=x+iy=۱+۳i$ تابع دارای مقدار زیر است:

$$(۱+۳i)^{۲}+۳(۱+۳i)=-۵+۱۵i,$$

و می‌توان نوشت

$$f(۱+۳i)=-۵+۱۵i,\ u(۱, ۳)=-۵,\ v(۱, ۳)=۱۵$$

به‌همین‌طریق $f(۱+i)=۳+۵i$، وغیره. بدیهی‌است که این‌تابع به‌ازای تمام مقادیر z تعریف شده است.

مثال ۲. تابع یك متغیر مختلط

مقدار $f(z)=۳\bar{z}=۳x-۳iy$ را به‌ازای $z=۲+۴i$ تعیین‌کنید.

حل. چون $x=۲$ و $y=۴$ ، نتیجه می گیریم $f(۲+۴i)=۶-۱۲i$. ▲

گویند تابع $f(z)$ وقتی z به سمت $z_{\circ}$ میل می‌کند دارای **حد** l است هر گاه $f(z)$ دریك همسایگی از $z_{\circ}$ (محتملا جز درخود $z_{\circ}$) تعریف‌شده باشد و اگر به‌ازای هر عدد مثبت حقیقی ε (مهم نیست چقدر کوچك باشد اما صفر نباشد) بتوان یك عدد حقیقی مثبت δ پیدا کرد به‌قسمی‌که به‌ازای تمام‌مقادیر $z\neq z_{\circ}$ درقرص $|z-z_{\circ}|<\delta$،

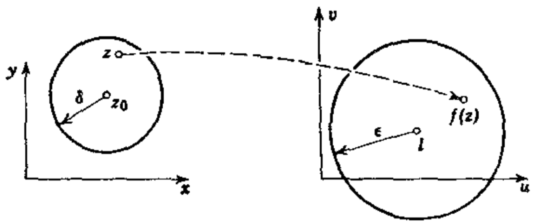
$$|f(z)-l|<\varepsilon. \tag{۱}$$

این بدان‌معنی است که مقادیر $f(z)$ به ازای هر مقداری از z که به‌اندازهٔ کافی به $z_{\circ}$ نزدیك باشد هرقدرکه بخواهیم به l نزدیك هستند (شکل ۲۶۴) ، و می‌نویسیم

$$\lim_{z\to z_{\circ}} f(z)=l. \tag{۲}$$

خوب توجه‌کنید‌که بنا به‌این تعریف حد z می‌تواند ازطریق هر امتدادی درصفحهٔ مختلط به $z_{\circ}$ میل کند. درنتیجه این تعریف نسبت به‌تعریف حد درحساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی محدودیتهای بیشتری ایجاد می کند. (این موضوع را تشریح کنید!)
هر گاه حدی وجود داشته باشد یکتاست (ر.ك. مسئله ۱۲) .

تابع $f(z)$ را در $z=z_{\circ}$ **پیوسته** گویند اگر $f(z_{\circ})$ معین باشد و نیز



شکل ۲۶۴. حد

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) . \tag{۳}$$

توجه کنید که بنا به تعریف حد از اینجا لازم می‌آید که $f(z)$ لااقل در یك همسایگی z_0 معین باشد.

$f(z)$ را در یك حوزه پیوسته نامند اگر در هر نقطه از آن حوزه پیوسته باشد.

تابع $f(z)$ را در نقطهٔ $z = z_0$ **مشتقپذیر** گویند هرگاه حد

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{۴}$$

وجود داشته باشد. این حد را **مشتق** $f(z)$ درنقطهٔ $z = z_0$ نامند.

با قراردادن $z = z_0 + \Delta z$ داریم $\Delta z = z - z_0$ و می‌توانیم بنویسیم

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{۴'}$$

به خاطر داشته باشید که تعریف حد ایجاب می‌کند که $f(z)$ اقلا در یك همسایگی z_0 تعریف شده باشد. همین طور، بنا به همان تعریف، z از هر امتدادی می‌تواند به z_0 میل کند. ازاین‌رو مشتقپذیری در z_0 بدین معنی است که، ازهرمسیری که z به z_0 میل کند خارج قسمت (۴′) همیشه به مقدار مشخصی میل می‌کند و تمام این مقادیر مشخص بـا هم برابرند. این واقعیت در بررسیهای بعدی ما اهمیت زیادی دارد.

بنا به‌تعریف حد، معنی (۴′) این است که یك عدد مختلط $f'(z_0)$ وجـود دارد که به ازای آن درمقابل هر $\varepsilon > 0$ می‌توان یك $\delta > 0$ یافت به‌قسمی که

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad \text{وقتی که} \quad |z - z_0| < \delta . \tag{۵}$$

هر گـاه $f(z)$ در نقطهٔ z_0 مشتقپذیر باشد، در آن نقطه پیوسته هم هست (ر.ك. مسئلهٔ ۲۸).

مثال ۳. مشتقپذیری . مشتق

تابع $f(z)=z^{2}$ بـه‌ازای تمام مقادیر z مشتقپذیر بوده و مشتق آن $f'(z)=2z$ است زیرا

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^{2}-z^{2}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z \qquad \blacktriangle$$

تمام قواعد آشنای حساب دیفرانسیل حقیقی نظیر قاعدهٔ مشتقگیری از ثابت، توانهای صحیح z ، جمعها، حاصلضربها، وخارج قسمتهای توابع‌مشتقپذیر، وقاعدهٔ زنجیری درمورد مشتقگیری ازتابع تابع ، در مورد اعداد مختلط صادقند.

در واقع اثباتهای متناظر کلمه به کلمه همانندند.

مثال ۴. $\bar{z}$ مشتقپذیر نیست

توجه به این مطلب لازم است کـه توابع سادهٔ زیادی هستند کـه در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارند. مثلاً $f(z)=\bar{z}=x-iy$ چنین است. با قراردادن $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ داریم

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{[(x+\Delta x)-i(y+\Delta y)]-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \quad (6)$$

هرگاه $\Delta y=0$ ، آنگاه خارج قسمت فوق ۱ می‌شود. اگر $\Delta x=0$ ، مقدار فوق ۱ − است. بنابراین (۶) از مسیر I شکل ۲۶۵ بـه ۱+ و از مسیر II شکل ۲۶۵ به ۱ − میل می‌کند. بنابه تعریف حد (۶) وقتی که $\Delta z\to 0$ درهیچ zی وجود ندارد.

این مثال ممکن است تعجب آورباشد اما صرفاً نشان دهندهٔ این است که مشتقپذیری یك تابع مختلط شرط نسبتاً مشکلی است.

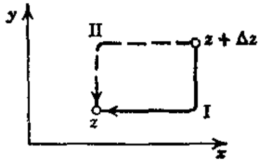
حال به هدف اصلی این بخش می‌رسیم و آن معرفی مفهوم زیر است.

تعریف (تحلیلی بودن)

تابع $f(z)$ را در حوزهٔ D تحلیلی نامند هرگاه $f(z)$ در تمـام نقاط D تعریف شده و مشتقپذیرباشد. تابع $f(z)$ را در نقطهٔ $z=z_0$ واقع در D تحلیلی نامند هرگاه $f(z)$ در یك همسایگی z_0 تحلیلی باشد (ر.ك. بخش ۱۲.۳).

بنابراین تحلیلی بودن $f(z)$ بدین معنی است‌که $f(z)$ درهرنقطه از یك همسایگی z_0 (منجمله خود z_0 زیرا ، بنابه تعریف ، z_0 نقطه‌ای از تمام همسایگیهایش هست) مشتق داشته باشد. انگیزهٔ تعریف مفهوم تحلیلی بودن این واقعیت است که از نظر عملی اینکه تابعی صرفاً در یك نقطه z_0 مشتقپذیر باشد اما در هیچ همسایگی آن نقطه مشتق نـداشته باشد جالب نیست.

اصطلاح قدیمیتر برای تحلیلی در D منظم در D و اصطلاح نوین آن هلوریخت در D است.



شکل ۷۶۵. مسیرها در مورد (۶)

همچنین اصطلاح **تابع تحلیلی** را بدون آنکه به حوزهٔ خاصی اشاره کنیم نیز به کار خواهیم برد؛ در این صورت منظور ما از این اصطلاح تابعی است که در یك حوزه مانند D تحلیلی است.

مثال ۵. چند جمله‌ای

توانهای صحیح ۱، z، $z^۲$، ... و کلیتر از آن، **چند جمله‌ایها**، یعنی توابعی به‌صورت

$$f(z)=c_۰+c_۱ z+c_۲ z^۲+\cdots+c_n z^n$$

که در آنها $c_۰$، ...، c_n ثابتهای مختلطند، در تمام صفحهٔ مختلط تحلیلی هستند. تابع $f(z)=۱/(۱-z)$ همه‌جا جز در $z=۱$ تحلیلی است.

آنالیز مختلط منحصراً به توابع تحلیلی می‌پردازد، واگرچه بسیاری از توابع ساده غیر تحلیلیند، مجموعهٔ متنوع عظیم‌توابع تحلیلی که باقی می‌ماند رشته‌ای از ریاضیات را به وجود می‌آورد که ازجنبهٔ نظری زیباترین و از دیدگاه عملی مفیدترین رشته ریاضی است.

مسائل بخش ۴۰۱۲

مطلوب است محاسبهٔ $f(۲+i)$، $f(۳i)$، $f(-۴+i)$ هرگاه $f(z)$ برابر باشد با

۱. $۳z^۲+z$ **۲.** $۱/z^۲$ **۳.** $(z+۱)/(z-۱)$

قسمتهای حقیقی و موهومی توابع زیر را پیدا کنید:

۴. $f(z)=۲z^۲-۳z$ **۵.** $f(z)=۱/(۱-z)$ **۶.** $f(z)=z^۳-z^۲+z$

فرض کنید z در ناحیهٔ R از صفحهٔ z تغییر می‌کند. ناحیه‌ای را (به طور دقیق) در صفحهٔ w پیدا کنید که مقادیر متناظر $w=f(z)$ در آن قرار می‌گیرد، نمودار هر دو ناحیه را رسم کنید.

۷. $f(z)=3z,\ |\arg z|<\pi/2$ ۸. $f(z)=1/z,\ \operatorname{Re} z>0$

۹. $f(z)=z^2,\ |z|>3$ ۱۰. $f(z)=z^3,\ |\arg z|\leqslant\pi/4$

۱۱. $f(z)=1/z^2,\ |\arg z|\leqslant\pi/4$

۱۲. هرگاه $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ وجود داشته باشد ، نشان دهید که این حد یکتاست.

۱۳. ثابت کنید که (۲) معادل با دو رابطهٔ زیر است :

$$\lim_{z\to z_0}\operatorname{Re} f(z)=\operatorname{Re} l,\qquad \lim_{z\to z_0}\operatorname{Im} f(z)=\operatorname{Im} l.$$

۱۴. هرگاه $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=l$ و $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=p$ نشان دهید که

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)+g(z)]=\lim_{z\to z_0} f(z)+\lim_{z\to z_0} g(z)=l+p,$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=\lim_{z\to z_0} f(z)\lim_{z\to z_0} g(z)=lp.$$

آیا توابع زیر در مبدأ پیوسته‌اند ؟

۱۵. $f(z)=\operatorname{Re} z/|z|$ وقتی که $z\neq 0$ ، $f(0)=0$

۱۶. $f(z)=\operatorname{Im} z/(1+|z|)$ وقتی که $z\neq 0$ ، $f(0)=0$

۱۷. $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2/|z|$ وقتی که $z\neq 0$ ، $f(0)=0$

۱۸. با استفاده از تعریف حد، نشان دهید که $f(z)=z^2$ پیوسته است.

نشان دهید که

۱۹. $[af(z)+bg(z)]'=af'(z)+bg'(z)$

۲۰. $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

از توابع زیر مشتق بگیرید

۲۱. $(z^2+1)^2$ ۲۲. $1/(1-z)$ ۲۳. $(z+1)^2/(z^2+1)$

مقدار مشتق توابع زیر را در z_0 حساب کنید :

۲۴. $f(z)=z^3-2z,\ z_0=1-i$ ۲۵. $f(z)=(z+2i)/(z-2i),\ z_0=3+i$

۲۶. $f(z)=(z^2-1)^2,\ z_0=i$

۲۷. $f(z)=iz^2+(1+i)z,\ z_0=-2+i$

۲۸. هرگاه $f(z)$ در z_0 مشتقپذیر باشد، نشان دهید که $f(z)$ در z_0 پیوسته است.

۲۹. نشان دهید که $f(z)=\operatorname{Re} z=x$ درهیچ zی مشتقپذیر نیست.

۳۱. نشان دهید کــه $f(z)=|z|^2$ فقط در $z=0$ مشتقپذیر است. راهنمایی. از رابطهٔ $|z+\Delta z|^2=(z+\Delta z)(\overline{z+\Delta z})$ استفاده کنید.

۵.۱۲ معادلات کوشی ـ ریمان. معادلهٔ لاپلاس

حال معیاری برای تحلیلی بودن تابع مختلط

$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y) \tag{1}$$

پیدامی کنیم، نشان می‌دهیم که اگر $f(z)$ درحوزهٔ D تحلیلی باشد، دراین صورت u و v درهرنقطه از D درمعادلات موسوم به کوشی ـ ریمان (۵) صدق می کنند؛ بالعکس[1] هرگاه u و v پیوسته بوده، مشتقات جزئی اولی که در هرنقطه از D در (۵) صدق می کنندداشته باشند، دراین صورت $f(z)$ در D تحلیلی است. این برنامهٔ ماست که تفصیل آن به شرح زیراست.

فرض کنید $f(z)$ دریك همسایگی نقطهٔ دلخواه مشخص z تعریف شده وپیوسته بوده و درآن z مشتقپذیر باشد. دراین صورت، بنا به تعریف، مشتق

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{2}$$

درآن نقطهٔ z وجود دارد. دراینجا Δz می‌تواند ازطریق هرمسیری دریك همسایگی از z به صفر میل کند. می‌توان نوشت $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$. با انتخاب مسیر I درشکل ۲۶۶ نخست فرض می‌کنیم $\Delta y\to 0$ و سپس $\Delta x\to 0$. وقتی Δy صفرشود، $\Delta z=\Delta x$، و بنا به (۱)،

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,\ y)+iv(x+\Delta x,\ y)-[u(x,\ y)+iv(x,\ y)]}{\Delta x}$$

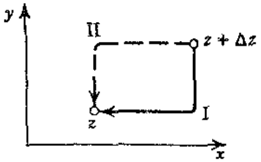
---

۱. این فرض را می‌توان ضعیفتر کرد، مرجع زیررا ببینید

D. Menchoff, *Les conditions de monogénéité*. Paris: Hermann, 1936

اثبات ما با این فرض قویتر که مشتقات جزئی اول u و v پیوسته‌اند صورت می‌گیرد.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,\, y)-u(x,\, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x,\, y)-v(x,\, y)}{\Delta x}$$



شکل ۲۶۶. مسیرها درمورد (۲)

چون $f'(z)$ وجود دارد و، دوحد حقیقی اخیر وجود دارند این دومشتقات جزئی u و v نسبت به x هستند. ازاین‌رو $f'(z)$ را می‌توان به صورت زیرنوشت:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{۳}$$

به همین نحو، هرگاه مسیر II شکل ۲۶۶ را برگزینیم، نخست فرض می‌کنیم $\Delta x \to 0$ وسپس $\Delta z \to 0$ وقتی Δx صفرشود، $\Delta z = i\Delta z$، و

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to x} \frac{u(x,\, y+\Delta y)-u(x,\, y)}{i\Delta z} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y};$$

یعنی،

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{۴}$$

زیرا $1/i = -i$. بنابراین وجود $f'(z)$ وجود چهار مشتق جزئی در (۳) و (۴) را ایجاب می‌کند.

مسلماً، هرگاه همان‌گونه‌که فرض کردیم، $f'(z)$ وجود داشته باشد، می‌توانیم آن را با استفاده از (۳) یا (۴) محاسبه‌کنیم. از این مهمتر، با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی (۳) و (۴) باهم ونیز مساوی قراردادن قسمتهای موهومی آنها به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{۵}$$

این معادلات بنیادی را **معادلات دیفرانسیل کوشی ـ ریمان**[۱] می‌نامند.

---

۱. ر.ك. پانوشت بخش۷.۲. **برنهارد ریمان** Bernhard Riemann (۱۸۲۶ ـ ۱۸۶۶)، ریاضیدان آلمانی، وی چیزی راکه می‌توان «درهیافت هندسی» به آنالیز مختلطش خواند بر پایهٔ معادلات‌کوشی ـ ریمان ونگاشت همدیسی توسعه‌داد ، درحالی‌که ریاضیدان آلمانی **کارل** ←

می‌توانیم نتایجی را که به دست‌آورده‌ایم به‌صورت زیر خلاصه کنیم.

قضیهٔ ۱ (معادلات کوشی ـ ریمان)

فرض کنید $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ دریک همسایگی نقطهٔ $z=x+iy$ تعریف شده و پیوسته باشد و درخود z مشتقپذیر باشد. دراین صورت مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v درآن نقطه وجود دارند و درمعادلات کوشی ـ ریمان (۵) صدق می‌کنند.

از این‌رو هرگاه $f(z)$ دریك حوزهٔ D تحلیلی باشد، مشتقات جزئی مزبور وجود داشته، درتمام نقاط D در (۵) صدق می‌کنند.

مثال ۱. معادلات کوشی ـ ریمان

تابع $f(z)=z^۲=x^۲-y^۲+۲ixy$ به‌ازای تمام مقادیر z تحلیلی است، و $f'(z)=۲z$ داریم $u=x^۲-y^۲$، $v=۲xy$،

$$\frac{\partial u}{\partial x}=۲x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-۲y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=۲y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=۲x,$$

ومعادلات کوشی ـ ریمان به‌ازای تمام مقادیر x و z صادقند. ▲

معادلات کوشی ـ ریمان معادلاتی بنیادی هستند. زیرا آنها نه‌تنها برای تحلیلی بودن یك تابع لازمند، بلکه کافی نیز هستند. دقیقتر، قضیهٔ زیر صادق است. (شرایط این قضیه برای تحلیلی بودن کافیند اما لازم نیستند. شرایطی با محدودیت کمتر در کتابی که در پانوشت ۱ صفحهٔ ۷۷۴ ذکر شده آمده است.)

قضیهٔ ۲ (معادلات کوشی ـ ریمان)

هرگاه دوتابع پیوستهٔ حقیقی $u(x, z)$ و $v(x, y)$ ازدومتغیرحقیقی x و y مشتقهای جزئی رتبه اول پیوسته‌ای که درحوزه‌ای مانند D درمعادلات کوشی ـ ریمان صدق می‌کنند داشته باشند، دراین صورت تابع مختلط $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ در D تحلیلی است.

اثبات. فرض کنید $P: (x, y)$ نقطهٔ مشخصی در D باشد. چون D یك حوزه است یك‌همسایگی از P را در بر دارد. دراین همسایگی نقطه‌ای مانند $Q: (x+\Delta x, y+\Delta y)$

وایراشتراس Karl Weierstrass (۱۸۱۵ ـ ۱۸۹۷)، آنالیز مختلط را بر پایهٔ سری توانی بنانهاد (ر. ك. بخشهای ۱۶.۱، ۱۶.۲). ریمان همچنین هندسهٔ ریمانی را کـه پایهٔ ریاضی نظری نسبیت اینشتین است توسعه بخشید. آثاروی انگیزهٔ ایده‌های زیادی در ریاضیات نوین (مخصوصاً درتوپولوژی و آنالیز تابعی) شد. مرجع زیررا ببینید.

N. Bourbaki, *Elements of Mathematics*, *General Topology*, Part 1, PP. 162 — 166, Paris; Hermann, 1966.

را می‌توان طوری انتخاب کرد که خط‌مستقیم PQ در D باشد. به‌دلیل فرضهای پیوستگی می‌توانیم قضیهٔ مقدارمیانگین بخش ۷.۸ را به‌کار ببریم. درنتیجه

$$u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)=\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}+\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_2},$$

$$v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)=\Delta x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2}+\Delta z\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{M_2} \qquad (۶)$$

این مشتقات درنقاط مناسب M_1 و M_2 ازپاره‌خط مزبورمحاسبه شده‌اند. حال‌می‌نویسیم

$$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y),\quad \Delta z=\Delta x+i\,\Delta y,\quad \Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$$

سپس از (۶) به‌دست می‌آوریم

$$\Delta f=\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}+\Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_1}+i\left[\Delta x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2}+\Delta y\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{M_2}\right]$$

با استفاده ازمعادلات کوشی ـ ریمان می‌توانیم $-\partial v/\partial x$ و $\partial u/\partial x$ را به‌ترتیب جایگزین $\partial u/\partial y$ و $\partial v/\partial y$ کنیم و دریابیم که

$$\Delta f=\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}+i\,\Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_2}+i\left[\Delta x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2}+i\,\Delta y\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\right]$$

با استفاده از $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$، رابطهٔ فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\Delta f=\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}+i\,\Delta y\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}\right\}$$

$$+i\left[\Delta z\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}+\Delta x\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2}-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\right\}\right].$$

طرفین رابطه را بر Δz تقسیم کرده، Δz را به‌سمت صفرمیل می‌دهیم. سپس از آنجا که مشتقات جزئی سمت راست معادله پیوسته‌اند، این مشتقات به $\partial u/\partial x$ و $\partial v/\partial x$ی که در $(x\ ,\ y)$ محاسبه شده‌اند میل می‌کنند. به علاوه، چون $|\Delta x/\Delta z| \leqslant 1$ ، $|\Delta y/\Delta z| \leqslant 1$ ، حد عبارت سمت راست وجود داشته، مستقل از مسیری است که Δz از طریق آن به صفر میل می‌کند، می‌بینیم که این حد برابر است باسمت راست (۳). این بدان معنی است که $f(z)$ در D تحلیلی است و بدین ترتیب اثبات کامل است. ▲

این قضایا درعمل از اهمیت زیادی برخوردارند زیرا به‌کمك آنها می‌توان‌دریافت که تابع مختلط مفروضی تحلیلی است یا خیر.

مثال ۲. معادلات کوشی ـ ریمان

فرض کنید $f(z)=\operatorname{Re} z=x$. دراین صورت

$$v=0 \quad \text{و} \quad u=x$$

معادلات (۵) برقرار نیستند، یعنی $\operatorname{Re} z$ تحلیلی نیست. به همین نحو $\operatorname{Im} z$ نیز تحلیلی نیست. درمسائل این بخش توابع سادهٔ دیگری هم که تحلیلی نیستند مطرح می‌شوند. ▲

یادآور می‌شویم که هر گاه صورت قطبی $z=r(\cos\theta-i\sin\theta)$ را به‌کارببریم و بنویسیم $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$، در این صورت معادلات کوشی ـ ریمان به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{7}$$

مثال ۳. معادلات کوشی ـ ریمان به‌صورت قطبی

فرض کنید $f(z)=z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$. دراین صورت

$$u=r^3\cos 3\theta\,, \quad v=r^3\sin 3\theta$$

از این‌رو

$$\frac{\partial u}{\partial r}=3r^2\cos 3\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=3r^2\sin 3\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

بنابه (۷) متقاعد می‌شویم که $f(z)=z^3$ به‌ازای تمام مقادیر $z\neq 0$ تحلیلی‌است. (همان‌طورکه می‌دانیم تابع z^3 در $z=0$ نیز تحلیلی است). ▲

حال رابطه‌ای بین آنالیزمختلط ومعادلهٔ لاپلاس دومتغیری به دست می‌آوریم که از نظرعملی حائز اهمیت است. بعداً ثابت می‌کنیم (دربخش ۶.۱۴) کـه مشتق تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ خود تحلیلی است. به‌دلیل این واقعیت مهم $u(x,y)$ و $v(x,y)$ مشتقات جزئی پیوسته از هرمرتبه‌ای دارند. مخصوصاً مشتقات دوم مخلوط این توابع باهم برابرند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

با مشتقگیری ازمعادلات کوشی ـ ریمان به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

و این به نتیجهٔ مهم زیر منجر می‌شود.

قضیهٔ ۳ (معادلهٔ لاپلاس)

قسمت حقیقی و قسمت موهومی تابع مختلط

$$f(z)=u\,(x,y)+iv\,(x,y)$$

که در حوزهٔ D تحلیلی است جوابهای معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \nabla^2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

در D هستند و مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در D دارند.

همانطور که درفصلهای ۱۳ و ۱۸ خواهیم دید، این موضوع یکی از دلایل عمدهٔ اهمیت عملی زیادآنالیز مختلط در ریاضیات مهندسی است.

جوابی ازمعادلهٔ لاپلاس راکه مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد **تابع همساز** می‌نامند (بخش ۱۱-۱۱ را نیز ببینید). بنابراین قسمتهای حقیقی و موهومی یك تابع تحلیلی توابع همسازند.

هرگاه دوتابع همساز $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در یك حوزهٔ D در معادلات کوشی ـ ریمان صدق کنند، یعنی هرگاه u و v قسمتهای حقیقی و موهومی یك تابع تحلیلی $f(z)$ در D باشند، دراین‌صورت $v\,(x,\ y)$ را **تابع همسازمزدوج** $u(x,y)$ در D نامند. (البته این مورد استفاده ازکلمهٔ «مزدوج» با استفاده‌ای که از آن در تعریف مزدوج عدد مختلط z یعنی $\bar{z}$ شد متفاوت است).

مزدوج یك تابع همساز را می‌توان از معادلات کوشی ـ ریمان به دست آورد و این را با مثال زیرتوضیح می‌دهیم.

مثال ۴. تابع همساز مزدوج

تابع $u=x^2-y^2$ همسازاست و داریم $\partial u/\partial x=2x$، $\partial u/\partial y=-2y$. بنابراین مزدوج u باید درمعادلات زیرصدق کند

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y.$$

با انتگرالگیری از معادلهٔ اول نسبت به y به دست می‌آوریم

$$v=2xy+h(x)$$

که $h(x)$ فقط به x بستگی دارد . با جایگزین کردن این v در معادلهٔ دیگر ، داریم $h'(x)=0$ و، بنا براین،ثابت $=c=h$. ازاین‌رو کلیترین تابع مزدوج x^2-y^2 عبارت است از $2xy+c$ ، که c یك ثابت حقیقی است، وکلیترین تابع تحلیلی با قسمت حقیقی x^2-y^2 عبارت است از $x^2-y^2+i\,(2xy+c)=z^2+ic$.

مسائل بخش ۵.۱۲

با استفاده از (۳) یا (۴)، مشتق توابع زیررا حساب‌کنید.

۱. $f(z)=az+b$ ۲. $f(z)=z^2$ ۳. $f(z)=1/z$

۴. $f(z)=\frac{1}{1-z}$ ۵. $f(z)=z+\frac{1}{z}$ ۶. $f(z)=\frac{z+1}{z-2}$

۷. نشان دهیدکه علاوه بر (۳) و (۴)، داریم

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\quad,\quad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}\qquad(8)$$

تحقیق کنیدکه جفت تابعهای زیر درمعادلات‌کوشی ـ ریمان صدق می‌کنند.

۸. $u=x,\ v=y$ ۹. $u=e^x\cos y,\ v=e^x\sin y$

۱۰. $u=x^3-3xy^2,\ v=3x^2y-y^3$

آیا توابع زیر تحلیلیند؟

۱۱. $f(z)=z^3+z$ ۱۲. $f(z)=\operatorname{Im} z$

۱۳. $f(z)=\bar{z}$ ۱۴. $f(z)=|z|^2$

۱۵. $f(z)=1/(1-z)$ ۱۶. $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$

۱۷. $f(z)=e^x\cos y$ ۱۸. $f(z)=1/z^2$

۱۹. $f(z)=\arg z$

۲۰. (۷) را از (۵) به‌دست آورید.

۲۱. بااستفاده از(۷)، نشان دهیدکه $f(z)=z^4$ تحلیلی است.

۲۲. بااستفاده از (۷)، نشان دهیدکه $f(z)=1/z^2\,(z\neq 0)$ تحلیلی است.

نشان دهیدکه توابع زیرهمسازند و تابع تحلیلی متناظر $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ را پیدا کنید.

۲۳. $u=x$ ۲۴. $v=xy$ ۲۵. $u=xy$

۲۶. $u=\sin x\cosh y$ ۲۷. $v=-\sin x\sinh y$ ۲۸. $u=x/(x^2+y^2)$

۲۹. تحت چه شرایطی $u=ax^3+bx^2y+cxy^2+ky^3$ همساز است ؟

۳۰. تحت چه شرایطی $e^{\alpha x}\cos\beta y$ همساز است ؟

۳۱. هرگاه v تابع همساز مزدوج u باشد نشان‌دهیدکه u تابع همسازمزدوج $-v$ است.

۳۲. باچه شرطی $\cos\alpha x\cosh\beta y$ همساز است ؟

۳۳. هرگاه $f(z)$ درحوزهٔ D تحلیلی باشد و در D داشته باشیم ثابت $=|f(z)|$ ، نشان دهیدکه ثابت $=f(z)$.

۳۴. هرگاه $f(z)$ در حوزهٔ D تحلیلی باشد ودر D داشته باشیم ثابت $=\text{Re}f(z)$ ، نشان دهیدکه ثابت $=f$.

۳۵. هرگاه $f(z)$ درحوزهٔ D تحلیلی باشد ودرهمهٔ نقاط D داشته باشیم $f'(z)=0$ ، نشان دهیدکه ثابت $=f(z)$.

۶.۱۲ تابع‌گویا. ریشه

بقیهٔ بخشهای این فصل به‌مهمترین توابع مختلط‌مقدماتی مانند توانها، تابع‌نمایی، لگاریتم، توابع مثلثاتی، وغیره اختصاص داده شده است. خواهیم دیدکه می‌توان توابع فوق رابه سادگی طوری تعریف کردکه وقتی متغیرهای مستقل آنها مقادیرحقیقی اختیارمی‌کنند بـا توابع حقیقی آشنا یکسان شوند. بعضی تـوابع مختلط ازخواص جالبی برخوردارندکـه وقتی متغیرمستقل محدود به مقادیر حقیقی باشد این خواص مشاهده نمی‌شوند. از آنجا که این توابع مقدماتی درکاربردها فراوان مورد نیاز هستند، دانشجو باید این مطالب را بـه دقت تعقیب‌کند . بعلاوه ، داشتن اطلاع جامع دربارهٔ این تـوابع خاص برای درك بهتر مطالب عمومیتر مفید است.

برخی ازاین توابع درسرتاسر صفحهٔ مختلط تحلیلیند. چنین تـوابعی را توابع تام خوانند.

توانهای

$$w=z^n \qquad n=0, 1, \ldots \tag{1}$$

درسرتاسر صفحه تحلیلیند، بنابراین آنها توابع تام هستند. همچنین است تابع

$$w=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n \qquad (c_n\neq 0) \tag{۲}$$

که در آن c_0، . . . ، c_n ثابتهای (مختلط یا حقیقی) هستند. چنین تابعی را **چند جمله‌ای** یا تابع گویای تام نامند. نمای n را درجهٔ چند جمله‌ای گویند. بررسی چند جمله‌ایها موضوع اصلی جبر کلاسیك است.

خارج قسمت دو چندجمله‌ای $p(z)$ و $q(z)$ را **تابع گویا** (کسری) نامند. چنین تابعی

$$w=\frac{p(z)}{q(z)} \tag{۳}$$

به ازای تمام مقادیر z که به ازای آنها $q(z)$ صفر نباشد تحلیلی است؛ در اینجا فرض می‌کنیم که عاملهای مشترك $p(z)$ و $q(z)$ حذف شده‌اند. تابع گویایی که به شکل سادهٔ

$$\frac{c}{(z-z_0)^m} \qquad (c\neq 0)$$

است کسر جزئی نامیده می‌شود؛ دراینجا c و z_0 اعداد مختلط بوده، m عدد صحیح‌مثبتی است. درجبر ثابت می‌کنند که هر تابع کسری‌را می‌توان به‌صورت‌مجموع یك چندجمله‌ای وتعداد متناهی کسرجزئی نوشت.

هر گاه $z=w^n (n=1, 2, \ldots)$، درآن صورت باهرمقدار w یك مقدارzمتناظر است. می‌بینیم که متناظر به‌هر $z\neq 0$ دقیقاً n مقدارمتمایز w وجود دارد. هریك از این مقادیر را یك **ریشهٔ nام** z نامیده، می‌نویسیم

$$w=\sqrt[n]{z} \tag{۴}$$

بنابراین نمادبالا چند مقداری، یعنی n مقداری است، برخلاف‌اعدادحقیقی که‌درآنجامعمولا این تابع را یك مقداری قرارداد می‌کنند n مقدار $\sqrt[n]{z}$ را به سادگی می‌توان به ترتیب زیرمعین کرد. می‌نویسیم

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \text{و} \quad w=R(\cos\phi+i\sin\phi)$$

سپس بنابه فرمول **دموآور** (ر.ك. بخش ۲۰۱۲) نتیجه می‌شود که

$$z=w^n=R^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

بامساوی هم قراردادن قدرمطلقهای طرفین داریم

$$R=\sqrt[n]{r} \quad \text{یا} \quad R^n=r$$

ریشهٔ این معادله مثبت وحقیقی است وبنابراین به‌طوریکتا معین می‌شود. بامساوی هم‌قرار-

دادن آوندها به‌دست می‌آوریم

$$\phi=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n} \quad \text{یا} \quad n\phi=\theta+2k\pi$$

که درآن k یک عدد صحیح است. درنتیجه $\sqrt[n]{z}$، بـه‌ازای $z\neq 0$، دارای n مقدار متمایز زیراست:

$$(5)\quad \sqrt[n]{r}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1،$$

این n مقدار روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ به مرکز واقع درمبدأ قرارداشته، رئوس یك n ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند.

مقداری از $\sqrt[n]{r}$ که با درنظر گـرفتن مقدار اصلی $\arg z$ (ر. ك. بخش ۲۰۱۲) و به‌ازای $k=0$ از(۵) حاصل می‌شود **مقدار اصلی** $w=\sqrt[n]{z}$ نامیده می‌شود.

مثال ۱. ریشهٔ دوم

$w=\sqrt{z}$ دارای دومقدار

$$z_1=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

و

$$z_2=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]=-z_1$$

است که نسبت به مبدأ متقارن هستند. مثلا

$$\sqrt{4i}=\pm 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$$

مثال ۲. ریشهٔ سوم عدد حقیقی مثبت

هرگاه z حقیقی مثبت باشد، درآن صورت $w=\sqrt[3]{z}$ مقدار حقیقی $\sqrt[3]{r}$ و مقادیر مختلط مزدوج

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

و

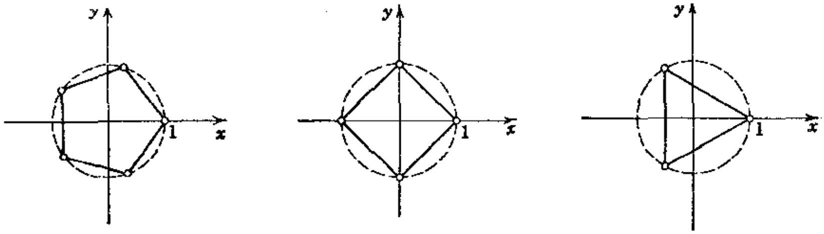
$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

را دارد. مثلاً، $\sqrt[3]{1}=1$، $-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}i$ (شکل ۲۶۷). بدیهی است که اینها ریشه‌های معادلهٔ $w^3-1=0$ هستند.

مثال ۳. ریشه n ام واحد

از (۵) به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k=0,1,\cdots,n-1 \tag{6}$$



شکل ۲۶۹. $\sqrt[5]{1}$ — شکل ۲۶۸. $\sqrt[4]{1}$ — شکل ۲۶۷. $\sqrt[3]{1}$

هرگاه مقدارمتناظر با $k=1$ را با ω نمایش‌دهیم دراین‌صورت n مقدار $\sqrt[n]{1}$ رامی‌توان به‌صورت 1، ω، ω^2، ...، ω^{n-1} نوشت. این مقادیررئوس n ضلعی منتظمی راکه در دایرهٔ واحد محاط شده ویك رأس آن نقطهٔ ۱ است تشکیل می‌دهند. هریسك ازاین n مقدار را یك ریشهٔ nام واحد می‌نامند. مثلاً، مقادیر $\sqrt[4]{1}$ عبارتند از ۱، i، -1 و $-i$ (شکل ۲۶۸). شکل ۲۶۹ $\sqrt[5]{1}$ را نشان می‌دهد.

هرگاه w_1 یکی از ریشه‌های n ام عدد مختلط دلخواه z باشد، درآن صورت

$$w_1,\quad w_1\omega,\quad w_1\omega^2,\quad \cdots,\quad w_1\omega^{n-1}$$

n مقدار $\sqrt[n]{z}$ هستند، چراکه ضرب‌کردن ω در w_1 به معنی افزایش آوند w_1 به میزان $2k\pi/n$ است.

مسائل بخش ۶.۱۲

تمام مقادیر ریشه‌های زیررا تعیین کنید ونقاط متناظر با آنهارا درصفحهٔ مختلط نمایش دهید.

۱. $\sqrt{i}$ ۲. $\sqrt{-i}$ ۳. $\sqrt{-۴}$ ۴. $\sqrt{۱-i\sqrt{۳}}$

۵. $\sqrt[۳]{-۱}$ ۶. $\sqrt[۳]{i}$ ۷. $\sqrt[۳]{-i}$ ۸. $\sqrt[۳]{۱+i}$

۹. $\sqrt[۴]{-۱}$ ۱۰. $\sqrt[۵]{-۱}$ ۱۱. $\sqrt[۶]{-۱}$ ۱۲. $\sqrt[۸]{۱}$

تمام جوابهای معادلات زیر را پیدا کنید وآنها را درصفحهٔ مختلط نمایش دهید.

۱۳. $z^{۳}=۲۷$ ۱۴. $z^{۴}+۵z^{۲}=۳۶$ ۱۵. $z^{۴}+۸۱=۰$

۱۶. $z^{۶}+۷z^{۳}=۸$

۱۷. مجموع n ریشهٔ n ام واحد را پیدا کنید: (الف) به‌ازای $n=۲$ و $n=۴$، (ب) به ازای n دلخواه.

۱۸. (ریشهٔ دوم) ثابت کنید

$$\sqrt{z}=\pm[\sqrt{(|z|+x)/۲}+(\operatorname{sign} y)i\sqrt{(|z|-x)/۲}] \qquad (z=x+iy)$$

که درآن $\operatorname{sign} y=۱$ اگر $y\geqslant ۰$، $\operatorname{sign} y=-۱$ اگر $y<۰$، و تمام ریشه‌های دوم اعداد مثبت دارند. راهنمایی. بنویسید $\sqrt{z}=w=u+iv$، مربع کنید، به دومعادلهٔ حقیقی تفکیک کنید، و $u^{۲}$ و $v^{۲}$ را برحسب x و y بدست آورید.

با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۸ مقادیر زیر را بیابید:

۱۹. $\sqrt{۴i}$ ۲۰. $\sqrt{۳+۴i}$ ۲۱. $\sqrt{-۵+۱۲i}$ ۲۲. $\sqrt{-۸-۶i}$

با استفاده ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۱۸ معادلات زیر را حل کنید.

۲۳. $z^{۲}+z+۱=i$ ۲۴. $z^{۲}-۳z+۳=i$

۲۵. $z^{۲}-(۵+i)z+۸+i=۰$ ۲۶. $z^{۴}-۲(۱+۲i)z^{۲}=۸-۶i$

۲۷. دومعادلهٔ زیر را پس ازتبدیل آنها به یک معادله برحسب $x+iy$ حل کنید:

$$x^{۴}-۶x^{۲}y^{۲}+y^{۴}=۴,\quad xy(x^{۲}-y^{۲})=۱ \qquad (x, y \text{ حقیقی هستند})$$

۲۸. $z^{۴}+۴$ را به‌صورت حاصلضرب عوامل درجه دوم باضرایب حقیقی نمایش دهید.

۲۹. $z^{۴}+۱$ را به‌صورت حاصلضرب عوامل درجه دوم باضرایب حقیقی نمایش دهید.

۳۰. فرض کنید P ، n ضلعی منتظمی باشد که رئوس آن بر دایرهٔ واحد قرار دارند. حاصلضرب طولهای $n-1$ پاره‌خط مستقیمی را که یک رأس مشخص P را به $(n-1)$ رأس دیگر وصل می‌کنند پیدا کنید.

۷.۱۲ تابع نمایی

تابع نمایی حقیقی e^x (که به صورت $\exp x$ نیز نوشته می‌شود) دارای خواص

$$(e^x)' = e^x \qquad (1)$$

$$e^{(x_1+x_2)} = e^{x_1}e^{x_2} \qquad (2)$$

است وسری مکلورن[1] آن

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

است. تابع نمایی را به‌ازای عدد مختلط $z = x + iy$ به‌صورت e^z نمایش می‌دهیم وآن را برحسب توابع حقیقی e^x ، $\cos y$ و $\sin y$ به‌ترتیب زیرتعریف می‌کنیم

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (4)$$

(که به‌صورت $\exp z$ نیز نوشته می‌شود)

این تعریف‌ملهم‌ازواقعیتهای زیر است. درصورتی که $z = x$ حقیقی باشد، آنگاه $e^z = e^x$. ازمعادلات کوشی ـ ریمان نتیجه می‌شودکه e^z به‌ازای تمام مقادیر z تحلیلی است. بنا به (۳) ازبخش ۵.۱۲ می‌بینیم که

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i\,\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

یعنی،

$$(e^z)' = e^z \qquad (5)$$

به‌علاوه باانتخاب $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ و اعمال فرمولهای مربوط به سینوس وکسینوس مجموع [ر.ك. (۶) ضمیمهٔ۳]، به‌سادگی‌درمی‌یابیم که

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \qquad (6)$$

که همانند (۲) است. بخصوص، وقتی که $z_1 = x$ و $z_2 = iy$ ، داریم

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \qquad (7)$$

بعداً (درفصل ۱۶) خواهیم دیدکه توابع تحلیلی‌مختلط دارای بسط سری تیلوری

---

۱. **کلین مکلورن** Colin Maclaurin (۱۶۹۸ - ۱۷۴۶)، ریاضیدان اسکاتلندی.

مشابه سری تیلور توابع حقیقی هستند. بدین ترتیب به سادگی نتیجه می‌شود که هرگاه‌در (۳) به‌جای x قراردهیم z، سری مك‌لورن[1] e^z به‌دست می‌آید.

از (۴) **فرمول اویلر**

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{۸}$$

به دست می‌آید. این فرمول نشان می‌دهد که شکل قطبی عدد مختلط $z=x+iy$ (ر. ك. بخش ۲.۱۲) را حالا می‌توان چنین نوشت:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta} \tag{۹}$$

به علاوه، از (۸) داریم

$$|e^{iy}|=\sqrt{\cos^{۲} y+\sin^{۲} y}=۱; \tag{۱۰}$$

یعنی، تابع نمایی به‌ازای نماهای موهومی محض، قدرمطلقی برابر یك دارد؛ نتیجه‌ای که دانشجو باید به‌خاطر بسپارد. درنتیجه، بنابه (۴)،

$$|e^z|=e^x, \quad \arg e^z=y. \tag{۱۱}$$

چون $\cos ۲\pi=۱$ و $\sin ۲\pi=۰$، از (۸) به‌دست می‌آید

$$e^{۲\pi i}=۱ \tag{۱۲}$$

به همین ترتیب

$$e^{\pi i}=e^{-\pi i}=-۱, \quad e^{\pi i/۲}=i, \quad e^{-\pi i/۲}=-i. \tag{۱۳}$$

از (۱۲) و (۶) داریم

$$e^{z+۲\pi i}=e^z e^{۲\pi i}=e^z$$

واین نشان می‌دهد که e^z تابعی است دوره‌ای با دورهٔ موهومی $۲\pi i$. بنابراین

$$e^{z\pm ۲n\pi i}=e^z \qquad (n=۰, ۱, \cdots). \tag{۱۴}$$

از آنجاکه $w=e^z$ دوره‌ای است، می‌توان فرض کرد که $w=e^z$ کلیهٔ مقادیر خود را در

---

۱. از این سری می‌توان برای تعریف e^z استفاده‌کرد. برای نیل به این هدف باید نخست بخشهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ را بررسی کرد. همچنان‌که درمثال۲ بخش۴.۱۶ نشان داده شده است، خواص e^z از این سری نتیجه می‌شود. روش فعلی ما این امتیاز را داردکه زودتر مبحث انتگرال (درفصل ۱۴) را مطرح می‌کنیم و ارتباط نزدیکتری بین بررسی عمومی سریها (فصل ۱۵) وسریهای تیلوروولوران (فصل ۱۶)،که درآنها انتگرال مورد نیاز است، خواهیم داشت. همچنین روش فوق مراعات حال دانشجویانی را که دراین مراحل نخست اطلاعات کافی دربارهٔ سریها ندارند می‌کند.

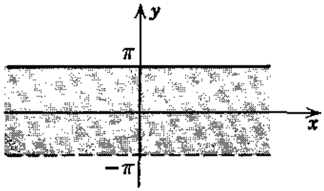
نوار (شکل ۲۷۰)

$$-\pi < y \leqslant \pi \qquad (۱۵)$$

اختیارمی‌کند. این نوارنامتناهی را **ناحیهٔ بنیادی** e^z می‌نامند.

از (۶) به‌دست می‌آوریم $e^z e^{-z} = e^0 = ۱$ ، که نتیجه می‌دهد

$$e^z \neq ۰ \quad \text{به‌ازای تمام مقادیر } z \,. \qquad (۱۶)$$



شکل ۲۷۰. ناحیهٔ بنیادی تابع نمایی e^z

مسائل بخش ۷۰۱۲

۱. با استفاده از معادلات کوشی ــ ریمان، نشان‌دهیدکه e^z به‌ازای تمام مقادیر z تحلیلی است.

۲. (۶) را، به‌روشی که درمتن گفته شد، استنتاج کنید.

مقدار e^z را پیدا کنید درصورتی که z برابر باشد با

۳. $\pi i/۴$ **۴.** $-\pi i/۴$ **۵.** $۱+i$ **۶.** $۳+\pi i$

مطلوب است محاسبهٔ قسمتهای حقیقی وموهومی

۷. $e^{۲z}$ **۸.** $e^{-۴z}$ **۹.** $e^{z^۲}$ **۱۰.** $e^{z^۳}$

عبارتهای زیررا به‌شکل قطبی (۹) بنویسید.

۱۱. $\sqrt{i}, \sqrt{-i}$ **۱۲.** $۳-۴i$ **۱۳.** $۲-۲i$ **۱۴.** $\sqrt{z}, \sqrt[n]{z}$

تمام جوابهای معادلات زیر را پیداکنید و تعدادی ازآنها را درصفحهٔ مختلط ترسیم کنید.

۱۵. $e^z=۱$ **۱۶.** $e^z=۳$ **۱۷.** $e^z=-۲$ **۱۸.** $e^{z^۲}=۱$

تمام مقادیری از z را بیابیدکه به‌ازای آنها

۱۹. $e^{\bar{z}}=\overline{e^z}$ **۲۰.** $e^{i\bar{z}}=\overline{e^{iz}}$ **۲۱.** $|e^{-۲z}|<۱$

۲۲. e^z حقیقی باشد

۲۳. نشان دهید که $u=e^{xy}\cos(x^2/2-y^2/2)$ همسازاست و مزدوج آن را بیابید.

۲۴. شرایط $f'(z)=f(z)$ ، $f(x+i0)=e^x$ ، تابع $f(z)$ (که به‌ازای تمام مقادیر z تحلیلی فرض می‌شود) را به‌طور یکتا مشخص می‌کنند، یعنی $f(z)=e^z$ همان‌طور که در (۴) تعریف شد. این مطلب را ثابت کنید. (ازمعادلات کوشی ــ ریمان استفاده کنید.)

۲۵. رفتار e^z را وقتی $|z|\to\infty$ درامتداد شعاعهای مختلف بررسی کنید، مثلا به‌ازای $\arg z=0$ و $\pi/2$ ، π.

۸.۱۲ توابع مثلثاتی وهذلولی‌گون

ازفرمول اویلر، (۸) بخش قبل، به دست می‌آوریم

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\quad (x \text{ حقیقی}).$$

این فرمولها تعاریف زیر را برای عدد مختلط $z=x+iy$ متبادر به‌ذهن می‌سازند:

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\quad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) \tag{1}$$

به علاوه، مطابق با تعریفهای آشنای حساب حقیقی تعریف می‌کنیم

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z} \tag{2}$$

و

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z} \tag{3}$$

چون e^z به‌ازای تمام مقادیر تحلیلی است، توابع $\cos z$ و $\sin z$ نیز تحلیلی هستند. توابع $\tan z$ و $\sec z$ جز درنقاطی که $\cos z$ صفراست، و $\cot z$ و $\csc z$ جز در نقاطی که $\sin z$ صفراست تحلیلیند.

توابع $\cos z$ و $\sec z$ توابع زوج هستند وبقیه توابعی فرد:

$$\begin{aligned} \cos(-z)&=\cos z & \sin(-z)&=-\sin z \\ \cot(-z)&=-\cot z & \tan(-z)&=-\tan z \end{aligned} \tag{4}$$

وبه همین ترتیب. ازآنجاکه تابع نمایی دوره‌ای است، توابع مثلثاتی نیز دوره‌ای هستند و داریم

$$\cos(z \pm 2n\pi) = \cos z \qquad \sin(z \pm 2n\pi) = \sin z \tag{۵}$$

$$\tan(z \pm n\pi) = \tan z \qquad \cot(z \pm n\pi) = \cot z$$

که درآنها $n = 0, 1, \dots$.

ازاین تعاریف نتیجه می گیریم که تمام فرمولهای آشنای توابع مثلثاتی حقیقی برای مقادیر مختلط نیز صادقند. مثلا

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z, \tag{۶}$$

و

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \tag{۷}$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

از (۱) درمی‌یابیم که **فرمول اویلر** درمورد مقادیر مختلط صادق است.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{۸}$$

با استفاده از (۷)، به آسانی می‌توان $\cos z$ و $\sin z$ را برحسب توابع حقیقی نمایش‌داد. نخست داریم

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \tag{۹}$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

حال از (۱) وتعریف کسینوس وسینوس هذلولی گون نتیجه می‌شود که

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh y, \quad \sin iy = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y}) = i \sinh y.$$

واز اینجا نمایش موردنظر

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \tag{۱۰}$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

به‌دست می‌آیدکه برای محاسبهٔ عدی $\cos z$ و $\sin z$ مفید است.

کسینوس و سینوس هذلولی‌گون متغیر مختلط z با فرمولهای زیر تعریف می‌شوند

$$\cosh z = \tfrac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}), \quad \sinh z = \tfrac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) \qquad (۱۱)$$

که با تعریفهای آشنا درمورد متغیر حقیقی مطابقت دارد [ر. ك. (۱۷) ضمیمهٔ ۳]. این توابع در تمامی صفحه تحلیلی هستند.

از (۱۱) و (۱) نتیجه می‌شود که

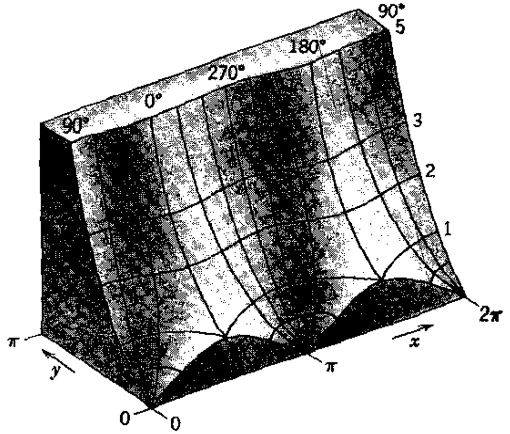
$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i\sin(iz) \qquad (۱۲)$$

نظیر حساب حقیقی تعریف می‌کنیم

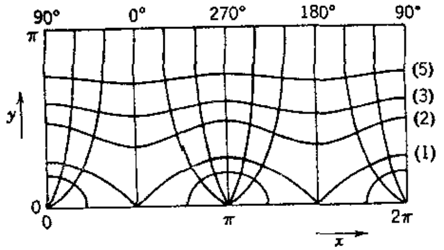
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \qquad (۱۳)$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} \qquad (۱۴)$$

قدر مطلق $|f(z)|$ یك تابع تحلیلی $f(z)$، $z=x+iy$، تابعی حقیقی از دو متغیر حقیقی x و y است و، بنابراین، می‌توان آن را با سطحی درفضای سه‌بعدی نمایش داد؛ به‌هر نقطهٔ (x, y) درصفحهٔ xy نقطه‌ای با مختصات دکارتی $(x, y, |f|)$ درفضا نظیر می‌شود و این‌چنین نقاط تشکیل دهندهٔ سطحی هستند که **سطح پیمانه‌ای** $f(z)$ نامیده می‌شود. بر روی این سطح می‌توان بعضی از منحنیهای ثابت $=|f|$ و ثابت $=\arg|f|$ را رسم کرد؛ به‌این ترتیب نمایش ترسیمی مفیدی از یك تابع تحلیلی و توضیح هندسی آن به‌دست می‌آید.



شکل ۲۷۱. سطح پیمانه‌ای $\sin z$



شکل ۲۷۲. منحنیهای ثابت $= |\sin z|$ و
ثابت $= \arg(\sin z)$ درصفحهٔ z

شکل ۲۷۱ قسمتی از سطح پیمانه‌ای $f(z) = \sin z$ و بعضی از منحنیهای ثابت $= |\sin z|$ و ثابت $= \arg(\sin z)$ را برروی سطح نشان می‌دهد. شکل ۲۷۲ تصویر قائم این منحنیها برصفحهٔ xy را نشان می‌دهد؛ این نمایش ترسیمی تابع سینوسی مختلط رایج است و درمهندسی برق به‌کارمی‌رود.

سطوح پیمانه‌ای خواص هندسی جالبی دارندکه درمرجع [C۸] ضمیمهٔ ۱ بررسی شده‌اند.

مسائل بخش ۸۰۱۲

۱. نشان دهید که $\cos z$، $\sin z$، $\cosh z$ و $\sinh z$ به‌ازای تمام مقادیر z تحلیلی هستند.

۲. (۴) را ثابت کنید

۳. (۵) را از (۱) به دست آورید

۴. (۶) را ثابت کنید

۵. (۷) را ثابت کنید

۶. (۱۲) را ثابت کنید.

مطلوب است

۷. $|\cos z|$　**۸.** $|\sin z|$　**۹.** $|\tan z|$

۱۰. $\operatorname{Re} \tan z$　**۱۱.** $\operatorname{Re} \cot z$　**۱۲.** $\operatorname{Re} \sec z$

عبارات زیر را بااستفاده ازجدول A۱ ضمیمهٔ ۴ محاسبه‌کنید:

۱۳. $\sin i$　**۱۴.** $\cosh i$　**۱۵.** $\cos(1+2i)$

۱۶. $\sin(1.7+1.5i)$　**۱۷.** $\sinh(2+i)$　**۱۸.** $\cos(1.7+1.5i)$

تمام جوابهای معادلات زیر را بیابید.

۱۹. $\cos z=5$ ‏ ۲۰. $\sin z=1000$ ‏ ۲۱. $\cosh z=0$

۲۲. $\sinh z=0$ ‏ ۲۳. $\cosh z=0.5$ ‏ ۲۴. $\sin z=i\sinh 1$

نشان دهید که:

۲۵. $\cos z=\cosh iz$ و $\sin z=-i\sinh iz$

۲۶. $(\cosh z)'=\sinh z$ و $(\sinh z)'=\cosh z$

۲۷. $\cosh z=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$

و $\sinh z=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$

۲۸. $|\sinh y|\leqslant|\sin z|\leqslant\cosh y$ و $|\sinh y|\leqslant|\cos z|\leqslant\cosh y$

۲۹. $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$

۳۰. به‌ازای تمام مقادیر z، $\cot z\neq\pm i$

۳۱. $\tanh z$ دارای دورهٔ πi است.

۳۲. تمام z هایی که به‌ازای آنها $\cos z=0$، حقیقیند.

۳۳. تمام z هایی که به‌ازای آنها $\sin z=0$، حقیقیند.

۳۴. با استفاده از (۱)، نشان دهید $\cos^4\theta=\frac{1}{8}(\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3)$.

۳۵. با استفاده از (۸)، بخش ۷.۱۲ و $1+z+z^2+\dots=1/(1-z)$، $z=e^{i\theta}/2$ نشان دهید که

$$1+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 3\theta+\dots=\frac{4-2\cos\theta}{5-4\cos\theta}$$

۹.۱۲ لگاریتم . توان عمومی

لگاریتم طبیعی $z=x+iy$ با $\ln z$ گاهی نیز با $\log z$ نمایش داده شده، به صورت معکوس تابع نمایی تعریف می‌شود، یعنی $w=\ln z$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$e^w=z \tag{1}$$

به‌ازای هر $z\neq 0$.

با قراردادن $w=u+iv$ و $z=|z|e^{i\theta}=re^{i\theta}$ در (۱)، داریم

$$e^{w}=e^{u+iv}=e^{u}e^{iv}=re^{i\theta}.$$

قدرمطلقهای طرفین رابطهٔ فوق باید مساوی باشند. قدرمطلق $e^{u}e^{iv}$ برابراست با e^{u} زیرا v حقیقی است و ازاین‌رو $|e^{iv}|=1$ ؛ ر. ك. (۱۰) بخش ۷.۱۲. چون $re^{i\theta}$ دارای قدرمطلق r است به دست می‌آوریم:

$$u=\ln|z| \quad \text{یا} \quad e^{u}=|z|=r$$

که $\ln|z|$ ، لگاریتم طبیعی حقیقی مقدماتی عدد مثبت $|z|$ است. به همین نحو آوندهای طرفین باید مساوی باشند:

$$v=\theta=\arg z$$

بنابراین

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z=\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}+i\arg(x+iy). \tag{۲}$$

چون آوند z بامقادیری که اختلاف آنها از هم مضارب صحیح 2π است مشخص می‌شود، لگاریتم طبیعی مختلط چند مقدارهٔ نامتناهی است.

مقداری از $\ln z$ راکه متناظر بامقدار اصلی $\arg z$ ، یعنی

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi \qquad \text{(بخش ۲.۱۲)}$$

است را **مقدار اصلی** $\ln z$ نامیده ، اغلب با $\operatorname{Ln} z$ نشان می‌دهند.

بدیهی است که دراین صورت سایرمقادیر $\ln z$ به‌شکل زیرند:

$$\ln z=\operatorname{Ln} z\pm 2n\pi i \qquad (n=1,2,\cdots); \tag{۳}$$

قسمتهای حقیقی آنها یکی است وتفاوت قسمتهای موهومی‌آنها مضارب 2π است، واین موضوع بااین واقعیت‌که e^{z} دوره‌ای است و دورهٔ موهومی‌آن $2\pi i$ است مطابقت دارد.

همچنین، هرگاه z حقیقی مثبت باشد، مقدار اصلی $\arg z$ صفراست، ومقداراصلی $\operatorname{Ln} z$ بالگاریتم طبیعی حقیقی که درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی آموخته‌ایم یکی می‌شود. هرگاه z حقیقی منفی باشد مقداراصلی $\arg z$ برابر π می‌شود، ودراین‌صورت

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+\pi i$$

مثال ۱. لگاریتم طبیعی. مقداراصلی

$$\ln(-1)=\pm\pi i,\ \pm 3\pi i,\ \pm 5\pi i,\ \cdots,\quad \operatorname{Ln}(-1)=\pi i$$

$$\ln i=\frac{\pi}{2}i,\quad -\frac{3\pi}{2}i,\quad \frac{5\pi}{2}i,\quad -\frac{7\pi}{2}i,\quad \frac{9\pi}{2}i,\ \cdots,\quad \operatorname{Ln} i=\frac{\pi}{2}i$$

$$\operatorname{Ln}(-i)=-\frac{\pi}{2}i,\quad \operatorname{Ln}(-2-2i)=\ln\sqrt{8}-\frac{3}{4}\pi i. \quad \blacktriangle$$

روابط آشنایی که دربارهٔ لگاریتم طبیعی به کار می‌بردیم برای مقادیر مختلط نیز صادقند، یعنی

$$\text{(الف)}\quad \ln(z_1 z_2)=\ln z_1+\ln z_2 \text{ ،}\quad \text{(ب)}\quad \ln(z_1/z_2)=\ln z_1-\ln z_2 \qquad (۴)$$

اما این روابط را بدین ترتیب باید شناخت که هرمقداری ازیك طرف یکی ازمقادیرطرف دیگر نیز هست.

مثال ۲. مثالی ازصورت مختلط روابط تابعی (۴)

فرض کنید

$$z_1=z_2=e^{\pi i}=-1$$

اگر

$$\ln z_1=\ln z_2=\pi i,$$

انتخاب کنیم،دراین‌صورت(۴الف)به مااجازه‌می‌دهد بنویسیم $\ln(z_1z_2)=\ln 1=2\pi i$؛ این رابطه درمورد مقداراصلی صادق نیست، $\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln}1=0$. ▲

با به‌کاربردن (۳) بخش ۱۲.۵، در (۲)، همین بخش، درمی‌یابیم

$$\frac{d}{dz}\ln z=\frac{\partial}{\partial x}\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\frac{\partial}{\partial x}(\arg z)$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{1}{z};$$

یعنی، مشتق لگاریتم طبیعی عبارت است از

$$\frac{d}{dz}\ln z=\frac{1}{z}\qquad (z\neq 0). \qquad (۵)$$

ازاین‌رو مقدار اصلی $\operatorname{Ln} z\,(z\neq 0)$، که تك مقداری وبنابراین يك‌تابع به‌تعبیرمعمولی است، درحوزهٔ $-\pi<\arg z<\pi$ صفحهٔ z تحلیلی است، یعنی درتمامی صفحه به‌جز نقاط واقع برمحورحقیقی منفی (جایی که در آن قسمت موهومی تابع حتی پیوسته نیست وجهشی به‌اندازهٔ 2π دارد).

توان عمومی عدد مختلط $z=x+iy(\neq 0)$ بافرمول زیرتعریف می‌شود:

$$z^c=e^{c\ln z}\qquad (z\neq 0 \text{ ،مختلط } c). \qquad (۶)$$

چون $\ln z$ چند مقداری نامتناهی است ، z^c درحالت کلی ، چند مقداری خواهد بود. مقدار خاص

$$z^c = e^{c\,\mathrm{Ln}\,z}$$

را مقدار اصلی z^c نامند.

هرگاه $c = n = 1, 2, \ldots$، در آن صورت z^n یک مقداری است و با توان nام معمولی یکی‌است. هرگاه $c = -1, -2, \ldots$، وضعیت مشابهی وجود دارد.

هرگاه $c = 1/n$ که درآن $n = 2, 3, \ldots$، درآن صورت

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{(1/n)\ln z} \qquad (z \neq 0),$$

به نمایی که معین می‌شود می‌توان مضارب $2\pi i/n$ را افزود، و به‌این ترتیب n مقدار متمایز برای ریشهٔ nام به‌دست می‌آید که این با نتیجهٔ بخش ۶.۱۲ وفق می‌دهد. اگر $c = p/q$، خارج قسمت دوعدد صحیح مثبت باشد، وضعیت مشابهی داریم، و z^c مقادیرمتمایز متناهی دارد. معذلك، هرگاه c عدد گنگ حقیقی یا عدد مختلط باشد، درآن صورت z^c به طورنامتناهی چند مقداری است.

مثال ۳. توان عمومی

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i[(\pi/2)i \pm 2n\pi i]} = e^{-(\pi/2)\mp 2n\pi}$$

تمام این مقادیر حقیقی هستند ومقداراصلی $(n = 0)$ برابراست با $e^{-\pi/2}$. ▲

قرارداد چنین است که به‌ازای عدد حقیقی مثبت $z = x$ عبارت z^c به مفهوم $e^{c\ln x}$ است که درآن $\ln x$ لگاریتم حقیقی مقدماتی است (یعنی، بنابه تعریف ما، مقدار اصلی $\ln z (z = x > 0)$ است). همچنین هرگاه $z = e$، یعنی برابر با پایهٔ لگاریتم طبیعی باشد، $z^c = e^c$ بنابه قرارداد مقدار یکتای حاصل از (۴) بخش ۷.۱۲ به‌حساب می‌آید.

از (۶) ملاحظه می‌شود که برای هرعدد مختلط a،

$$a^z = e^{z\ln a} \tag{۷}$$

مسائل بخش ۹.۱۲

۱. رابطهٔ (۴) را به‌ازای $z_1 = i$، $z_2 = -1$ تحقیق کنید.

۲. با استفاده از (۷) بخش ۵.۱۲، نشان دهید که $\mathrm{Ln}\,z\ (z \neq 0)$ در ناحیهٔ $-\pi < \theta < \pi$ تحلیلی است، دراینجا θ مقدار اصلی $\arg z$ است.

۳. نشان دهیدکه $\mathrm{Ln}\,z$ روی محورحقیقی منفی پیوسته نیست.

۴. نشان دهیدکه

$$e^{\ln z}=z,\ \ln(e^z)=z\pm ۲n\pi i,\ n=۰, ۱, \cdots.$$

تمام مقادیر عبارتهای زیر را تعیین کنید و بعضی ازآنها را درصفحهٔ مختلط رسم کنید.

۵. $\ln ۱$ ۶. $\ln ۲$ ۸. $\ln i$ ۸. $\ln e$

۹. $\ln(ie)$ ۱۰. $\ln(-ie)$ ۱۱. $\ln(e^i)$ ۱۲. $\ln(e^{-۲})$

معادلات زیر را نسبت به z حل کنید.

۱۳. $\ln z=-\pi i/۲$ ۱۴. $\ln z=\pi i/۲$

۱۵. $\ln z=۱+\pi i$ ۱۶. $\ln z=(۱+i)\pi$

با استفاده از جدول A۱ ضمیمهٔ ۴ ، مقدار اصلی $\operatorname{Ln} z$ را محاسبه کنید، هر گاه z برابر باشد با

۱۷. $(۱-i)^۲$ ۱۸. $\sqrt{۲}+i\sqrt{۲}$ ۱۹. -۷ ۲۰. $۳+i\sqrt{۲۷}$

مطلوب است مقدار اصلی

۲۱. $(۲i)^{۱/۲}$ ۲۲. $(۱+i)^i$ ۲۳. $(۱+i)^{۱-i}$ ۲۴. $(۱-i)^{۱+i}$

۲۵. $۳^{۳-i}$ ۲۶. $۲^{۲i}$ ۲۷. $(۲-i)^{۱+i}$ ۲۸. $۲^{۳+۲i}$

معکوس سینوس $w=\sin^{-۱}z$ عبارت از تابعی است که در رابطهٔ $\sin w=z$ صدق می‌کند. **معکوس کسینوس** $w=\cos^{-۱}z$ تابعی است که در رابطهٔ $\cos w=z$ صدق می‌کند. سایرمعکوسهای توابع مثلثاتی وهذلولی‌گون به‌طریقی‌مشابه تعریف ونمایش‌داده می‌شوند. بااستفاده ازتوابع نمایی $\sin w=(e^{iw}-e^{-iw})/(۲i)$ وغیره)، نشان دهید که

۲۹. $\sin^{-۱}z=-i\ln(iz+\sqrt{۱-z^۲})$ ۳۰. $\cos^{-۱}z=-i\ln(z+\sqrt{z^۲-۱})$

۳۱. $\cosh^{-۱}z=\ln(z+\sqrt{z^۲-۱})$ ۳۲. $\sinh^{-۱}z=\ln(z+\sqrt{z^۲+۱})$

۳۳. $\tan^{-۱}z=\frac{i}{۲}\ln\frac{i+z}{i-z}$ ۳۴. $\tanh^{-۱}z=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+z}{۱-z}$

۳۵. نشان دهید که $w=\sin^{-۱}z$ نامتناهی مقدار دارد، و هر گاه $w_۱$ یکی از این مقادیر باشد، بقیه به صورت $w_۱\pm ۲n\pi$ و $\pi-w_۱\pm ۲n\pi$، $n=۰, ۱, \cdots$ هستند. (مقدار اصلی $w=u+iv=\sin^{-۱}z$ مقداری تعریف شده است که $-\pi/۲\leqslant u\leqslant \pi/۲$ هرگاه $v\geqslant$ و $-\pi/۲<u<\pi/۲$ هرگاه $v<۰$.)

۱۳

نگاشت همدیسی

هرگاه تابع $w = f(z)$ درحوزهٔ D از صفحهٔ z تعریف شود، آنگاه به‌ازای هرنقطه از D نقطه‌ای ازصفحهٔ w متناظرقرارمی‌گیرد. بدین‌ترتیب نگاشتی از D برروی بردمقادیر $f(z)$ درصفحهٔ w خواهیم داشت. این «رهیافت هندسی» به‌آنالیز مختلط به‌ما کمك‌می‌کند تا خصلت یك تابع مختلط را با بررسی این‌که آن تابع منحنیها ونواحی معین را چگونه می‌نگارد «تجسم کنیم».

چنانکه مشاهده خواهیم کرد هرگاه $f(z)$ تابعی تحلیلی باشد، نگاشت حاصل از $f(z)$، جز در نقاطی‌که درآنها مشتق $f'(z)$ صفراست، همدیسی است (زاویه را حفظ می‌کند).

نگاشت همدیسی در ریاضیات مهندسی مهم است، چراکه این نگاشت روشی‌متعارف برای حل مسائل با مقدار مرزی درنظریه پتانسیل دوبعدی است. با این روش یـك ناحیهٔ پیچیدهٔ مفروض را به ناحیه‌ای ساده‌تر تبدیل می‌کنند.

نخست به تعریف وتشریح مفهوم نگاشت می‌پردازیم و سپس نگاشتهای متناظر بـا توابع‌تحلیلی مقدماتی‌را بررسی می‌کنیم. کاربردهای این موضوع درهمین فصل وفصل ۱۸ ارائه خواهند شد.

پیشنیاز این فصل: فصل ۱۲.

بخشهایی که برای دورهٔ فشرده‌تر قابل حذف است: بخشهای ۴.۱۳، ۶.۱۳.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، بخش F.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱۰۱۳ نگاشت

تابع حقیقی پیوستهٔ $y=f(x)$ ازمتغیر حقیقی x را می‌توان با نقطه‌یابی به صورت یك منحنی درصفحهٔ دکارتی xy نمایش داد؛ این منحنی را نمودار تابع می‌نامند. درمورد تابع مختلط

$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y) \qquad (z=x+iy) \tag{1}$$

مسئله پیچیده‌تر است، زیرا از نظر هندسی هریک از دو متغیر مختلط w و z به صورت نقطه‌ای درصفحهٔ مختلط نمایش داده می‌شوند. ازاین موضوع چنین برمی‌آیدکه برای دو متغیر باید از دوصفحهٔ مختلط مجزا استفاده شود: یکی صفحهٔ z، که درآن نقطهٔ $z=x+iy$ مشخص می‌شود، ودیگری صفحهٔ w کـه درآن نقطهٔ متناظر z، یعنی $w=u+iv$، معین می‌شود. بدین طریق تابع f به هرنقطهٔ z از دامنهٔ خود نقطهٔ $w=f(z)$ ازصفحهٔ w را مربوط می‌سازد. رابطه‌ای راکه بدین شکل تعریف می‌شود **نگاشت** (یا تبدیل) دامنهٔ f **به‌توی** صفحهٔ w یا، به‌بیان دقیقتر، نگاشت دامنهٔ f **برروی**[1] برد f درصفحهٔ w می‌نامند.

نقطهٔ $w_0=f(z_0)$ متناظر با نقطهٔ z_0 را نقش نقطه یا **نقش** نقطهٔ z_0 نسبت بـه نگاشت تعریف شده با $f(z)$ نامند. هرگاه z روی منحنی C حرکت کند و $f(z)$ پیوسته (غیرثابت) باشد، آنگاه درحالت کلی نقطهٔ متناظر $w=f(z)$ روی منحنی C^* درصفحهٔ w حرکت خواهد کرد. دراین‌صورت منحنی C^* نقش منحنی C نامیده می‌شود؛ کلمهٔ «نقش» درمورد نواحی وسایرمجموعه‌های نقاط نیز به‌کار می‌رود.

چنانچه خواهیم دید خـواص چنین نگاشتهایی را باملاحظهٔ منحنیها (ونواحی) در صفحهٔ z ونقش آنها درصفحهٔ w، وبالعکس، می‌توان بررسی کرد. اطلاعاتی که بااین‌کار می‌تـوان دربارهٔ توابع کسب کرد بیش از اطلاعاتی است که از بررسی چند نقطهٔ منفرد نقش آنها به دست می‌آید.

اگرچه از دوصفحهٔ مجزا برای نمایش w و z استفاده می‌شود، وگاهی خوب است با استفاده از اصطلاحات آشنایی مانند انتقال و دوران این طورتصور کنیم که نگاشت نقاط یك صفحه را هم تبدیل می‌کند. مثلا، نگاشت $w=z+3$ را می‌توان انتقالی تصور کرد که هرنقطهٔ شکلی ازصفحهٔ z را سه واحد به‌راست منتقل می‌کند.

به‌منظورمطالعهٔ خواص ویژهٔ نگاشتی که باتابع تحلیلی مفروض $w=u+iv=f(z)$ تعریف شده است، می‌توان نقشهای دوخط راست ثابت$=x$ وثابت$=y$ درصفحهٔ w را بررسی کرد. امکان دیگر مطالعهٔ نقشهای دوایر ثابت$=|z|$ و خطوط راستی کـه از مبدأ می‌گذرنـد است. بـه عنوان امکان سوم، می‌تـوان منحنیهای ثابت $= u(x,\ y)$ و

---

۱. اصطلاحات عمومی به شرح زیراند. نگاشتی از مجموعهٔ A به توی مجموعهٔ B را **پوششی** یـا نگاشتی از A **بر روی** B نامند هرگاه هرعضو B نقش لااقل یکـی ازاعضای A باشد. نگاشت را انژکتیو یا **یك به‌یك** گویند هرگاه اعضای مختلف A دارای نقشهای مختلف در B باشند. نگاشت را **دوسویی** گویند هرگاه هم‌پوششی وهم یك به یك باشد.

ثابت$=v(x, y)$ درصفحهٔ z را بررسی کرد. این منحنیها **منحنیهای تراز** u و v نامیده می‌شوند. یا می‌توان شکلهای ساده (مربع، مستطیل، وغیره) ونقشهایشان‌را بررسی کرد.

برای اینکه ازآنچه گفته می‌شود شهودی به دست آوریم، برخی مثالهای نوعی را، باشروع از نگاشتهای خیلی ساده، مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

مثال ۱. تبدیل خطی $w=az+b$

نگاشت

$$w=z+b \tag{۱}$$

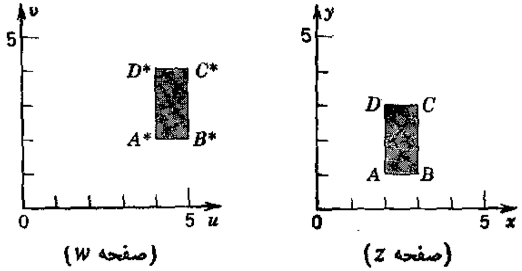
یك **انتقال** است. شکل ۲۷۳ نگاشت (۱) را به‌ازای $b=۲+i$ نشان مـی‌دهد. دراین شکل یك مستطیل ونقش آن، که قابل انطباق برهم هستند، (چرا ؟) نشان داده شده است؛ A^* نقش A است، وهمین طور، نمایش‌دادن نقاط بدین طریق، خصوصاً درموردنگاشتهای پیچیده‌تر، مفید است. (۱) به‌ازای $b=۰$ **نگاشت همانی**

$$w=z$$

است. این نگاشت هر نقطه را برروی خودش می‌نگارد

نگاشت

$$w=az \qquad (|a|=۱)$$



شکل ۲۷۳. انتقال $w=z+۲+i$

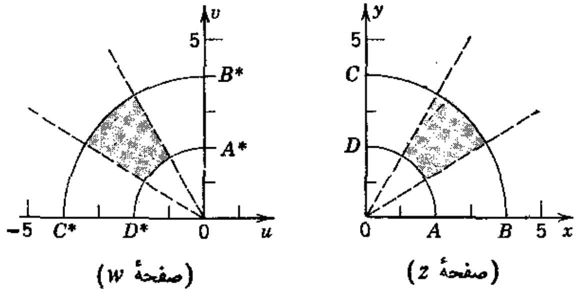
دورانی با زاویهٔ ثابت $\arg a$ است. شکل ۲۷۴، $w=iz$ را نشان می‌دهد.

نگاشت

$$w=az \qquad (a \text{ حقیقی مثبت است})$$

انبساطی یکنواخت است هرگاه $a>۱$ یا **انقباضی یکنواخت** است هرگاه $۰<a<۱$.

نگاشت



شکل ۲۷۴. دوران $w=iz$. (زاویهٔ دوران $\pi/2$، درجهت عکس عقربه‌های ساعت)

$$w=az \qquad (a \text{ دلخواه}) \tag{۲}$$

دورانی (با زاویهٔ $\arg a$) همراه باانبساط یا انقباضی یکنواخت است. نگاشت

$$w=az+b \tag{۳}$$

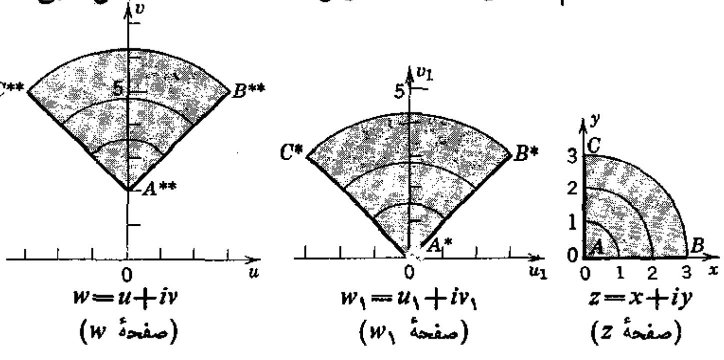
تبدیل خطی نامیده می‌شود. این نگاشت ترکیبی است از دوران و انبساط (یا انقباض) $w_1=az$ وانتقال $w=w_1+b$. شکل ۲۷۵، $w=(1+i)z+2i$ را نشان می‌دهد، که مرکب از دورانی به اندازهٔ $\pi/4$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) و انبساطی به‌اندازهٔ $\sqrt{2}=|1+i|$ وانتقالی قائم به‌طرف بالا است.

مثال ۲. نگاشت $w=z^2$

می‌خواهیم خواص نگاشت

$$w=z^2 \tag{۴}$$

را مورد بحث قراردهیم. دراین مورد ساده‌ترین راه استفاده از نمایش قطبی است. اگر

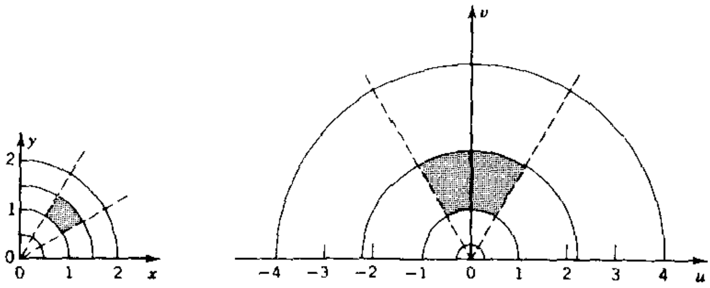


شکل ۲۷۵. تبدیل خطی $w=(1+i)z+2i$، مرکب از دوران وانبساط $w_1=(1+i)z$، به‌اضافهٔ انتقال $2i$ $w=w_1+2i$

قراردهیم $z=re^{i\theta}$ و $w=Re^{i\phi}$، آنگاه (۴) به $Re^{i\phi}=r^2e^{2i\theta}$ تبدیل می‌شود، بنابراین

$$\phi=2\theta \quad و \quad R=r^2$$

ازاین‌رو دوایر ثابت $=r=r_0$ برروی دوایر ثابت $=R=r_0^2$ وشعاعهای ثابت $=\theta=\theta_0$ برروی شعاعهـای ثابت $=\phi=2\theta_0$ نگاشته می‌شوند. بخصوص، محور حقیقی مثبت $(\theta=0)$ برروی محور حقیقی مثبت صفحهٔ w، ومحور موهومی مثبت $(\theta=\pi/2)$ ازصفحهٔ z برروی محـورحقیقی منفی درصفحهٔ w نگاشته می‌شوند. این نگاشت زوایایی راکـه رأس آنها برمبدأ واقـع است دوبرابر می‌کند. ربع اول $0\leqslant\theta\leqslant x/2$ برروی تمام **نیمهٔ فوقانی صفحهٔ w نگاشته می‌شود (شکل ۲۷۶).**



شکل ۲۷۶. نگاشت $w=z^2$

تبدیل $w=z^2$ درمختصات مستطیلی چنین می‌شود:

$$u+iv=x^2-y^2+2xyi.$$

با تفکیک قسمتهای حقیقی وموهومی به دست می‌آوریم

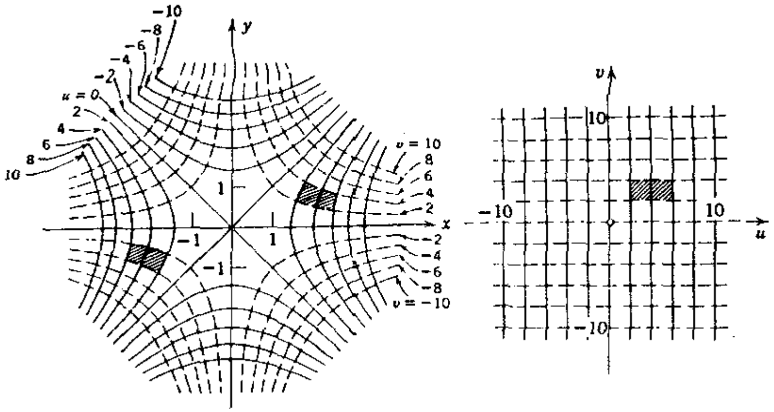
$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy. \tag{5}$$

مشاهده می‌کنیم که **منحنیهای تراز** u و v هذلولیهای متساوی‌الساقین هستندکه مجانبهای آنها خطوط $y=\pm x$ و محورهـای مختصات هستند. ملاحظه می‌کنیم کـه این منحنیها مسیرهای متعامد یکدیگرهستند (ر. ك. بخش ۱۰۰۱). درشکل ۲۷۷، دوناحیهٔ هاشورزده درصفحهٔ z هر دو برروی مستطیل هاشورزده در صفحهٔ w نگاشته می‌شوند. واضح است کـه هرنقطهٔ $w\neq 0$ نقش درست دونقطه ازصفحهٔ z است.

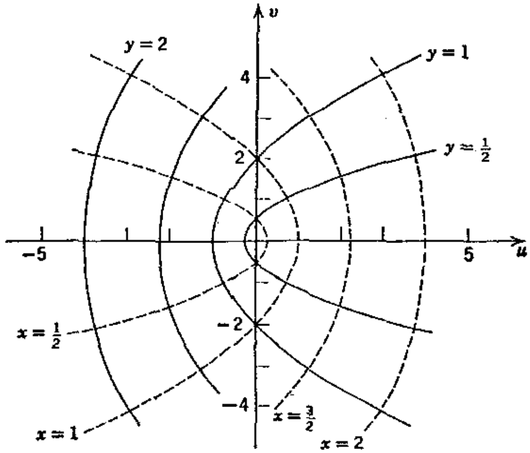
بالاخره، می‌توان از(۵) برای‌تعیین نقشهای خطهای‌راست ثابت $=x$ و ثابت $=y$ استفاده کرد. ثابت $=x=c$ دارای نقش

$$u=c^2-y^2,\quad v=2cy$$

است. باحذف y ازاین دومعادله می‌یابیم



شکل ۲۷۷. منحنیهای تراز u و v درمورد نگاشت $w=z^{۲}$



شکل ۲۷۸. نگاشت $w=z^{۲}$. نقشهای خطهای راست
ثابت$=x$ (خط چین) و ثابت$=y$

$$v^{۲}=۴c^{۲}(c^{۲}-u).$$

این سهمیی است که کانون آن درمبدأ قراردارد ودهانه‌آن به طرف چپ است. همین‌طور، نقش خط ثابت $=v=k$ را می‌توان به صورت

$$v^{۲}=۴k^{۲}(k^{۲}+u)$$

نمایش داد. این سهمیی‌است که‌کانون آن درمبدأ واقع شده ودهانهٔ‌آن به‌طرف راست‌است

(شکل ۲۷۸) . ▲

سایر توانهای

$$w = z^n, \qquad n = ۳, ۴, \ldots \qquad (۶)$$

را می‌توان به‌روشی مشابه بررسی کرد. البته، دراین صورت منحنیهای تراز، و غیره، با معادلات پیچیده‌تری نمایش داده می‌شوند. ناحیهٔ زاویه‌ای $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/n$ بر روی نیمهٔ بالایی صفحهٔ w نگاشته می‌شود (شکل ۲۷۹).

نگاشتهای $1/z$ ، $1/z^2$ ، ... را که باتوانهای صحیح داده می‌شوند نیز می‌توان با استفاده ازمختصات قطبی مورد بحث و بررسی قرارداد. مهمترین مورد درمثال زیرارائه شده است.

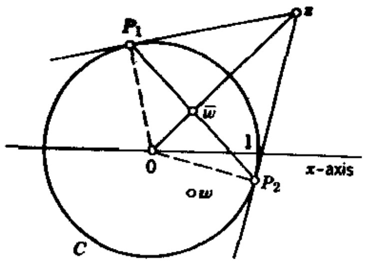
مثال ۳. نگاشت $w = 1/z$. انعکاس

$$w = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0. \qquad (۷)$$

را درنظرمی گیریم. با استفاده مجدد از $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$، بنابه (۷) داریم

$$R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta \qquad (r \neq 0). \qquad (۷')$$

شکل ۲۷۹. نگاشتی‌که با $w = z^n$ تعریف می‌شود



شکل ۲۸۰. تعبیر هندسی $w = 1/z$. در اینجا w نقطهٔ تقاطع Oz و P_1P_2 است، P_1 و P_2 نقاط تماس خطهایی است‌که از نقطهٔ z بردایرهٔ یکه C مماس شده‌اند.

بنابراین نقطهٔ $w=1/z\ (z\neq 0)$ روی شعاعی که مبدأ را به $\bar{z}$ وصل می‌کند، در فاصلهٔ $1/|z|$ ازمبدأ قرار داد.

متذکرمی‌شویم که باداشتن z ابتدا با انعکاس نسبت‌به دایرهٔ یکه (شکل ۲۸۰) و به دنبال آن‌با یافتن قرینهٔ محوری نسبت‌به محور x می‌توان $w=1/z$ را به‌روش هندسی تعیین کرد. خواننده می‌تواند این موضوع را بااستفاده ازمثلثهای متشابه ثابت کند.

شکل ۲۸۱ نشان می‌دهد که $w=1/z$ خطهای راست افقی وقائم را بردایره‌ها یا خطهای راست می‌نگارد، به‌طوری‌که حتی می‌توان گفت:

$w=1/z$ هرخط راست یا دایره را بر روی یك دایره یاخط راست می‌نگارد.

اثبات. هرخط راست یادایره واقع درصفحهٔ z را می‌توان چنین نوشت:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \quad (A\text{، }B\text{، }C\text{ و }D\text{ حقیقی}).$$

اگر $A=0$، این معادله نمایش یك خط راست واگر $A\neq 0$، نمایش یك دایره است، معادلهٔ بالا برحسب z و $\bar{z}$ چنین می‌شود:

$$Az\bar{z}+B\frac{z+\bar{z}}{2}+C\frac{z-\bar{z}}{2i}+D=0$$

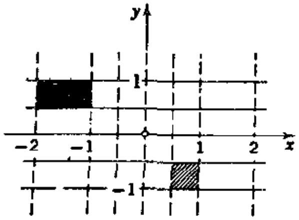
می‌دانیم که $w=1/z$. باجانشانی $z=1/w$ وضرب‌کردن معادله‌در $w\bar{w}$ نتیجه می‌شود

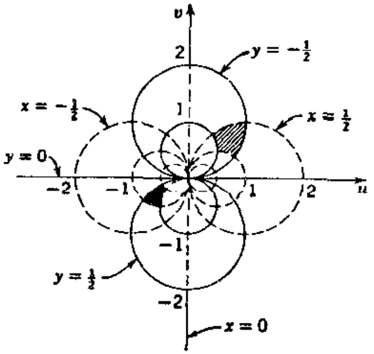
$$A+B\frac{\bar{w}+w}{2}+C\frac{\bar{w}-w}{2i}+Dw\bar{w}=0$$

یا برحسب u و v

$$A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0\,.$$

این نمایش یك دایره (هرگاه $D\neq 0$) یا نمایش یك خط راست (هرگاه $D=0$) در صفحهٔ w است.





شکل ۲۸۱. نگاشت $w=1/z$

مسائل بخش ۱۰۰۱۳

نگاشت $w=(1+i)z-2$ را درنظرمی گیریم. نقش هریك ازمنحنیها، یانواحی زیر را بیابید وآنها را رسم کنید

۱. $x=0,1,2,3$ ۲. $y=-1,0,1,2$ ۳. $|z-2|\leqslant 2$

نگاشت $w=u+iv=z^2$ را درنظر می گیریم . نقش منحنیهای زیر را بیابید و آنها را رسم کنید.

۴. $y=x,\ y=-x$ ۵. $x=0,1,2,3$ ۶. $y=0,1,2,3$

۷. $y=1+x$ ۸. $y=1-x$ ۹. $y^2=x^2+1$

نقش نواحی زیر را تحت نگاشت $w=z^2$ رسم کنید.

۱۰. $|z|>2$ ۱۱. $|z|\leqslant 4$ ۱۲. $|\arg z|<\pi/2$

۱۳. $1<x<2$ ۱۴. $0\leqslant y\leqslant 1$ ۱۵. $-\pi/4<\arg z<\pi/2$

مطلوب است نقش دایره‌ها وخطهای راست زیر تحت نگاشت $w=1/z$.

۱۶. $|z|=1$ ۱۷. $|z+1|=1$ ۱۸. $|z-1|=1$

۱۹. $|z-2i|=2$ ۲۰. $y=x-1$ ۲۱. $x=1$

۲۲. مطلـوب است نقش ناحیـهٔ $-2<x<-1$ ، $-1<y<1$ تحت نگاشت $w=1/z$.

۲۳. مطلوب است نقش ناحیهٔ $1<x<2$ تحت نگاشت $w=1/z$.

۲۴. $w=1/z$ را درنظر می‌گیریم. کدام خطهای راست برروی (الف) خطهای راست، (ب) دایره‌هـا نگاشته می‌شوند؟ کدام دایره‌هـا برروی (پ) خطهای راست ، (ت) دایره‌ها نگاشته می‌شوند.

۲۵. نشان دهیدکه تحت نگاشت $w=1/z$ ، مرکز یك دایرهٔ مفروض برروی مرکزدایرهٔ نقش نگاشته نمی‌شود؟

۲۶. باداشتن $3+4i$ بههمان روش هندسی که در رابطه با تبدیل $w=1/z$ تشریح شد $1/(3+4i)$ را بیابید.

۲۷. نقش نـاحیهٔ زاویه‌ای $0\leqslant \arg z\leqslant \pi/4$ را تحت هریك از تبدیلهای $w=z$ ، $w=iz$ ، $w=-iz$ ، $w=z^2$ ، $w=iz^2$ ، $w=-z^2$ ، $w=-iz^2$ و $w=z^3$ بیابید و رسم کنید.

۲۸. نقش ناحیه‌ای که در مسئلهٔ ۲۷ ذکر شد تحت تبدیلات $w=1/z$ ، $w=i/z$ و $w=i/z^2$ بیابید و رسم کنید.

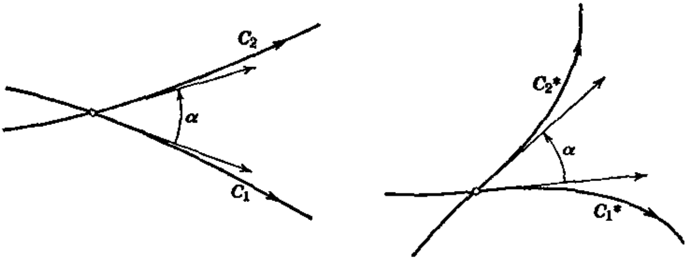
۲۹. تابع تحلیلی $w=u+iv=f(z)$ را، که نیم صفحهٔ $x \geqslant 0$ را برروی ناحیهٔ $u \geqslant 2$ طوری می‌نگارد که $z=0$ با $w=2+i$ متناظر می‌شود، بیابید.

۳۰. تابع تحلیلی $w=u+iv=f(z)$ را که ناحیهٔ زاویه‌ای $0<\arg z<\pi/3$ را برروی ناحیهٔ $u>1$ می‌نگارد پیدا کنید.

۲.۱۳ نگاشت همدیسی

اکنون مهمترین خاصیت هندسی نگاشتهای تعریف شده با توابع تحلیلی، یعنی همدیس‌بودن آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نگاشت درصفحه را حفظ‌کنندهٔ زاویه، یا **همدیسی** گویند، هرگاه زوایای بین منحنیهای جهتدار را از نظر اندازه وجهت حفظ کند، یعنی زاویهٔ بین نقشهای هردومنحنی جهتدارمتقاطع، باتوجه به جهتشان، چه از نظر اندازه وچه از نظر جهت همان زاویهٔ بین دومنحنی باشد. منظور از زاویهٔ بین دومنحنی جهتدار در اینجا زاویه‌ای مانند α ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$) است که بین مماسهای جهتدار درنقطهٔ تقاطع پدیدمی‌آید (شکل ۲۸۲).



شکل ۲۸۲. منحنیهای C_1 و C_2 ونقشهای مربوط به‌آنها C_1^* و C_2^* تحت یك نگاشت همدیسی

می‌خواهیم نشان دهیم که نگاشت $w=f(z)$ درهرنقطه‌ای که $f(z)$ تحلیلی باشد همدیسی است، مگر درنقاطی که مشتق $f'(z)$ درآنها صفراست. چنین نقطه‌ای را **نقطهٔ بحرانی** می‌نامند. مثلا درمورد $f(z)=z^2$ به‌ازای $z=0$ داریم $f'(z)=2z=0$، در نقطهٔ $z=0$ نگاشت همدیسی نیست چراکه در آن زوایا دوبرابر شده است (ر. ك. مثال ۲، بخش ۱.۱۳).

البته، برای نیل به مقاصدی که ما داریم لازم است منحنیها و نقشهایشان را بررسی کنیم. منحنی C واقع درصفحهٔ مختلط z را می‌توان به‌صورت

$$z(t)=x(t)+iy(t) \tag{1}$$

نمایش داد، که در آن t پارامتری حقیقی است. مثلا تابع

$$z(t)=r\cos t+ir\sin t$$

دایرهٔ $r=|z|$ را نمایش می‌دهد، تابع

$$z(t)=t+it^2$$

سهمی $y=x^2$ را نمایش می‌دهد و غیره. جهت افزایش مقادیر t در (۱) جهت مثبت یا سوی مثبت بر C نامیده می‌شود. به‌این ترتیب (۱) روی C جهتی مشخص می‌کند. فرض می‌کنیم که $z(t)$ در (۱) مشتق‌پذیر باشد و مشتق آن $\dot{z}(t)$ پیوسته بوده، هیچ‌جا صفر نباشد. آنگاه C درهر نقطه‌اش دارای مماسی یکتا است و **منحنی هموار** نامیده می‌شود. روی هر مماس جهت متناظر با جهت مثبت روی C را جهت مثبت روی آن مماس می‌نامند، وبدین طریق مماس جهتدار می‌شود.

در واقع، مماس بر C درنقطهٔ $z_0=z(t_0)$ را وضعیت حدی خط راستی که از z_0 ونقطهٔ دیگری مانند $z_1=z(t_0+\Delta t)$ می گذرد هنگامی که z_1 در طول C به سمت z_0 میل می‌کند، یعنی وقتی که $\Delta t \to 0$، تعریف می‌کنیم. (به بخش ۵.۸ نیز مراجعه کنید.) حالا عدد z_1-z_0 را می‌توان با برداری که ابتدای آن z_0 وانتهایش z_1 است نمایش‌داد (شکل ۲۸۳)، بردار $(z_1-z_0)/\Delta t$، که در آن $\Delta t>0$، هم امتداد با بردار z_1-z_0 است. نتیجه می‌شود که بردار

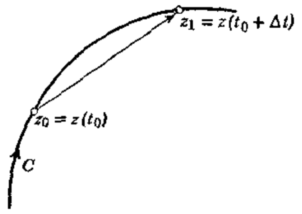
$$\dot{z}(t_0)=\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z_1-z_0}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t} \qquad (۲)$$

در z_0 بر C مماس است، و زاویهٔ بین این بردار وجهت مثبت محور x برابر است با $\arg \dot{z}(t_0)$.

اکنون نگاشت داده شده با تابع تحلیلی غیرثابت

$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$$

را که در حوزه‌ای شامل C تعریف شده است درنظر می‌گیریم. دراین صورت نقش C



شکل ۲۸۳. به دست آوردن فرمول (۲)

تحت این نگاشت، منحنی C^* واقع درصفحه w است که به صورت

$$w(t)=f[z(t)]$$

نمایش‌داده می‌شود. نقطهٔ $w(t_\circ)$ بانقطهٔ $z_\circ=z(t_\circ)$ از C^* متناظراست، و $\dot{w}(t_\circ)$ بردار مماس بر C^* دراین نقطه را نمایش می‌دهد. حالا بنابه قاعدهٔ زنجیری،

$$\frac{dw}{dt}=\frac{df}{dz}\frac{dz}{dt}. \qquad (۳)$$

درنتیجه، هرگاه $f'(z_\circ)\neq\circ$، مشاهده می‌کنیم که $\dot{w}(t_\circ)\neq\circ$ و C^* دارای مماس‌یکتا در $w(t_\circ)$ است،زاویهٔبین بردارمماس $\dot{w}(t_\circ)$ وجهت مثبت‌محور u عبارت‌است‌از $\arg\dot{w}(t_\circ)$. نظر به‌اینکه شناسهٔ حاصلضرب مساوی با مجموع شناسه‌های عوامل ضرب است، با توجه به (۳) داریم

$$\arg\dot{w}(t_\circ)=\arg f'(z_\circ)+\arg\dot{z}(t_\circ)$$

درنتیجه تحت این نگاشت مماس جهتدار بر C در $z_\circ$ به‌اندازهٔ زاویهٔ

$$\arg\dot{w}(t_\circ)-\arg\dot{z}(t_\circ)=\arg f'(z_\circ), \qquad (۴)$$

زاویهٔ بین دوبردار مماس بر C و C^*، دوران می‌کند. چون عبارت طرف راست بستگی به انتخاب C ندارد، ملاحظه می‌کنیم کـه این زاویـه مستقل از C است؛ یعنی، تبدیل $w=f(z)$ مماس برهرمنحنی دلخواه مار بر $z_\circ$ را بـه اندازهٔ همان زاویهٔ $\arg f'(z_\circ)$ دوران می‌دهد. از این‌رو دومنحنی مار بر $z_\circ$ که‌زاویهٔ معینی در $z_\circ$ می‌سازند، برمنحنیهای مار برنقطه $w_\circ$، نقش نقطهٔ $z_\circ$، که همان زاویه را، چه ازنظر جهت و چه ازنظـر اندازه، باهم می‌سازند نگاشته می‌شوند. درنتیجه قضیهٔ اساسی زیر به‌اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۱. (نگاشت همدیسی)

نگاشتی کـه باتابع تحلیلی $f(z)$ تعریف می‌شود همدیسی است، مگر درنقاطی که مشتق $f'(z)$ صفر است.

مثال۱. همدیسی $w=z^۲$

نگاشت $w=z^۲$، جز در $z=\circ$ که درآن $w'=۲z=\circ$، همدیسی است. این مطلب با شکلهای ۲۷۶ و ۲۷۸ تشریح شده است؛ دراین شکلها منحنیهای نقش یکدیگر را بازاویهٔ قائمه قطع می‌کنند، جزدرنقطهٔ $z=\circ$ که درآن زوایاتحت این نگاشت دوبرابرمی‌شوند، چراکـه هرشعاع ثابت $\arg z=c$ به شعاع $\arg w=۲c$ تبدیل می‌شود (ر. ک. شکل ۲۷۶ بخش قبل).

اضافه می‌کنیم که بنابه تعریف مشتق داریم

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| = |f'(z_0)|.$$

بنابراین، نگاشت $w=f(z)$ طول پاره خطهای کوتاه را تقریباً $|f'(z_0)|$ برابر بزرگ می‌کند. نقش یك شکل هندسی کوچك با شکل اصلیِ همدیس است به این معنی که تقریباً دارای همان شکل است. اما از آنجا که $f'(z)$ از هر نقطه به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند، یك شکل هندسی بزرگ ممکن است دارای نقشی باشد که شکل آن کاملا با شکل اصلی تفاوت داشته باشد.

با توجه به (۳) از بخش ۵.۱۲ ومعادلات کشی ــ ریمان متذکر می‌شویم

$$(5') \quad |f'(z)|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

یعنی

$$(5) \qquad |f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}$$

این دترمینان به ژاکوبی (ر. ك. بخش ۳.۹) تبدیل $w=f(z)$ ، که به شکل حقیقی

$$u=u(x\ y), \quad v=v(x,\ y)$$

نوشته می‌شود، موسوم است. درنتیجه، شرط $f'(z_0) \neq 0$ دلالت برآن دارد که ژاکوبی در z_0 صفر نیست. این شرط کفایت می کند تحدید نگاشت $w=f(z)$ به همسایگی N_0 از z_0 که به‌اندازهٔ کافی کوچك است **یك به‌یك** یا انژکتیو باشد، یعنی نقاط مختلف دارای نقشهای مختلف باشند؛ اثبات درمرجع [A۲]، که درضمیمهٔ ۱ فهرست شده ، آمده است. (پانوشت ۱ بخش ۱.۱۳ را نیز ملاحظه کنید.)

مثال ۲

نگاشت $w=z^2$ درهر همسایگی از نقطهٔ دلخواه $z \neq 0$ ، که به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد، یك به یك است. این نگاشت درهمسایگی $z=0$ یك به‌یك نیست. تمامی صفحهٔ z برروی صفحهٔ w نگاشته می‌شود به‌طوری که هر نقطهٔ $w \neq 0$ نقش دونقطه ازصفحهٔ z باشد. برای نمونه، نقاط $z=1$ و $z=-1$ برروی $w=1$ نگاشته می‌شوند و به طور کلی دونقطهٔ z_1 و $-z_1$ دارای یك نقش $w=z_1^2$ هستند.

اهمیت عملی نگاشت همدیسی از این واقعیت ناشی می‌شود که توابع همساز با دو متغیر حقیقی (ر. ك. بخش ۵.۱۲) تحت تغییرمتغیر حاصل ازتبدیل همدیسی (قضیهٔ ۲ زیر)

همساز باقی می‌مانند. این موضوع دارای نتایج مهمی است. فرض کنید که بخواهیم یك **مسئله بامقدار مرزی** را درارتباط باپتانسیل دوبعدی حل کنیم، یعنی درناحیهٔ مفروض D جوابی برای معادلهٔ لاپلاس (برحسب دومتغیر مستقل) بیابیم که برمرز D مقادیرمفروضی را اختیارکند. امکان دارد بتوانیم نگاشتی همدیسی بیابیم که D را به ناحیهٔ ساده‌تر D^*، مثلاً به‌قرص مستدیر یا نیم صفحه، تبدیل کند. دراین صورت می‌توانیم معادلهٔ لاپلاس را با توجه به شرایط مرزی تبدیل یافته در D^* حل کنیم. وقتی جواب حاصل با استفاده از نگاشت به D برگردانده شود همان جواب مسئلهٔ اصلی خواهد بود. این روش پرقدرت با قضیهٔ زیر توجیه شده است.

قضیهٔ ۲ (توابع همساز ونگاشت همدیسی)

تابع همساز $h(x, y)$ تحت تغییر متغیر ناشی از تبدیل همدیسی که با تابع تحلیلی $w=f(z)$ داده شده است همساز باقی می‌ماند.

اثبات اول، بافرض وجود همساز مزدوج. فرض می‌کنیم $h(x, y)$ درحوزهٔ D همساز بوده، $g(x, y)$ مزدوج[1] $h(x, y)$ در D باشد، به طوری که $h+ig$ تابع تحلیلی $H(z)$ از $z=x+iy$، در D، باشد. بنابه فرض، نگاشت

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

یك به یك و همدیسی است. در نتیجه D^*، نقش D، یك حوزه است؛ همچنین در D، $f'(z)\neq 0$، و تابع معکوس $z=F(w)$ که D^* را برروی D نگارد وجود دارد. $F(w)$ در D^* تحلیلی است؛ ومشتق آن عبارت است از

$$\frac{dF}{dw}=\frac{1}{df/dz}.$$

اثبات این فرمول شبیه اثبات مشابه آن در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی است. درنتیجه $H(F(w))$ تابعی تحلیلی از w در D^* است. قسمت حقیقی این تابع برابر $h(x(u, v), y(u, v))$ وتابعی همساز u, v در D^* است.

اثبات دوم، بدون فرض وجود همساز مزدوج. فرض می‌کنیم $h(x, y)$ در D همساز باشد. مانند قبل، برای به‌دست آوردن $h(x(u, v), y(u, v))$ از $z=x+iy=F(w)$ استفاده می‌کنیم. این تابع را، که تابعی از u و v درنظر گرفته می‌شود، برای سادگی با همان h نشان می‌دهیم وثابت می‌کنیم که در D^*، نقش D تحت $w=f(z)$، همساز است. قاعدهٔ زنجیری را به‌کار می‌بریم. ضمن آنکه مشتقات جزئی را باشاخص زیر نشان می‌دهیم:

---

۱. ر. ك. بخش ۵.۱۲ بدون آنکه اثبات کنیم متذکر می‌شویم که اگر D همبند ساده باشد، همساز مزدوج آن، وجود دارد (تعریف، بخش ۱۲.۹).

$$h_x=h_u u_x+h_v v_x.$$

قاعدهٔ زنجیری را یک‌بار دیگر به‌کار می‌بریم و زیرجملاتی‌که درجمع $h_{xx}+h_{yy}$ حذف می‌شوند خط می‌کشیم:

$$h_{xx}+\underline{h_u u_{xx}}+(h_{uu}u_x+h_{uv}v_x)u_x$$
$$+\underline{h_v v_{xx}}+(h_{vu}u_x+h_{vv}v_x)v_x$$

h_{yy} از همین عبارت با تبدیل x به y نتیجه می‌شود. اکنون مجموع $h_{xx}+h_{yy}$ را با توجه به

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \quad v_{xx}+v_{yy}=0$$

(چون $w=u+iv$ تحلیلی است) تشکیل می‌دهیم و درحاصل جمع $h_{vu}=h_{uv}$ در

$$u_x v_x+u_y v_y$$

که برطبق معادلات کشی ـ ریمان صفراست ضرب شده است. آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$h_{xx}+h_{yy}=h_{uu}(u_x^2+u_y^2)+h_{vv}(v_x^2+v_y^2)$$

که این نیز باتوجه به‌معادلات کشی‌ـریمان برابر است با

$$(h_{uu}+h_{vv})(u_x^2+v_x^2).$$

بنابراین بنابه ('۵)،

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right). \tag{۶}$$

چون $f(z)$ همدیسی است $f'(z)\neq 0$، و بنابه فرض طرف چپ (۶)، در D، برابر صفراست. بنابراین عبارت داخل پرانتز در D^* صفراست.

وقتی از روش نگاشت همدیسی در نظریهٔ پتانسیل استفاده می‌کنیم، مشکل یافتن تابعی تحلیلی‌است که ناحیهٔ مفروضی‌را برروی ناحیهٔ ساده‌تری می‌نگارد. برای این‌منظور نیاز به تجربه و دانش مفصلی ازخواص نگاشتی توابع تحلیلی مقدماتی داریم. بنابراین، مهمترین توابع مقدماتی را ازاین‌نقطه نظر مورد بررسی قرار دهیم.

مسائل بخش ۲۰۱۳

۱. چرا نقشهای منحنیهای ثابت $=|z|$ و ثابت $=\arg z$ تحت نگاشت با یک تابع تحلیلی با زاویه قائمه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۲. به‌چه دلیلی منحنیهای تراز ثابت $=u$ و ثابت $=v$ تابع تحلیلی $w=u+iv=f(z)$ درهر نقطه‌ای که $f'(z)\neq 0$ با زاویهٔ قائمه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۳. آیا نگاشت $w=\bar{z}=x-iy$ زوایا را ازنظر اندازه و از نظر جهت حفظ می‌کنند؟

منحنیهای زیر را، که درصفحهٔ z ($z=x+iy$) قرار دارند، به‌صورت $z=z(t)$ نمایش دهید.

۴. $x^2+y^2=4$ ۵. $y=1/x$ ۶. $y=4x^2$

۷. $x^2-y^2=1$ ۸. $y=ax+b$ ۹. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

نقاطی را درصفحهٔ z معین کنید که در آن نقاط $w=f(z)$ همدیسی نباشد، $f(z)$ برابر است با

۱۰. z^4 ۱۱. $\sin z$ ۱۲. $z+z^{-1}(z\neq 0)$

۱۳. e^{z^2} ۱۴. z^4-z^2 ۱۵. z^2+az+b

(۵) را درمورد توابع $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ زیر تحقیق کنید.

۱۶. e^z ۱۷. $\cos z$ ۱۸. z^2-3z

۱۹. همهٔ فرمولهای اثبات دوم قضیهٔ ۲ را بنویسید ومراحل اثبات را به‌تفصیل انجام‌دهید.

۲۰. درستی قضیهٔ ۲ را به‌ازای $h(x, y)=x/(x^2+y^2)$، $f(z)=2z+1$ تحقیق کنید.

۳-۱۳ تبدیلهای کسری خطی

منظور از **تبدیل کسری خطی** (یا **تبدیل موبیوس**) تبدیلی به صورت

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0) \tag{1}$$

است، که در آن ثابتهای a، b، c، d اعداد حقیقی یا مختلط هستند. لزوم شرط $ad-bc\neq 0$ باتوجه به مشتق (۱):

$$w'=\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

روشن می‌شود. این تساوی نشان می‌دهد که اگر $ad-bc\neq 0$ مخالف صفر باشد $w'\neq 0$، که این شرط نیز همدیسی بودن نگاشت را تضمین می‌کند، حال آنکه

$ad-bc=0$ منجر به $w'\equiv 0$ یا ثابت $=w$ می‌شود، که جالب نیست و در بحثهای آیندهٔ ما جایی ندارد.

حالتهای خاصی از (۱) که در بخش ۱۰۱۳ مورد بحث قرار گرفتند عبارتند از انتقال

$$w=z+b \tag{۲}$$

دوران و انبساط یا انقباض

$$w=az\,, \tag{۳}$$

انعکاس و یافتن قرینهٔ محوری نسبت به محور x

$$w=\frac{1}{z} \tag{۴}$$

و تبدیل خطی

$$w=az+b\;. \tag{۵}$$

صفحهٔ مختلط توسعه یافته، با توجه به (۱) مشاهده می‌کنیم با هر z ی که به‌ازای آن $cz+d\neq 0$، درست یك عدد مختلط w متناظر است. فرض می‌کنیم که $c\neq 0$. آنگاه با مقدار $z=-d/c$ که به‌ازای آن $cz+d=0$، w یی متناظر نمی‌شود. این موضوع ما را ترغیب می‌کند که یك «نقطهٔ ناسره» به‌صفحهٔ w بیفزاییم. این نقطه‌را **نقطه دربینهایت** می‌نامند و با علامت ∞ (بینهایت) نمایش می‌دهند. صفحهٔ مختلط به‌انضمام نقطهٔ ∞ را **صفحهٔ مختلط توسعه یافته** می‌گویند. در این صورت صفحهٔ مختلط بدون نقطهٔ ناسره **صفحهٔ مختلط متناهی** نامیده می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم $w=\infty$ نقش‌نقطهٔ $(c\neq 0)$ $z=-d/c$ تحت نگاشتی که با (۱) تعریف می‌شود باشد. وقتی که در (۱)، $c=0$، آنگاه $a\neq 0$، $d\neq 0$ (چرا؟)، وفرض می‌کنیم که $w=\infty$ نقش نقطهٔ $z=\infty$، **نقطهٔ** ناسره صفحهٔ z توسعه یافته، است.

نگاشت معکوس (۱) از حل (۱) نسبت به z حاصل می‌شود؛ خواهیم داشت

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a} \tag{۶}$$

وقتی $c\neq 0$، آنگاه به‌ازای $w=a/c$، $cw-a=0$، وفرض می‌کنیم $w=a/c$ نظیر $z=\infty$ باشد. وقتی که $c=0$، آنگاه $a\neq 0$ و $d\neq 0$، و دراین صورت مانند قبل $w=\infty$ را با $z=\infty$ متناظر قرار می‌دهیم. بنابراین هر نگاشتی که به صورت (۱) باشد نگاشتی یك به یك از صفحهٔ z توسعه یافته برروی صفحهٔ w ی توسعه یافته است؛ گوییم هر تبدیل کسری خطی (۱) «صفحهٔ توسعه یافته را به طور یك به‌یك بر روی خودش» می‌نگارد.

با توجه به‌آنچه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت:

تبصرهٔ کلی. اگر $z=\infty$ ، آنگاه طرف راست (۱) به صورت عبارت بی‌معنی $(a\cdot\infty+b)/(c\cdot\infty+d)$ در می‌آید. وقتی که $c\neq 0$ ، مقدار $w=a/c$ و هنگامی که $c=0$ ، مقدار $w=\infty$ را به این عبارت نسبت می‌دهیم.

نقاط ثابت. یک نقطهٔ ثابت نگاشت $w=f(z)$ *نقطه‌ای است که نقش آن همان عدد مختلط باشد*؛ یعنی نقاط ثابت از رابطهٔ

$$w=f(z)=z$$

به‌دست می‌آیند. درنتیجه نقاط ثابت از معادلهٔ

$$z=\frac{az+b}{cz+d}$$

یا

$$cz^{2}-(a-d)z-b=0 \qquad (7)$$

به‌دست می‌آیند. این یك معادلهٔ درجه دو برحسب z است که ضرایب آن وقتی وفقط وقتی صفرند که نگاشت همانی باشد (دراین حالت $a=d\neq 0$ ، $b=c=0$). درنتیجه داریم

قضیهٔ ۱ (نقاط ثابت)

هرتبدیل کسری خطی، غیرهمانی، حداکثر دونقطهٔ ثابت دارد. هرگاه تبدیل کسری خطی دارای سه یا تعداد بیشتری نقاط ثابت باشد، آنگاه این تبدیل نگاشت همانی است.

تبدیلهای کسری خطی خاص که از نظر عملی بااهمیت هستند وهمچنین تعدادبیشتری ازخواص عمومی تبدیلهای کسری خطی دربخش بعد مورد بحث قرارخواهندگرفت.

مسائل بخش ۱۳۰۳

نقاط ثابت نگاشتهای زیر را بیابید.

۱. $w=iz$ ۲. $w=-iz+4$ ۳. $w=z^{2}$

۴. $w=(z-i)^{2}$ ۵. $w=z^{3}$ ۶. $w=iz^{2}$

۷. $w=\frac{3z-1}{z+3}$ ۸. $w=\frac{5z+4}{z+5}$ ۹. $w=\frac{2iz-1}{z+2i}$

مطلوب است تبدیل کسری خطیی که نقاط ثابت آن عبارت باشند از

۱۰. $1,\ -1$ ۱۱. $i,\ -i$ ۱۲. 1

۱۳. تمام تبدیلات کسری خطیی را که نقاط ثابت آنها $i,\ -i$ هستند، بیابید.

۱۴. تمام تبدیلات کسری خطیی را که نقاط ثابت آنها $1,\ -1$ هستند، بیابید.

۱۵. تمام تبدیلات کسری خطی‌را که درصفحهٔ متناهی نقطهٔ ثابتی ندارند،بیابید. [از(۷) استفاده کنید .]

۴.۱۳ تبدیلهای کسری خطی خاص

دراین بخش توضیح می‌دهیم که چطور می‌توان تبدیلهای کسری خطی

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0) \tag{۱}$$

راکه برای نگاشتن حوزه‌های سادهٔ معین برروی سایرحوزه‌ها به‌کارمی‌روند تعیین کرد، و چگونه می‌توان خواص (۱) را مورد بحث قرارداد. راه‌گشای چنین بحثی عبارت‌است‌از

قضیهٔ ۱ (دوایر و خطهای راست)

هرتبدیل کسری خطی (۲) جمیع دوایر وخطهای راست صفحهٔ z را برروی جمیع دوایر و خطهای راست صفحهٔ w می‌نگارد.

اثبات. صحت این ادعا درمورد انتقال یا دوران بدیهی است، وهمین طور درمورد انبساط و انقباض یکنواخت واضح است و، بنا به مثال ۳ بخش ۱.۱۳ قضیه درمورد $w=1/z$ صادق است. قضیهٔ بالا همچنین درمورد ترکیب این نگاشتها نیز درست است. بنابراین به‌ازای $c\neq 0$ قضیه در مورد (۱) برقرار خواهد بود، زیرا به‌ازای $c\neq 0$ نگاشت (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$w=K\frac{1}{cz+d}+\frac{a}{c} \quad \text{که در آن} \quad K=-\frac{ad-bc}{c} \tag{۲}$$

و با قراردادن

$$w_1=cz, \quad w_2=w_1+d, \quad w_3=\frac{1}{w_2}, \quad w_4=Kw_3,$$

داریم $w=w_4+a/c$. این موضوع نشان می‌دهد که (۱) ترکیبی ازحالتهای خاص (۲) الی (۴) بخش ۳.۱۳ است.

تبدیل کسری خطی (۱) به‌سه‌مقدارثابت اساسی، که عبارتند ازنسبت هرسه‌تادلخواه ازمقادیر ثابت a، b، c، d به‌مقدار چهارم بستگی دارد. شرط اینکه سه نقطهٔ مجزا از صفحهٔ z دارای نقشهای مشخص درصفحهٔ w باشد، به شرح زیرمنجر به‌تبدیل کسری‌خطی یکتایی می‌گردد.

قضیهٔ ۲ (سه نقطهٔ ثابت ونقشهای داده شدهٔ آنها)

سه نقطهٔ مجزا و مفروض z_1، z_2، z_3 را همواره می‌توان با یك، و تنها یك، تبدیل کسری خطی $w=f(z)$ برروی سه نقطهٔ مجزای مشخص w_1، w_2، w_3 نگاشت . این نگاشت به طور ضمنی بامعادله زیرداده می‌شود:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

(هرگاه یکی ازاین نقاط نقطهٔ ∞ باشد، خارج قسمت دوتفاضلی که شامل این نقطه‌هستند باید برابر ۱ فرض شود.)

اثبات. معادلهٔ (۳) به‌صورت $F(w)=G(z)$ است که درآن F و G توابع کسری‌خطی متغیرهای‌مربوط به‌خودهستند. ازاینجا به‌سهولت به‌دست‌می‌آوریم $w=f(z)=F^{-1}[G(z)]$ که درآن F^{-1} نشان دهندهٔ تابع معکوس F است. چون معکوس تبدیل کسری خطی و ترکیب تبدیلهای کسری خطی تبدیل کسری خطی هستند (ر. ك. مسئلهٔ ۳ آخسر بخش)، $w=f(z)$ تبدیل کسری خطی است. به علاوه بنا به (۳) مشاهده می کنیم که

$$F(w_1)=0,\quad F(w_2)=1,\quad F(w_3)=\infty,$$

$$G(z_1)=0,\quad G(z_2)=1,\quad G(z_3)=\infty.$$

درنتیجه $w_1=f(z_1)$ ، $w_2=f(z_2)$ ، $w_3=f(z_3)$. این موضوع وجود تبدیل کسری خطی $w=f(z)$ را که z_1 ، z_2 ، z_3 را به ترتیب برروی w_1 ، w_2 ، w_3 می‌نگارد ثابت می کند.

اکنون ثابت می کنیم کـه $w=f(z)$ به طوریکتا معین می‌شود. فرض کنید کـه $w=g(z)$ تبدیل کسری‌خطی‌دیگری باشد که z_1، z_2، z_3 رابه‌ترتیب برروی w_1، w_2، w_3 می‌نگارد. دراین صورت معکوس آن $g^{-1}(w)$ ، w_1 را بـرروی z_1، w_2 را برروی z_2 و w_3 را برروی z_3 خواهد نگاشت. درنتیجه، نگاشت مرکب $H=g^{-1}[f(z)]$ هریك‌از نقاط z_1 ، z_2 ، و z_3 را برروی خودش می‌نگارد، یعنی دارای سه نقطهٔ ثابت مجزای z_1، z_2، z_3 است. بنا به قضیهٔ ۱ از بخش قبل نتیجه می گیریم کـه H نگاشتی همانی است و بنابراین $g(z)\equiv f(z)$.

آخرین عبارت قضیهٔ بالا ازتبصرهٔ کلی بخش‌قبل نتیجه می‌شود، وبدین‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.

نگاشت نیم‌صفحه بر روی قرص. این نگاشت مثلا درمسائل مربوط به پتانسیل از لحاظ عملی‌جالب‌است بدون‌آنکه به‌کلیت موضوع خللی‌وارد شود، فرض می کنیم که می‌خواهیم نیم‌صفحهٔ فوقانی $y\geqslant 0$ را برروی قرص یکه $|w|\leqslant 1$ بنگاریم. مرز نیم‌صفحه محور x ها است؛ واضح است که این مرز باید برروی دایرهٔ یکهٔ $|w|=1$ نگاشته شود. واز همینجا الهام می گیریم: برای پیدا کردن نگاشت، سه‌نقطه روی محور x انتخاب‌می‌کنیم، نقشهای این نقاط را برروی دایره تعیین می کنیم وقضیهٔ ۲ را به‌کار می‌بریم. باید اطمینان حاصل کنیم کـه نیم صفحهٔ $y\geqslant 0$ برروی داخل ونه برروی خارج دایرهٔ مزبور نگاشته شده است.

مثال ۱. نگاشت نیم صفحه برروی قرص

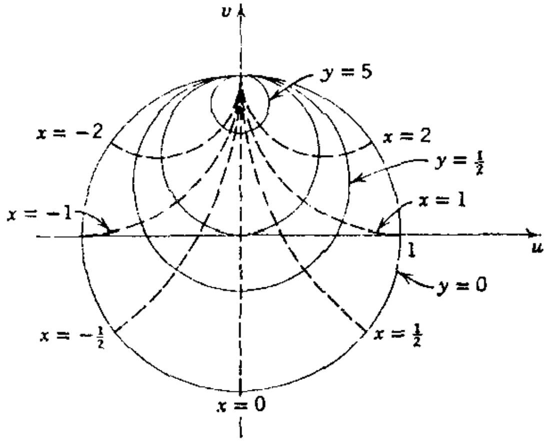
مطلوب است تبدیل کسری خطی (۱) که $z_1 = -1$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = 1$ را به‌ترتیب بر روی $w_1 = -1$ ، $w_2 = -i$ ، $w_3 = 1$ می‌نگارد. از (۳) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{w-(-1)}{w-1}\cdot\frac{-i-1}{-i-(-1)}=\frac{z-(-1)}{z-1}\cdot\frac{0-1}{0-(-1)}$$

یا

$$w=\frac{z-i}{-iz+1} \tag{۴}$$

هم‌اکنون نشان می‌دهیم که‌خواص ویژهٔ چنین‌نگاشتی را بدون انجام دادن‌محاسبات مشکل می‌توان تعیین کرد. نقشهای خطوط $x=$ ثابت و $y=$ ثابت به‌شرح زیر به‌دست می‌آیند. نقطهٔ $z=i$ با $w=0$ و نقطهٔ $z=\infty$ با $w=i$ متناظر است. هرگاه $z=iy$، آنگاه داریم $w=i(y-1)/(y+1)$ ؛ یعنی محور موهومی مثبت برروی پاره خط $u=0$، $-1 \leqslant v \leqslant 1$ نگاشته می‌شود. چون نگاشت همدیسی است و خطوط راست برروی دوایر یاخطوط راست نگاشته می‌شوند، خطوط $y=$ ثابت برروی دوایری که از نقش $z=\infty$ می‌گذرند نگاشته می‌شوند، یعنی برروی دوایری که از $w=i$ می‌گذرند و مرکزشان روی محور v قرار دارد. به‌همین‌دلیل، نتیجه می‌شودکه، خطوط $x=$ ثابت برروی دوایری که بردایره‌های نقش خطوط $y=$ ثابت عمودند نگاشته می‌شوند (شکل ۲۸۴). نیم صفحهٔ تحتانی باخارج دایرهٔ یکهٔ $|w|=1$ متناظر است.



شکل ۲۸۴. تبدیل کسری خطی مثال ۱

مثال ۲. رخداد ∞

تبدیل کسری خطیی را تعیین کنید که $z_1=0$ ، $z_2=1$ ، $z_3=\infty$ را به‌ترتیب برروی $w_1=-1$ ، $w_2=-i$ ، $w_3=1$ بنگارد. باتوجه به (۳) نگاشت مورد نظر به دست می‌آید:

$$w=\frac{z-i}{z+i} \tag{۵}$$

این نگاشت را گاهی اوقات تبدیل کیلی* می‌نامند. دراین حالت، ابتدا از (۳) $(z-\infty)/(\infty-1)$ به دست می‌آید، که به‌جای آن ۱ می‌گذاریم. ▲

نگاشت نیم صفحه‌ها برروی نیم صفحه‌ها. نگاشت نیم صفحه‌ها برروی نیم صفحه‌ها نیز ازنظر عملی جالب است، به‌عنوان یک‌مورد نمونه‌وار، می‌توان نیم صفحهٔ فوقانی $y\geqslant 0$ را برروی نیم صفحهٔ فوقانی $v\geqslant 0$ نگاشت. دراین صورت محور x باید برروی محور u نگاشته شود.

مثال ۳. نگاشت نیم‌صفحه برروی نیم‌صفحه

تبدیل کسری خطیی را بیابیدکه نقاط $z_1=-2$ ، $z_2=0$ ، $z_3=2$ را به‌ترتیب برروی $w_1=\infty$ ، $w_2=1/4$ ، $w_3=3/8$ بنگارد. چنانکه خواننده می‌تواند نشان دهد، با توجه به (۳) داریم

$$w=\frac{z+1}{2z+4}. \tag{۶}$$

نقش محور x چیست؟ ▲

نگاشت قرصها برروی قرصها. دستهٔ سوم از مسائل عملی نگاشت قرصها برروی قرصها است. می‌توان قرص یکهٔ صفحهٔ z را برروی قرص یکهٔ صفحهٔ w نگاشت. به سهولت می‌توان تحقیق کرد که تابع

$$w=\frac{z-z_0}{cz-1}, \quad c=\bar{z}_0, \quad |z_0|<1 \tag{۷}$$

چنین نگاشتی را انجام می‌دهد. این تابع نقطه z_0 را برروی مرکز $w=0$ می‌نگارد (ر.ك. مسئلهٔ ۶).

مثال ۴. نگاشت قرص یکه برروی قرص یکه

فرض‌می‌کنیم $z_0=1/2$. آنگاه باتوجه به (۷)،

* Cayley transformation

$$w(z)=\frac{۲z-۱}{z-۲}$$

محورهای حقیقی باهمدیگر متناظرند؛ به‌ویژه

$$w(-۱)=۱,\quad w(۰)=\frac{۱}{۲},\quad w(۱)=-۱\,.$$

نظر به‌اینکه نگاشت همدیسی است وخطوط راست برروی دوایر یاخطوط راست نگاشته می‌شوند و $w(\infty)=۲$، نقشهای خطوط ثابت$=x$ دوایری هستندکه از $w=۲$ می‌گذرند و مرکز آنها روی محور u قرار دارد؛ و خطوط ثابت$=y$ برروی دوایری نگاشته می‌شوندکه به‌دوایر قبلی عمودند (شکل ۲۸۵).

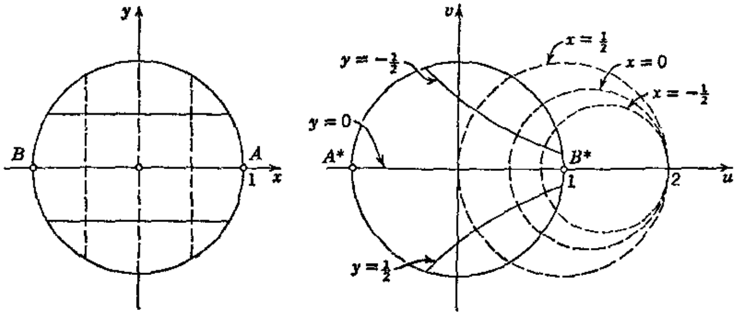
نگاشت نواحی زاویه‌ای برروی قرص یکه را می‌توان ازترکیب تبدیلهای کسری خطی با تبدیلهایی ازنوع $w=z^n$، که درآن n عددی صحیح و بزرگتر از ۱ است، به‌دست آورد.

مثال ۵. نگاشت ناحیهٔ زاویه‌ای برروی قرص یکه

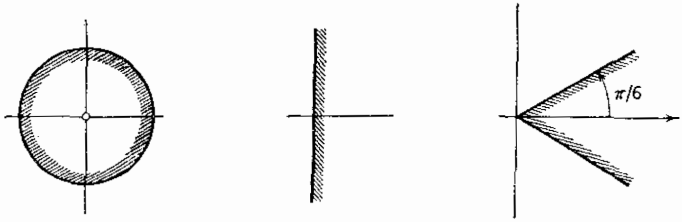
ناحیهٔ زاویه‌ای $D:-\pi/۶\leqslant \arg z\leqslant\pi/۶$ را برروی قرص یکهٔ $|w|\leqslant ۱$ می‌نگاریم. برای این منظور به‌روش زیرعمل می‌کنیم. نگاشت $t=z^۳$ ناحیهٔ D را برروی نیمهٔ راست صفحهٔ t می‌نگارد. سپس‌ازیك تبدیل‌کسری خطی استفاده می‌کنیم تا این نیم‌صفحه را برروی قرص یکه بنگاریم، این تبدیل، به‌عنوان مثال، می‌تواند

$$w=i\,\frac{t-۱}{t+۱}$$

باشد. اگر دراین نگاشت قراردهیم $t=z^۳$، خواهیم داشت



شکل ۲۸۵. نگاشت مثال ۴



(صفحهٔ w) (صفحهٔ t) (صفحهٔ z)

شکل ۲۸۶. نگاشت مثال ۵

$$w = i\frac{z^{3} - 1}{z^{3} + 1};$$

واین نگاشت دارای خواص مورد نظر است (شکل ۲۸۶).

مسائل بخش ۴.۱۳

۱. $w=(z+i)/(iz+4)$ را به صورت ترکیبی از نگاشتهای نوع (۲)، (۳) و (۴) بخش ۳.۱۳ نمایش دهید.

۲. قضیهٔ ۱ را به‌ازای $w=az$، که درآن $a \neq 0$، ثابت کنید.

۳. نشان دهید که ترکیب دوتبدیل کسری خطی یك تبدیل کسری خطی است.

۴. (۵) را از (۳) نتیجه بگیرید.

۵. (۵) را به‌صورت ترکیبی‌از نگاشتهای نوع(۲)،(۳)،و(۴) بخش۳.۱۳ نمایش‌دهید.

۶. حکم مربوط به (۷) را ثابت کنید.

۷. تبدیل کسری خطیی بیابید که $|z| \leqslant 1$ را برروی $|w| \leqslant 1$ بنگارد به طوری که $z=i/4$ برروی $w=0$ نگاشته شود، ونقشهای خطوط $x=$ ثابت و $y=$ ثابت را رسم کنید.

۸. معکوس (۴) را بیابید. نشان دهید که (۴) خطوط $x=c=$ ثابت را برروی‌دوایری که مراکزشان برخط $v=1$ قرار دارد، می‌نگارد.

مطلوب است تبدیل کسری خطیی که به‌ترتیب

۹. 0، 1، ∞ را برروی ∞، 1، 0 می‌نگارد.

۱۰. 0، 1، i را برروی 2، 3، $2+i$ می‌نگارد.

۱۱. ۰، ۱، ۲ را برروی ۱، ۱/۲، ۱/۳ می‌نگارد.

۱۲. ۱−، ۰، ۱ را برروی ۰، ۱−، ∞ می‌نگارد.

۱۳. $-i$، ۰، i، را برروی ∞، ۱−، ۰ می‌نگارد.

۱۴. ۰، i، $2i$ را برروی ∞، $2i$، $5i/2$ می‌نگارد.

۱۵. ۱−، i، $1+i$ را برروی ۰، ∞، $2+i$ می‌نگارد.

۱۶. i، ۰، ۱ را برروی $i/2$، ۰، $(1+i)/2$ می‌نگارد.

۱۷. ۱/۲، ۱، ۳ را برروی ∞، ۴، ۶/۵ می‌نگارد.

۱۸. ۰، ۱، ∞ را برروی ∞، $(1-i)/2$، ۱/۲ می‌نگارد.

مطلوب است کلیهٔ تبدیلهای خطی $w(z)$ که خاصیت زیر را دارند.

۱۹. $z_1 = 0$ یك نقطهٔ ثابت آنها است.

۲۰. $z_1 = 0$، $z_2 = \infty$ نقاط ثابت آنها هستند.

۲۱. محور x را برروی محور u می‌نگارند.

۲۲. تبدیل کسری خطیی بیابیدکه ۰ را برروی ip بنگارد، p دراینجا عددی حقیقی است، ونقاط ثابت آن ۱−، ۱ باشند. حالتهای $p=0$ و $p=1$ را مورد بحث وبررسی قراردهید.

۲۳. تابعی تحلیلی بیابید که ربع دوم صفحهٔ z را برروی داخل دایرهٔ یکهٔ صفحهٔ w بنگارد.

۲۴. مطلوب است تابع تحلیلی $w=f(z)$ که ناحیهٔ $2 \leqslant y \leqslant x+1$ را برروی قرص یکهٔ $|w| \leqslant 1$ می‌نگارد.

۲۵. مطلوب است تابع تحلیلی $w=f(z)$ که ناحیهٔ $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi/4$ را برروی قرص یکهٔ $|w| \leqslant 1$ می‌نگارد.

۵.۱۳ نگاشت باسایر توابع مقدماتی

اکنون خواص نگاشتی چند تابع خاص مهم دیگر را بررسی می‌کنیم.

تابع نمایی (بخش ۷.۱۲)

$$w = e^z \qquad (1)$$

نگاشتی را تعریف می‌کند که همه‌جا همدیسی است، زیرا مشتق آن درهمهٔ نقاط مخالف

صفر است. هرگاه قرار دهیم $w=Re^{i\phi}$، آنگاه

$$Re^{i\phi}=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}$$

و (۱) را می‌توان به صورت

$$R=e^{x}, \quad \phi=y \qquad (۲)$$

نوشت. بنابراین مشاهده می‌کنیم که خطوط ثابت $x=a$ برروی دوایر $R=e^{a}$، و خطوط $y=c$ برروی شعاعهای $\phi=c$ نگاشته می‌شوند. چون، به‌ازای هر z، $e^{z}\neq ۰$، نقطهٔ $w=۰$ نقش هیچ‌نقطهٔ z ی نیست. یك ناحیهٔ مستطیلی، مثلا ناحیهٔ $a\leqslant x\leqslant b$، $c\leqslant y\leqslant d$ برروی ناحیهٔ

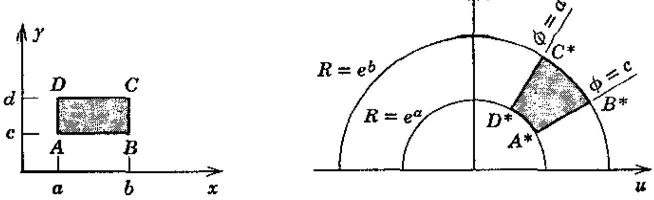
$$e^{a}\leqslant R\leqslant e^{b}, \quad c\leqslant \phi\leqslant d$$

که با قسمتهایی از شعاعها و دوایر محصور شده است، نگاشته می‌شود (شکل ۲۸۷).

نوار بنیادی $-\pi<y\leqslant\pi$ برروی تمامی صفحهٔ w (که درطول محور حقیقی منفیِ بریده شده است) نگاشته می‌شود. به طور کلی، هر نوار افقی که بین خطوط $y=c$ و $y=c+۲\pi$ محصور شده است برروی تمامی صفحهٔ w نگاشته می‌شود. این موضوع بیانگر این واقعیت است که e^{z} دوره‌ای است و دورهٔ آن $۲\pi i$ است.

همان طور که از (۲) نتیجه می‌شود، نوار افقی $۰\leqslant y\leqslant\pi$ برروی نیمهٔ فوقانی صفحهٔ w نگاشته می‌شود. مرز $y=۰$ برروی نیمهٔ مثبت محور u وخط $y=\pi$ برروی نیمهٔ منفی محور u نگاشته می‌شود. پاره خطی که ۰ را به πi وصل می‌کند برروی نیمدایرهٔ $|w|=۱$، $v\geqslant ۰$ نگاشته می‌شود. نیمهٔ چپ $(x\leqslant ۰)$ نوار بر روی ناحیهٔ $|w|\leqslant ۱$، $v\geqslant ۰$، و نیمهٔ راست $(x\geqslant ۰)$ آن برروی خارج نیمدایرهٔ $|w|=۱$ که درنیمهٔ فوقانی صفحهٔ w قرار دارد نگاشته می‌شود (شکل ۲۸۸).

چون **لگاریتم طبیعی** $w=u+iv=\ln z$ رابطهٔ معکوس تابع نمایی است، خواص نگاشت همدیسی متناظر با آن را به‌سادگی می‌توان ازخواص تابع نمایی به‌دست آورد، منتهی باید جای صفحه‌های z و w را درتمام عبارتهای بالا باهم عوض کرد. مقداراصلی $w=\text{Ln}\, z$ صفحهٔ z راکه درطول قسمت منفی محورحقیقی بریده شده است) برروی‌نوار $-\pi<v\leqslant\pi$ ازصفحهٔ w می‌نگارد. جزئیات بیشتری ازاین نگاشت درمثال۲ ازبخش



شکل ۲۸۷. نگاشت با $w=e^{z}$

بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

تابع سینوسی (بخش ۸.۱۲)

$$w=u+iv=\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y \qquad (۳)$$

که در آن

$$u=\sin x\cosh y,\quad v=\cos x\sinh y, \qquad (۴)$$

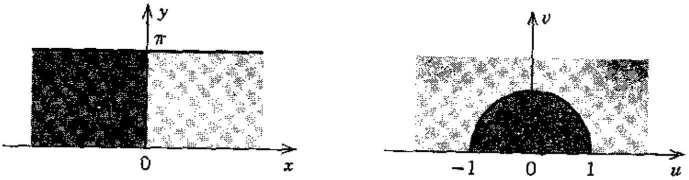
دوره‌ای است. از این‌رو، هرگاه این تابع را در تمامی صفحهٔ xy بررسی کنیم مطمئناً یك به‌یك نخواهد شد. z را به‌نوار نامتناهی، که با $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$ تعریف می‌شود، محدود می‌کنیم. نظر به‌اینکه $f'(z)=\cos z$ در $z=\pm\pi/2$ صفر است، نگاشت در این دو نقطه همدیسی نیست. از (۴) نتیجه می‌شود که مرز S درمحور u نگاشته می‌شود قطعهٔ $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$ از محور x بر روی قطعهٔ $-1\leqslant u\leqslant 1$ از محور u نگاشته می‌شود، خط $x=-\pi/2$ بر روی $u\leqslant -1$، $v=0$، وخط $x=\pi/2$ بر روی $u\geqslant 1$، $v=0$ نگاشته می‌شود. پاره خط $y=c>0$، $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$ بر روی قسمتی از بیضی

$$u=\cosh c\sin x,\quad v=\sinh c\cos x$$

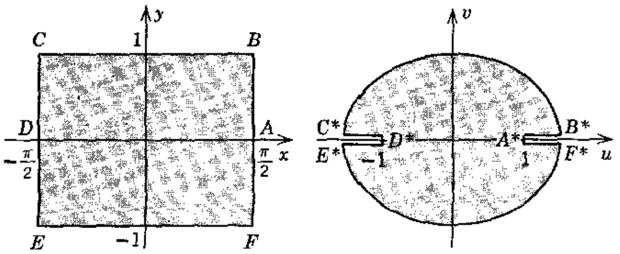
یا

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c}+\frac{v^2}{\sinh^2 c}=1 \qquad (۵)$$

که در نیمهٔ فوقانی صفحهٔ w قرار دارد نگاشته می‌شود. پاره خط $y=-c$،



شکل ۲۸۸. نگاشت با $w=e^z$



شکل ۲۸۹. نگاشت با $w=\sin z$

$-\pi/۲ \leqslant x \leqslant \pi/۲$ ‏($c>۰$) بر روی نیمهٔ تحتانی بیضی(۵) نگاشته می‌شود. کانونهای بیضی در $w=\pm ۱$ هستند، وچنانچه مشاهده می‌کنیم مستقل از c هستند. درنتیجه، هر گاه c را تغییر دهیم، دسته‌ای از بیضیهای هم‌کانون به دست می‌آوریم. بنابراین ناحیهٔ مستطیلی تعریف شده با $-\pi/۲<x<\pi/۲$، $-c<y<c$ بر روی داخل بیضی (۵) نگاشته می‌شود؛ اما توجه‌کنید که نقش مرز، همان طورکه درشکل ۲۸۹ (که درآن $c=۱$) نشان داده شده است عبارت است از بیضی و دوقطعه ازمحور u، نقش نقاط واقع برقسمتهای قائم مرز دو به‌دو برهم منطبقند. خصوصاً، $B^*=F^*$ و $C^*=E^*$.

مستطیل $-\pi<x<\pi$، $c<y<d$ ‏($c>۰$) برروی حلقه‌ای بیضوی که‌در طول محور v ی منفی بریده شده است نگاشته می‌شود (شکل ۲۹۰). خطهای راست $-\pi/۲<x<\pi/۲$، $x=$ ثابت بر روی هذلولیهای هم‌کانونی که آنها راتحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند نگاشته می‌شوند، و محور y برروی محور v نگاشته می‌شود.

تابع کسینوسی

$$w=\cos z=\sin\left(z+\frac{\pi}{۲}\right) \qquad (۶)$$

همان نگاشت مربوط به $\sin z$ راکه به‌اندازهٔ $\pi/۲$ واحد به راست انتقال یافته است تعریف می‌کند.

تابع هذلولی‌گون

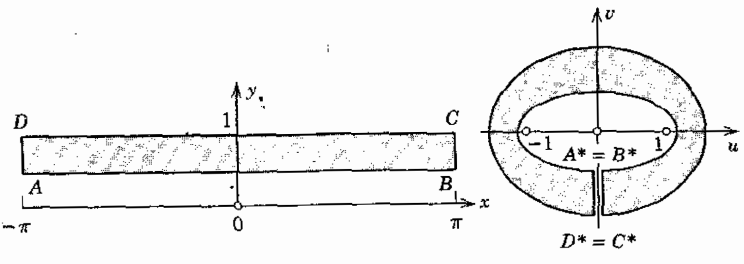
$$w=\sinh z=-i\sin(iz) \qquad (۷)$$

تبدیلی را تعریف می‌کند که عبارت است از دوران $t=iz$ ونگاشت $p=\sin t$ وبه‌دنبال آن دوران $w=-ip$.

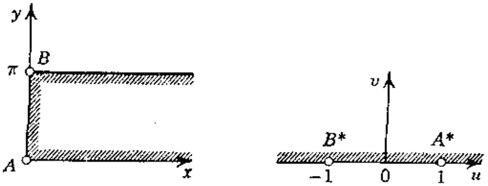
به همین نحو، تبدیل

$$w=\cosh z=\cos(iz) \qquad (۸)$$

عبارت است از دوران $t=iz$ به‌اضافهٔ نگاشت $w=\cos t$.



شکل ۲۹۰. نگاشت با $w=\sin z$



شکل ۲۹۱. نگاشت مربوط به مثال ۱

مثال ۱. نگاشت نوار از یک‌طرف نامتناهی برروی نیم‌صفحه

مطلوب است نقش نوار از یک طرف نامتناهی $x \geqslant \circ$ ، $\circ \leqslant y \leqslant \pi$ (شکل ۲۹۱) تحت نگاشت ۸. قرار می‌دهیم $w=u+iv$. چون $\cosh \circ = ۱$ ، نقطهٔ $z=\circ$ برروی $w=۱$ نگاشته می‌شود. به‌ازای عدد حقیقی $z=x \geqslant \circ$ ، $\cosh z$ حقیقی است و با افزایش x، به‌طور یکنوا از ۱ صعود می‌کند. از این‌رو محور x مثبت برروی‌قسمت $u \geqslant ۱$ ازمحور u نگاشته‌می‌شود. به‌ازای مقدار موهومی محض $z=iy$ داریم $\cosh iy = \cos y$. نتیجه می‌شود که مرز چپ نوار برروی قطعهٔ $-۱ \leqslant u \leqslant ۱$ ازمحور u نگاشته می‌شود، ضمن‌آنکه نقطهٔ $z=\pi i$ متناظر است با

$$w=\cosh i\pi = \cos \pi = -۱$$

روی مرز فوقانی نوار، $y=\pi$، ونظر به اینکه $\sin \pi = \circ$ ، $\cos \pi = -۱$، نتیجه می‌شود که این‌قسمت مرز برروی قسمت $u \leqslant -۱$ ازمحور u نگاشته می‌شود. ازاین‌رو مرز نوار برروی محور u نگاشته می‌شود. بررسی این‌موضوع که داخل نوار برروی‌نیمهٔ فوقانی صفحهٔ w نگاشته می‌شود و نگاشت یک‌به‌یک است مشکل نیست.

مثال ۲. یک مسئلهٔ مقدار مرزی

مطلوب است دمای $T(x, y)$ درنواری که درمثال ۱ بررسی شد، هرگاه دما در روی‌مرز برابر باشد با

روی پاره خطی که به $\circ$ و πi محدود می‌شود $T=T_\circ$

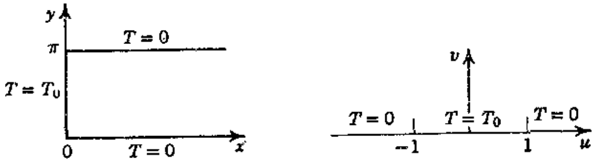
روی مرزهای فوقانی و تحتانی $T=\circ$

چون T بستگی به‌زمان ندارد («توزیع دمای حالت مانا»)، معادلهٔ گرما به‌معادلهٔ لاپلاس (ر. ك. بخش ۱۱.۱۱) تبدیل می‌شود:

$$\nabla^۲ T = \frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ T}{\partial y^۲} = \circ .$$

وما باید جوابی ازاین معادله راکه درشرایط مرزی مزبور صدق می‌کند بیابیم.

برای حل این مسئله نوار را به‌وسیلهٔ (۸) برروی نیمهٔ فوقانی صفحهٔ w می‌نگاریم.



شکل ۲۹۲. شرایط مرزی مثال ۲

چون قطعهٔ $\pi \geqslant y \geqslant ۰$ ازمحور y برروی قطعهٔ $۱ \geqslant u \geqslant ۱-$ از محور u نگاشته می‌شود، شرایط مرزی درصفحهٔ w عبارتند از (شکل ۲۹۲)

روی پاره خطی که به ۱ — و ۱ محدود می‌شود $T = T_۰$

درسایر قسمتهای محور u $\qquad T = ۰$

قسمتهای حقیقی وموهومی توابع تحلیلی جوابهای معادلهٔ لاپلاس هستند، و ما باید برای این معادله جوابی‌مانند $T(u, v)$ درنیمهٔ فوقانی صفحهٔ w بیابیم که درشرایط مرزی‌صدق کند. بدین جهت توابع

$$\text{Ln}\,(w+۱) = \ln|w+۱| + i\phi_۱, \quad \phi_۱ = \arg(w+۱) = \arc\tan\frac{v}{u+۱}$$

(۹*)

$$\text{Ln}\,(w-۱) = \ln|w-۱| + i\phi_۲, \quad \phi_۲ = \arg(w-۱) = \arc\tan\frac{v}{u-۱}$$

را درنظر می گیریم. نظر به‌اینکه $\phi_۱(u, v)$ و $\phi_۲(u, v)$ توابع همساز هستند، $\phi_۲-\phi_۱$ همسازاست. هرگاه $w = u$ حقیقی‌وکوچکتراز ۱ — باشد، آنگاه $\phi_۲-\phi_۱ = \pi-\pi = ۰$؛ به‌ازای مقدار حقیقی $w = u$ درفاصلهٔ $۱ < u < ۱-$ داریم $\phi_۲-\phi_۱ = \pi-۰ = \pi$، و به‌ازای مقدارحقیقی $w = u > ۱$، داریم $\phi_۲-\phi_۱ = ۰-۰ = ۰$. ازاین رو تابع

$$T(u, v) = \frac{T_۰}{\pi}\,(\phi_۲-\phi_۱) \tag{۹}$$

درنیم صفحهٔ $v > ۰$ همسازاست و درصفحهٔ w درشرایط مرزی صدق می کند ازآنجا که $\tan\phi_۱ = v/(u+۱)$ و $\tan\phi_۲ = v/(u-۱)$، نتیجه می‌شود

$$\tan(\phi_۲-\phi_۱) = \frac{\tan\phi_۲-\tan\phi_۱}{۱+\tan\phi_۱\tan\phi_۲} = \frac{۲v}{u^۲+v^۲-۱}$$

و (۹) به صورت

$$T(u, v) = \frac{T_۰}{\pi}\arc\tan\frac{۲v}{u^۲+v^۲-۱} \tag{۱۰}$$

درمی‌آید.

تابع $w=\cosh z$ نوار مورد نظر را بر روی نیم صفحهٔ $v \geqslant 0$ می‌نگارد و داریم

$$w=u+iv=\cosh(x+iy)=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$$

با جدا کردن قسمتهای حقیقی وموهومی در دوطرف تساوی فوق می‌توان نوشت

$$u=\cosh x\cos y,\quad v=\sinh x\sin y.$$

به‌ازای این مقادیر برای u و v نتیجه می‌شود که در (۱۰)،

$$u^2+v^2-1=\cosh^2 x\cos^2 y+\sinh^2 x\sin^2 y-1=\sinh^2 x-\sin^2 y.$$

اگر مقدار $1-u^2+v^2$ و v را در (۱۰) قرار دهیم و $T(u(x, y), v(x, y))$ را با $T^*(x, y)$ نمایش دهیم خواهیم داشت

$$T^*(x, y)=\frac{T_0}{\pi}\arctan\frac{2\sinh x\sin y}{\sinh^2 x-\sin^2 y}$$

با توجه به اینکه صورت ومخرج کسر به‌ترتیب قسمت موهومی و قسمت حقیقی تابع $(\sinh x+i\sin y)^2$ هستند، می‌توان نوشت

$$T^*(x, y)=\frac{T_0}{\pi}\arg[(\sinh x+i\sin y)^2]$$

$$=\frac{2T_0}{\pi}\arg(\sinh x+i\sin y).$$

درنتیجه جواب مسئلهٔ ما عبارت است از

$$(11)\qquad T^*(x, y)=\frac{2T_0}{\pi}\arctan\frac{\sin y}{\sinh x}.$$

این تابع‌در داخل نوار همساز است (ر.ك. قضیهٔ ۲ بخش۲.۱۳) و درشرایط مرزی صدق می‌کند. در واقع، وقتی که $y=0$ یا $y=\pi$، $T^*=0$، و وقتی که $x=0$، $T^*=T_0$. همدماها (= منحنیهای دمای ثابت) عبارتند از

$$\frac{\sin y}{\sinh x}=\text{ثابت}$$

درمثال ۲ پتانسیل‌حقیقی $T(u, v)$ راباستفاده‌ازتابع $w=u(x, y)+iv(x, y)$، که نیم صفحه را برروی ناحیهٔ مفروض می‌نگارد، به پتانسیل حقیقی $T^*(x, y)$ تبدیل

کردیم. درموارد زیادی این نوع مسائل را می‌توان با استفاده از پتانسیل مختلط ساده‌تر کرد، برای این کار یك تابع تحلیلی مختلط $F(w)$، در نظر می گیریم به‌طوری که پتانسیل حقیقی $T(u, v)$ قسمت حقیقی یا موهومی آن باشد، و به‌جای F، T را تبدیل می کنیم. واضح است که چنین پتانسیل مختلط F ی را می‌توان به سادگی از T، با تعیین تابع همساز مزدوج T (ر. ك. به آخر بخش ۵.۱۲)، بــه دست آورد. حالا به تشریح «روش پتانسیل مختلط» درمورد مثال قبل می‌پردازیم. بحث درجزئیات پتانسیل مختلط بعداًخواهد آمد (فصل ۱۸)

مثال ۳. پتانسیل مختلط

باتوجه به (*۹) مشاهده می کنیم پتانسیل حقیقی

$$T(u, v) = \frac{T_0}{\pi}(\phi_2 - \phi_1),$$

که درمثال ۲ [ر. ك. (۹)] ذکرشد، قسمت موهومی پتانسیل مختلط

$$(۱۲) \qquad F(w) = \frac{T_0}{\pi}[\operatorname{Ln}(w-1) - \operatorname{Ln}(w+1)] = \frac{T_0}{\pi}\operatorname{Ln}\frac{w-1}{w+1}$$

است. تابع نگاشت درمثال ۲ عبارت است از

$$w = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

باتوجه به‌این مشاهده می‌کنیم که در (۱۲)

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{\cosh z - 1}{\cosh z + 1} = \frac{e^z + e^{-z} - 2}{e^z + e^{-z} + 2} = \frac{(e^{z/2} - e^{-z/2})^2}{(e^{z/2} + e^{-z/2})^2} = \tanh^2\frac{z}{2}$$

اگر این مقدار را در (۱۲) بگذاریم و $F(w(z))$ را با $F^*(z)$ و $\tanh(z/2)$ را با H نشان دهیم، خواهیم داشت

$$(۱۳) \qquad F^*(z) = \frac{T_0}{\pi}\operatorname{Ln}\tanh^2\frac{z}{2} = \frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Ln}\tanh\frac{z}{2} = \frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Ln} H.$$

بنابه (۲) ازبخش ۹.۱۲ این تساوی را می‌توان چنین نوشت:

$$(۱۴) \qquad F^*(z) = \frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Ln} H = \frac{2T_0}{\pi}\left(\ln|H| + i\arctan\frac{\operatorname{Im} H}{\operatorname{Re} H}\right)$$

$F^*(z)$ پتانسیل مختلط درنوار مربوط به‌مثال ۲ است، وقسمت موهومی آن جواب مسئلهٔ مورد نظراست. بااستفاده ازتعریف H برحسب توابع نمایی نتیجه می گیریم

$$(۱۵) \qquad H = \frac{\sinh x + i\sin y}{\cosh x + \cos y}.$$

از اینجا و (۱۴) داریم

$$T^*(x,\ y)=\operatorname{Im}F^*(z)=\frac{2T_0}{\pi}\arctan\frac{\sin y}{\sinh x},$$

که با نتیجهٔ مثال ۲ مطابقت می‌کند.

به علاوه، از (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$|H|^2=\frac{\sinh^2 x+\sin^2 y}{(\cosh x+\cos y)^2}$$

و با توجه به (۱۴) مشاهده می‌کنیم که قسمت حقیقی $F^*(z)$ چنین می‌شود:

$$S^*(x,\ y)=\operatorname{Re}F^*(z)=\frac{T_0}{\pi}\ln\frac{\sinh^2 x+\sin^2 y}{(\cosh x+\cos y)^2}$$

منحنیهای ثابت $=S^*$ همدماهای ثابت $=T^*$ را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند و بنابراین منحنیهایی هستند که گرما در امتداد آنها جریان پیدا می‌کند. امتیاز بزرگ پتانسیل مختلط آن است که این پتانسیل هر دو خانوادهٔ منحنیها را نتیجه می‌دهد.

مسائل بخش ۵۰۱۳

نقشهای نواحی زیر را تحت نگاشت $w=e^z$ بیابید و نمودار آنها را رسم کنید.

۱. $-1<x<1,\quad -\pi/2<y<\pi/2$

۲. $0<x<2,\quad 0<y<\pi$

۳. $0<x<1,\quad 0<y<1$

۴. $-3<x<-2,\quad 0<y<\pi/4$

۵. $-2\leqslant x\leqslant 2,\quad -\pi\leqslant y\leqslant -\pi/2$

۶. $-1\leqslant x\leqslant 3,\quad -\pi\leqslant y\leqslant \pi$

۷. مطلوب است تابع تحلیلی که ناحیهٔ محدود به محور x و محور y و هذلولی $xy=\pi/2$، واقع در ربع اول، را بر روی نیم‌صفحهٔ فوقانی می‌نگارد. راهنمایی. نخست ناحیهٔ مورد نظر را بر روی یک نوار افقی بنگارید.

نقشهای نواحی زیر را تحت نگاشت $w=\sin z$ بیابید و نمودارشان را رسم کنید.

۸. $0<x<\pi/2,\quad 0<y<2$

۹. $-\pi/۲ < x < \pi/۲,\quad ۱ < y < ۲$

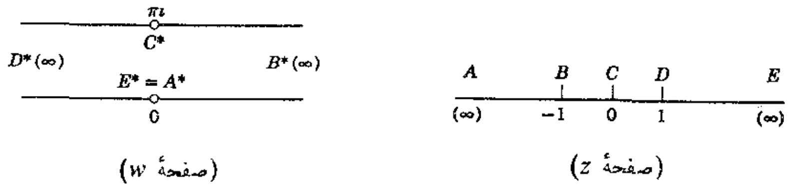
۱۰. $-\pi/۲ \leqslant x \leqslant \pi/۲,\quad ۰ < y \leqslant ۱$

۱۱. $۰ < x < ۲\pi,\quad ۱ < y < ۲$

۱۲. نقشهای خطوط $x = ۰,\ \pm\pi/۶,\ \pm\pi/۳,\ \pm\pi/۲$ را تحت نگاشت $w = \sin z$ بیابید و آنها را رسم کنید.

۱۳. تبدیل $w = \cosh z$ را برحسب $w = \sin z$ و دوران و انتقال بیان کنید.

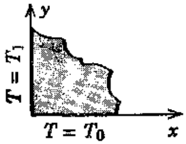
۱۴. نشان دهید که $w = \operatorname{Ln}\dfrac{z-۱}{z+۱}$ نیم صفحهٔ فوقانی را به‌ترتیبی که درشکل نشان داده شده است برروی نوار افقی $۰ \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant \pi$ می‌نگارد.



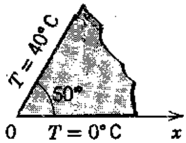
مسئلهٔ ۱۴

مطلوب است دمای $T(x, y)$ در ورقهٔ نازک فلزی مفروضی که رویه‌های آن عایق است ولبه‌های آن دارای دماهایی است که درشکل نشان داده شده است.

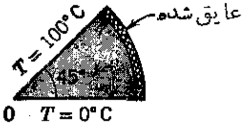
۱۵.



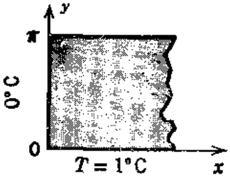
۱۶.



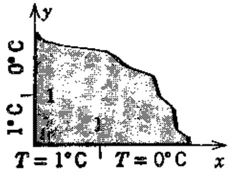
۱۷.



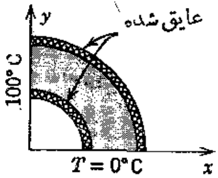
۱۸.



۱۹.



۲۰.



۶.۱۳ رویه‌های ریمان

نگاشتی راکه با

$$w = u + iv = z^۲ \tag{۱}$$

تعریف می‌شود درنظر می‌گیریم (ر.ك. بخش ۱.۱۳). این نگاشت، جز در $z=0$ که در آن $w'=2z$ صفر است، همدیسی است. در $z=0$ زوایا تحت این نگاشت دو برابر می‌شوند. نیمهٔ راست صفحهٔ z (که شامل قسمت مثبت محور y نیز هست) برروی تمامی صفحه w که درطول نیمهٔ منفی محور u بریده شده است نگاشته می‌شود؛ این نگاشت یك‌به‌یك است. به‌همین نحو، نیمهٔ چپ صفحهٔ z (که شامل قسمت منفی محور y است) به‌طور یك‌به‌یك بر روی صفحهٔ wیی که بریده شده است نگاشته می‌شود.

واضح است که این نگاشت در تمامی صفحهٔ z یك‌به‌یك نیست، زیرا هر نقطهٔ $w\neq 0$ درست با دو نقطه از z متناظر است. درواقع، هرگاه z_1 یکی از این نقاط باشد آنگاه نقطهٔ دیگر $-z_1$ است. مثلاً نقاط $z=i$ و $z=-i$ دارای یك نقش $w=-1$ هستند و به همین ترتیب، درنتیجه، صفحهٔ w توسط نقش صفحهٔ z «دوبار پوشانده» می‌شود. می‌گوییم که تمامی صفحهٔ z برروی صفحه w ی دولایه نگاشته می‌شود. لازم است تصوری را که ازاین نگاشت داریم با توضیح زیر تقویت کنیم.

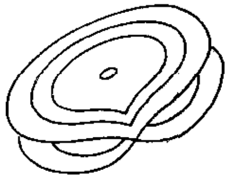
این‌طور تصور می‌کنیم که یك نمونه ازصفحهٔ wی بریده شده روی نمونهٔ دیگری از این صفحه قرار گیرد به طوری که ورقهٔ بالایی نقش نیمهٔ راست صفحهٔ z، و ورقهٔ زیرین نقش نیمهٔ چپ صفحهٔ z باشد؛ این نیم صفحه‌ها را به ترتیب با R و L نشان می‌دهیم. وقتی که از R به L می‌رویم، نقطهٔ نقش متناظر باید از ورقهٔ بالایی به ورقهٔ زیرین برود. بدین جهت دو ورقه را درطول قسمت بریده شده، یعنی، درطول محور حقیقی منفی، به‌طورضربدری به هم وصل می‌کنیم. این تنها یك تصور ذهنی است، زیرا عبور دو صفحهٔ مسادی از داخل هم هرگز به طورکامل امکان پذیر نیست. دومبدأ به‌هم چسبیده‌اند. شکلی که به این ترتیب به دست می‌آید **رویهٔ ریمان** نام دارد. روی این سطح هر نقطه $w\neq 0$ دوبار، برروی هم، ومبدأ فقط یك بارظاهر می‌شود. حالا تابع $w=z^2$ تمامی صفحهٔ z را به‌طور یك‌به‌یك برروی رویهٔ ریمان می‌نگارد، و این نگاشت جزدرمورد «نقطهٔ پیچشی» یا **نقطهٔ شاخه‌ای** در $w=0$ (شکل ۲۹۳) یك تغییرشکل است. هر نقطهٔ شاخه‌ای از این نوع که دو ورقه را به هم وصل می‌کند، نقطهٔ شاخه‌ای از مرتبهٔ اول نامیده می‌شود. (درحالت کلیتر، هر نقطهٔ شاخه‌ای که n ورقه را به‌هم وصل کند، نقطهٔ شاخه‌ای از مرتبهٔ $n-1$ نامیده می‌شود.)

حالا رابطهٔ دو مقداری

$$w=\sqrt{z} \tag{۲}$$

را درنظر می‌گیریم. به هر $z\neq 0$ دومقدار w نظیر می‌شود، که یکی از آنها مقدار اصلی است. هرگاه جای صفحهٔ z را با رویهٔ ریمان دوورقه‌ای، که هم‌اکنون بررسی شد، عوض کنیم آنگاه هر عدد مختلط $z\neq 0$ با دو نقطه از رویه، که برروی هم قرار دارند، نمایش داده می‌شود. فرض می‌کنیم یکی از این نقاط ــ مثلاً، نقطه‌ای که در ورقهٔ فوقانی واقع شده است ــ نظیر مقدار اصلی و نقطهٔ دوم نظیر مقدار دیگر باشد. دراین صورت (۲) یك مقداری می‌شود، یعنی (۲) تابعی ازنقاط رویهٔ ریمان است، و به هرحرکت پیوستهٔ z در رویه حرکتی پیوسته از نقطهٔ متناظر آن در صفحهٔ w نظیر می‌شود. تابع ورقهٔ متناظر با مقدار اصلی را برروی نیمهٔ

راست صفحهٔ w و ورقهٔ دیگررا برروی نیمهٔ چپ صفحهٔ w می‌نگارد .



شکل ۲۹۳. نمونه‌ای ازرویهٔ ریمان

حال چند مثال مهم دیگررا مورد بررسی قرار می‌دهیم .

مثال ۱. رویهٔ ریمان $\sqrt[n]{z}$

در مورد رابطهٔ

$$w=\sqrt[n]{z} \qquad n=۳,\ ۴,\ \cdots \qquad (۳)$$

نیاز به رویهٔ ریمانی با n ورقه داریم که دارای یك نقطهٔ شاخه‌ای ازمرتبهٔ $n-۱$ در $z=۰$ باشد. یکی از این ورقه‌ها نظیر مقدار اصلی است و $n-۱$ ورقهٔ دیگر با $n-۱$ مقدار دیگرمتناظرند.

مثال۲. رویهٔ ریمان لگاریتم طبیعی

به ازای هر $z\neq۰$ رابطهٔ

$$w=\ln z=\mathrm{Ln}\, z+۲n\pi i \qquad (n=۰,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \cdots,\ z\neq۰) \qquad (۴)$$

بینهایت مقداری است، درنتیجه (۴) یك تابع بررویهٔ ریمانی که مرکب ازتعدادی نامتناهی ورقه است تعریف می‌کند. تابع $w=\mathrm{Ln}\, z$ با یکی ازاین ورقه‌ها متناظراست. براین ورقه θ شناسهٔ z، درفاصله $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ تغییرمی‌کند (ر.ك. بخش۹.۱۲). ورقه درطول‌شعاع منفی محورحقیقی بریده شده‌است، ولبهٔ بالایی چاك به لبهٔ پایینی‌ورقهٔ دیگری، که نظیرفاصلهٔ $\pi\leqslant\theta\leqslant۳\pi$ یعنی‌نظیرتابع $w=\mathrm{Ln}\, z+۲\pi i$ است‌وصل‌شده‌است. به‌این‌ترتیب هرمقدار nی‌که در(۴) بگذاریم متناظر با تنهـا یکـی‌ازاین بینهایت ورقه می‌شود. تابع $w=\mathrm{Ln}\, z$ ورقهٔ مربوط به‌خود رابرروی نوار افقی $-\pi\leqslant v\leqslant\pi$ درصفحهٔ w می‌نگارد. ورقهٔ بعدی برروی نوارمجاوریعنی $\pi\leqslant v\leqslant۳\pi$ نگاشته می‌شود و همین طور الی‌آخر. بنابراین تابع $w=\ln z$ همهٔ ورقه‌های رویهٔ ریمان متناظر با خود را برروی تمامی صفحهٔ w می‌نگارد، تناظربین نقاط $z\neq۰$ ازرویهٔ ریمان و نقاط صفحهٔ w یك به یك است.

مثال ۳ . نگاشت $w=z+z^{-۱}$. هوابر

نگاشت

$$w=z+\frac{1}{z} \qquad (z\neq 0) \tag{۵}$$

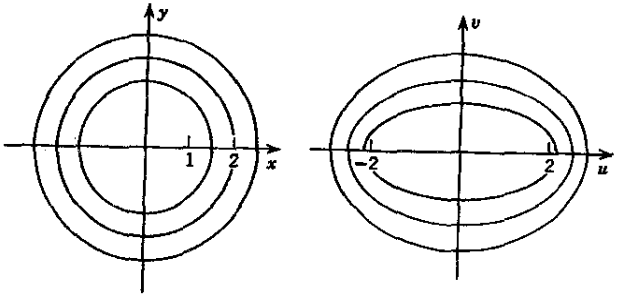
را که در آئرودینامیك است درنظرمی گیریم. نظربه اینکه

$$w'=1-\frac{1}{z^2}=\frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

این نگاشت جزدرنقاط $z=1$ و $z=-1$ همدیسی است؛ این نقاط به ترتیب با $w=2$ و $w=-2$ متناظرند. از (۵) نتیجه می گیریم

$$z=\frac{w}{2}\pm\sqrt{\frac{w^2}{4}-1}=\frac{w}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(w+2)(w-2)} \tag{۶}$$

پس، نقاط $w=2$ و $w=-2$ نقاط شاخه‌ای مرتبهٔ اول $z=z(w)$ هستند. به هر مقدار $(w\neq 2$ و $\neq -2)$ w دومقدار z نظیرمی‌شود. درنتیجه، (۵) صفحهٔ z را برروی یك رویهٔ ریمان دوورقه‌ای می نگارد، که این دو ورقه به‌طور ضربدری از $w=-2$ تا $w=2$ (شکل ۲۹۲) به‌هم‌مرتبط اند واین‌نگاشت،یك‌به‌یك است. بافرض $z=re^{i\theta}$ نقش منحنیهای ثابت $=r$ و ثابت $=\theta$ راتعیین می کنیم. از (۵) به دست می‌آوریم



شکل ۲۹۴. مثال ۳

$$w=u+iv=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

ازمساوی گرفتن قسمتهای حقیقی وموهومی طرفین معادلهٔ بالا داریم

$$u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta\,, \qquad v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \tag{۷}$$

از اینجا به دست می آوریم

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1 \quad \text{که در آن} \quad a=r+\frac{1}{r} \text{ ، } b=\left|r-\frac{1}{r}\right|$$

بنابراین دایره‌های ثابت $=r$ بر روی بیضیهایی نگاشته می‌شوند که محورهای اصلی آنها و برمحورهای u و v منطبق و طول آنها به ترتیب $2a$ و $2b$ باشد. چون $a^2-b^2=4$، مستقل از r است، این بیضیها هم کانون هستند و کانونهای آنها نقاط $w=-2$ و $w=2$ هستند. دایرهٔ یکهٔ $r=1$ برروی پاره خطی که به $w=-2$ و $w=2$ محدود است نگاشته می‌شود. به‌ازای هر $r\neq 1$ دو دایره‌ای که شعاعهایشان r و $1/r$ است بر روی یك بیضی در صفحهٔ w، که متناظر با دو ورقه از رویهٔ ریمان است، نگاشته می‌شوند. بنابراین داخل دایرهٔ یکه $|z|=1$ با یکی از این ورقه‌ها و خارج آن با ورقهٔ دیگر متناظر است.

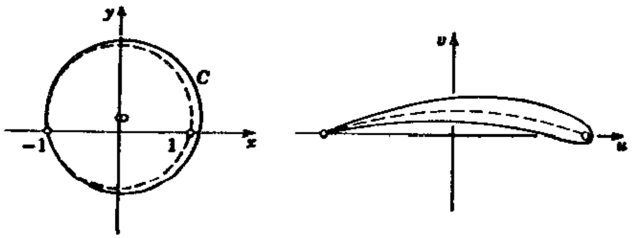
به علاوه، از (۷) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta}-\frac{v^2}{\sin^2\theta}=-4 . \qquad (۸)$$

بنابراین خطوط ثابت $=\theta$ بر روی هذلولیهایی که مسیرهای متعامد این بیضیها هستند نگاشته می‌شوند. محور حقیقی، یعنی شعاعهای $\theta=0$ و $\theta=\pi$، برروی قسمتی ازمحور حقیقی از $w=2$ از طریق ∞ تا $w=-2$ نگاشته می‌شود. محور y بر روی دو شاخهٔ همان هذلولی نگاشته می‌شود.

ناحیهٔ خارجی یکی از بیضیهای فوق عاری از نقطهٔ شاخه‌ای است و با داخل یا خارج دایرهٔ نظیر درصفحهٔ z، بسته به ورقه‌ای از رویهٔ ریمان که ناحیه به آن تعلق دارد متناظر است. به ویژه تمامی صفحهٔ w همان طور که قبلاً متذکر شدیم با داخل یا خارج دایرهٔ یکهٔ $|z|=1$ متناظر است.

نگاشت (۵) دوایر مناسب را به هوابرهایی می‌برد که لبهٔ عقبی تیز دارند و زاویهٔ داخلی آنها صفر است و به **هوابرهای ژوکوفسکی**[1] معروفند. نظر به اینکه هوابر دارای لبهٔ تیزی



شکل ۲۹۵. هوا بر ژوکوفسکی

۱. نیکلایی گورویچ ژوکوفسکی (Nikolai Jegorovich Joukowski) ۱۸۴۷-۱۹۲۱، ریاضیدان روس.

است،واضح است دایره‌ای که نگاشته می‌شود باید ازیکی از دونقطهٔ $z=\pm 1$ که نگاشت درآنها همدیسی‌است بگذرد. دایرهٔ C را طوری انتخاب می‌کنیم که از $z=-1$ بگذردو $z=1$ درون آن باشد. ساده‌ترین راه تعیین نقش این دایره آن است که‌بردارهای متناظر با z و $1/z$ را به روش ترسیمی جمع کنیم (همان طورکه در بخش ۱.۱۳ نشان داده شد می‌توان $1/z$ را از z به‌دست آورد) . نتیجه در شکل ۲۹۵ آورده شده است. تفصیل این مطلب درمرجع [F۹] ضمیمهٔ ۱ آمده است.

بررسی دقیقتر رویه‌های ریمانی درمرجع [F۱۰] آمده است.

مسائل بخش ۶.۱۳

۱. $w=\sqrt{z}$ را نظر می‌گیریم. مسیر w ، نقش نقطهٔ z ، راکه از وضع اولیهٔ $z=1$ شروع کرده دوبار روی دایرهٔ‌یکه دور می‌زند پیدا کنید.

۲. نشان دهیدکه رویهٔ ریمان $w=\sqrt[3]{z}$ مرکب ازسه ورقه است و درنقطهٔ $z=0$ دارای نقطهٔ شاخــه‌ای مرتبهٔ دوم است. مسیر w ، نقش نقطهٔ z راکه از وضع اولیهٔ $z=1$ شروع کرده سه بار روی دایرهٔ‌یکه دور می‌زند بیابید.

۳. رویه‌های ریمان $w=\sqrt[4]{z}$ و $w=\sqrt[5]{z}$ را به‌طریقی مشابه با مسئلهٔ ۲ بررسی کنید.

۴. نموداری مانند شکل ۲۹۳ از رویه‌های $\sqrt[3]{z}$ و $\sqrt[4]{z}$ رسم کنید.

۵. مطلوب است نقش طوقهای $1<|z|<1/2$ ، $1<|z|<2$ ، و $2<|z|<3$ تحت نگاشت $w=z+1/z$.

۶. مطلوب است مسیرنقش نقطهٔ z تحت نگاشت $w=\ln z$ وقتی‌که z چندین بار روی دایرهٔ یکه دور می‌زند.

۷. نشان دهیدکه رویهٔ ریمان $w=\sqrt{(z-1)(z-4)}$ در $z=1$ و $z=4$ دارای نقاط شاخه‌ای است و مرکب است از دو ورقه‌که می‌توان آنها را در طــول قطعه خطی‌که از ۱ تا ۴ ادامه دارد برید و به طور ضربدری به هم وصل کرد. راهنمایی . مختصات قطبی $z-1=r_1e^{i\theta_1}$ و $z-4=r_2e^{i\theta_2}$ را به‌کار برید.

۸. نشان دهیدکه رویهٔ ریمان $w=\sqrt{(1-z^2)(4-z^2)}$ دارای چهارنقطهٔ شاخه‌ای‌است و دو ورقه داردکه می‌توان‌آنها رادرطول قطعات $-2\leqslant x\leqslant -1$ و $1\leqslant x\leqslant 2$ از محور x به‌طور ضربدری به‌هم وصل کرد.

مکان نقاط شاخه‌ای و تعداد ورقه‌های رویه‌های ریمان توابع زیر را بیابید.

۹. $w=i\sqrt{z}$ ۱۰. $w=\sqrt{z-i}$ ۱۱. $w=\sqrt[3]{z-i}$

۱۲. $\sqrt[3]{2z+3i}$ ۱۳. $\sqrt{z^2+1}$ ۱۴. $\sqrt{z(z-1)(z+1)}$

۱۵. $a\neq b$ ،$\sqrt{(z-a)(z-b)}$ ۱۶. $1+z+\sqrt{z}$ ۱۷. $\ln(z-a)$

۱۸. $e^{\sqrt{z}}$ ۱۹. $\sqrt{e^z}$ ۲۰. $\sqrt{\sqrt[3]{z}-1}$

۱۴

انتگرال مختلط

اهمیت انتگـرال درصفحهٔ مختلط دو دلیل دارد. دلیل عملی این است کـه در کاربـردها انتگرالهای حقیقی پیش می‌آیند که با انتگرالگیری مختلط قابل محاسبه‌اند، درحالی که با روشهای معمول حساب انتگرال حقیقی *نمی‌توان* آنها را محاسبه کرد. دلیل دیگر ماهیت نظری دارد و از این واقعیت ناشی می‌شود که روش انتگرالگیری مختلط اثبات برخی از خواص اساسی توابع مختلط (خصوصاً وجود مشتقات بالاتر) را میسر می‌کند، درصورتی که اثبات این خواص بدون استفاده از انتگرال خیلی مشکل است. این موضوع نشان دهندهٔ اختلافی اساسی بین حساب دیفرانسیل و انتگرال مختلط و حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی است.

دراین فصل نخست انتگـرال مختلط را تعریف می‌کنیم، اساسیترین نتیجه‌ای کـه می‌گیریـم قضیهٔ انتگرال کشی (بخش ۳.۱۴) است کـه فرمول مهم انتگرال کشی (بخش ۵.۱۴) از آن حاصل می‌شود. در بخش ۶.۱۴ ثابت می‌کنیم که اگر تابعی تحلیلی باشد، از هرمرتبه‌ای مشتق دارد. این بدان معنی است که رفتار توابع تحلیلی بسیار ساده‌تر از رفتار توابع حقیقی با متغیرحقیقی است.

(انتگرالگیری به‌وسیلهٔ مانده وکاربرد آن برای انتگرالهای حقیقی درفصل ۱۷مورد بررسی قرار می‌گیرد.)

پیشنیاز این فصل: فصل ۱۲

مراجع: ضمیمهٔ ۱، بخش F

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲

۱۰۱۴ انتگرال روی خط درصفحهٔ مختلط

مانند حساب دیفرانسیل وانتگرال حقیقی، بین انتگرالهای معین وانتگرالهای نامعین یاتوابع اولیه فرق می گذاریم. یك **انتگرال نامعین** تابعی است که مشتق آن دریك ناحیه با تابع تحلیلی مفروضی برابراست. بامعکوس کردن فرمولهای معلوم مشتقگیری می‌توان بسیاری‌از انواع انتگرالهای نامعین را یافت.

اکنون انتگرال معین، یا انتگرال روی خط، تابع مختلط $f(z)$ را، که در آن $z=x+iy$، تعریف می کنیم. خواهیم دید که این‌تعریف تعمیمی طبیعی از تعریف آشنای انتگرال معین حقیقی است و مباحث مربوط به‌آن شبیه مباحثی است که دربخش ۱.۹ آمده است. در مورد انتگـرال معین مسیر انتگرالگیری بازه‌ای از محور حقیقی است. درمورد انتگرال معین مختلط، درطول یك منحنی[1] واقع درصفحهٔ مختلط انتگرال می گیریم.

فرض می کنیم C منحنی همواری (ر.ك. بخش ۲.۱۳) درصفحهٔ z مختلط باشد. در این صورت می‌توان C را به صورت

$$z(t)=x(t)+iy(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b) \tag{۱}$$

نمایش داد، که درآن $z(t)$ به‌ازای هر t دارای مشتق‌پیوستهٔ $\dot{z}(t)\neq 0$ است، به‌طوری که C با درازایی متناهی (ر.ك. بخش ۴.۸) ودارای مماسی یکتا در هرنقطه باشد. یـادآور می‌شویم که جهت مثبت برروی C باجهت افزایش مقادیر پارامتر t مطابقت می کند.

فرض می کنیم $f(z)$ تابعی‌پیوسته باشد که (اقلاً) درتمام نقاط C تعریف شده‌باشد. فاصلهٔ $a\leqslant t\leqslant b$ راکه در (۱) معرفی شد توسط نقاط

$$t_0(=a),\ t_1,\ \cdots,\ t_{n-1},\ t_n(=b),$$

که درآن $t_0<t_1<\dots<t_n$ تقسیم جزئی («افراز») می کنیم. این کار سبب می‌شود که C نیز توسط نقاط (شکل ۲۹۶)

$$z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{n-1},\ z_n(=z),$$

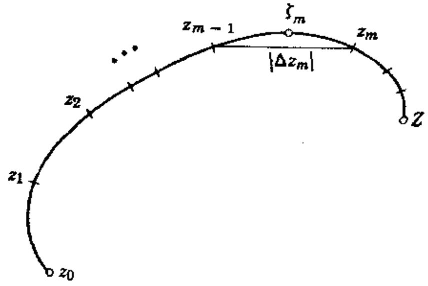
که درآن $z_j=z(t_j)$ افراز شود. درهرقسمت ازتقسیم جزئی C نقطهٔ دلخواهی، مثل نقطهٔ ζ_1 که بین z_0 و z_1 واقع است (یعنی $\zeta_1=z(t)$ کـه درآن $t_0\leqslant t\leqslant t_1$)، نقطهٔ ζ_2 که بین z_1 و z_2 قرار دارد وبه همین ترتیب، انتخاب می کنیم. سپس مجموع

$$S_n=\sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)\,\Delta z_m \tag{۲}$$

که درآن

$$\Delta z_m=z-z_{m-1}.$$

۱ـ عملا درطول یك قسمت، یا قوس، ازیك منحنی. به‌خاطر سادگی کلمهٔ «منحنی» را هم برای کل منحنی وهم برای قسمتی ازآن مورد استفاده قرار خواهیم داد.



شکل ۲۹۶. انتگرال روی خط مختلط

تشکیل می‌دهیم. این‌کار را به‌ازای هر $n=2,\ 3,\ \ldots$ به طور کاملاً مستقل انجام‌می‌دهیم اما طوری این کار را می‌کنیم که بزرگترین $|\Delta z_m|$ وقتی n به سمت بینهایت میل‌می‌کند به‌سمت صفرمیل کند. بدین طریق دنباله‌ای ازاعداد مختلط S_2 ، S_3 ، ... به‌دست‌می‌آید. حد این دنباله را **انتگرال روی خط** (یا به‌طورساده انتگرال) $f(z)$ درطول منحنی جهت‌دار C می‌نامند و با

$$\int_C f(z)\,dz \tag{۳}$$

نشان می‌دهند. منحنی C را **مسیرانتگرالگیری** می گویند.

در سراسر مباحث زیر فرض می‌کنیم که همهٔ مسیرهای انتگرالگیری انتگرال روی خط مختلط **هموار تکه‌ای** باشند، یعنی مرکب از تعدادی متناهی منحنی هموار باشند.

وجود انتگرال روی خط (۳) از فرضهایی که‌کردیم نتیجه می‌شود. درواقع، فرض می‌کنیم $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ وقرارمی‌دهیم

$$\Delta z_m=\Delta x_m+i\Delta y_m,\quad \zeta_m=\xi_m+i\eta_m.$$

درآن صورت (۲) را می‌توان به صورت

$$S_n=\sum(u+iv)(\Delta x_m+i\,\Delta y_m). \tag{۴}$$

نوشت ،که در آن $u=u(\xi_m,\ \eta_m)$ ، $v=v(\xi_m,\ \eta_m)$ و جمع نسبت‌به m از ۱ تا n انجام می‌پذیرد. حال S_n را به صورت چهارمجموع می نویسیم:

$$S_n=\sum u\Delta x_m-\sum v\Delta y_m+i[\sum u\Delta y_m+\sum v\Delta x_m].$$

این مجموعها حقیقی هستند. نظر به‌اینکه f پیوسته است، u و v پیوسته‌انـد. در نتیجه ، هر گاه n به‌طریقی که گفته شد به‌سمت بینهایت میل کند،آنگاه بزرگترین Δx_m ، Δy_m به سمت صفرمیل می کنند وهریك ازچهار مجموع فوق یك انتگرال روی خط حقیقی خواهد شد :

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_C f(z)\,dz=\int_C u\,dx-\int_C v\,dy+i\left[\int_C u\,dy+\int_C v\,dx\right].$$
(۵)

این نشان می‌دهد که انتگرال روی خط (۳) وجود دارد ومقدار آن مستقل از انتخاب تقسیم جزئی ونقاط بخش‌کنندهٔ ξ_m است.

به علاوه، مانند بخش ۲.۹، هریك از انتگرالهای روی خط حقیقی را می‌توان با استفاده ازنمایش (۱) منحنی C به‌انتگرال معین تبدیل کرد:

$$(۶)\quad \int_C f(z)\,dz=\int_a^b u\dot{x}\,dt-\int_a^b u\dot{y}\,dt+i\left[\int_a^b u\dot{y}\,dt+\int_a^b v\dot{x}\,dt\right]$$

که درآن $u=u[x(t),\ y(t)]$ ، $v=v[x(t),\ y(t)]$ ونقطه‌ها مشتق نسبت به t رانشان می‌دهند.

بدون آنکه سوء تعبیرشود، می‌توانیم چنین نیز بنویسیم:

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b (u+iv)(\dot{x}+i\dot{y})\,dt$$

یا اجمالاً

$$(۶^*)\qquad \int_C f(z)\,dz=\int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)\,dt$$

حال برخی مثالهای اساسی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. انتگرال $1/z$ روی دایرهٔ یکه

با شروع از $z=۱$ از تابع $f(z)=۱/z$ روی دایرهٔ یکهٔ C بایك بارگردش روی آن درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید. هرگاه C را به صورت

$$(۷)\qquad z(t)=\cos t+i\sin t\qquad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi).$$

نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$\dot{z}(t)=-\sin t+i\cos t,$$

و باتوجه به (۶*) انتگرال مورد نظر چنین می‌شود:

$$\int_C \frac{dz}{z}=\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{\cos t+i\sin t}(-\sin t+i\cos t)\,dt=i\int_۰^{۲\pi} dt=۲\pi i,$$

و این قضیه‌ای اساسی است که درمباحث بعدی کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

واضح است که به‌جای (۷) فرمولهای ساده‌تر

$$z(t) = e^{it} \qquad (\circ \leqslant t \leqslant \text{۲}\pi) \qquad (\text{۷}')$$

را می‌توان نوشت. آنگاه بامشتقگیری به دست می‌آوریم

$$\dot{z}(t) = ie^{it}, \quad dz = ie^{it}\,dt,$$

واز اینجا همان نتیجهٔ قبل عاید می‌شود:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_\circ^{\text{۲}\pi} \frac{\text{۱}}{e^{it}}\, ie^{it}\,dt = i\int_\circ^{\text{۲}\pi} dt = \text{۲}\pi i \qquad (\text{۸})$$

مثال ۲. انتگرال یك تابع غیرتحلیلی

از $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ درطول پاره‌خطی که از $z_\circ = \circ$ تا $z = \text{۱} + i$ امتداد دارد(مسیر $C_\text{۱}$ درشکل ۲۹۷) انتگرال بگیرید.

این پاره خط را می‌توان به صورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (\text{۱}+i)t \qquad (\circ \leqslant t \leqslant \text{۱})$$

نمایش داد. پس

$$f[z(t)] = \operatorname{Re} z(t) = x(t) = t, \quad dz = (\text{۱}+i)\,dt.$$

بنابراین، نتیجهٔ

$$\int_{C_\text{۱}} \operatorname{Re} z\,dz = \int_\circ^\text{۱} t(\text{۱}+i)\,dt = (\text{۱}+i)\int_\circ^\text{۱} t\,dt = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{۱}+i)$$

به دست می‌آید.

اکنون از $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ درطول محورحقیقی از ۰ تا ۱، و سپس درطول خطی که به‌طور قائم از ۱ تا $\text{۱}+i$ کشیده شده است (مسیر $C_\text{۲}$ درشکل ۲۹۷) انتگرال می‌گیریم. اولین قسمت $C_\text{۲}$ را با

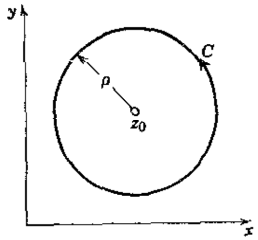
$$z = z(t) = t \qquad (\circ \leqslant t \leqslant \text{۱})$$

وآخرین قسمت‌آن را به‌صورت

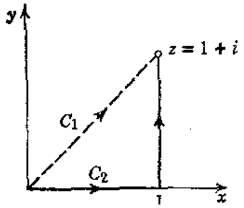
$$z(t) = \text{۱} + i(t - \text{۱}) \qquad (\text{۱} \leqslant t \leqslant \text{۲})$$

نمایش می‌دهیم. دراین صورت کل مسیر بافاصلهٔ $\circ \leqslant t \leqslant \text{۲}$ متناظراست. روی قسمت اول $\operatorname{Re} z = t$، $dz = dt$ و روی قسمت آخر، $\operatorname{Re} z = \text{۱}$، $dz = i\,dt$. بنابراین

$$\int_{C_\text{۲}} \operatorname{Re} z\,dz = \int_\circ^\text{۱} t\,dt + \int_\text{۱}^\text{۲} i\,dt = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + i.$$



شکل ۲۹۸. مسیرهای مثال ۳



شکل ۲۹۷. مسیرهای مثال ۲

توجه کنید که قسمت آخر $C_۲$ را می‌توان به صورت

$$z(t)=۱+it \qquad (۰\leqslant t\leqslant ۱)$$

نیز نمایش داد؛ دراین صورت حدود انتگرال آخر ۰ و ۱ هستند، ومقدار آن همان‌مقدار قبلی است.

بامقایسهٔ این دونتیجه مشاهده می‌کنیم درمورد تابع $\operatorname{Re} z$ (که تحلیلی‌نیست) مقدار انتگرال نه‌فقط به‌نقاط انتهایی مسیر، بلکه به شکل هندسی آن نیز وابسته است.

مثال ۳. انتگرال توانهای صحیح

فرض می‌کنیم $f(z)=(z-z_۰)^m$ که درآن m عددی صحیح و $z_۰$ ثابت است. از این تابع درطول دایرهٔ C که شعاع آن ρ و مرکزش $z_۰$ است (ر. ك. شکل ۲۹۸) درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال می‌گیریم.

C را می‌توان به صورت

$$z(t)=z_۰+\rho(\cos t+i\sin t)=z_۰+\rho e^{it} \quad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

نمایش داد. دراین صورت داریم

$$(z-z_۰)^m=\rho^m e^{imt}, \quad dz=i\rho e^{it}dt,$$

و به دست می‌آوریم

$$\int_C (z-z_۰)^m dz=\int_۰^{۲\pi}\rho^m e^{imt} i\rho e^{it}dt=i\rho^{m+۱}\int_۰^{۲\pi}e^{i(m+۱)t}dt.$$

حالت $m=-۱$ درمثال ۱ بررسی شد، و وقتی که $m\neq -۱$، به دست می‌آوریم (ر. ك. (۱۴) بخش ۷.۱۲)

$$\int_۰^{۲\pi}e^{i(m+۱)t}dt=\left[\frac{e^{i(m+۱)t}}{i(m+۱)}\right]_۰^{۲\pi}=۰ \quad (m\neq -۱ \text{ و صحیح})$$

نتیجه چنین است:

$$\oint (z-z_0)^m\,dz=\begin{cases}2\pi i & (m=-1)\\ 0 & (m\neq -1 \text{ و صحیح})\end{cases} \qquad (9)$$

مثال ۴. یك استفاده مستقیم از تعریف

فرض کنیم $f(z)=k=$ ثابت، و C منحنی دلخواهی باشد که دونقطهٔ z_0 و Z را به‌هم وصل می‌کند. دراین صورت می‌توان از تعریف انتگرال روی خط به عنوان حد مجموع S_n استفاده کرد. از (۲) داریم

$$S_n=\sum_{m=1}^{n}k\Delta z_m=k[(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\dots+(Z-z_{n-1})]=k(Z-z_0).$$

از اینجا بلافاصله نتیجهٔ زیرحاصل می‌شود:

$$\int_C k\,dz=\lim_{n\to\infty}S_n=k(Z-z_0)$$

توجه کنید که مقدار این انتگرال فقط به z_0 و Z وابسته است، نه به‌انتخاب مسیری که‌این نقاط را به‌هم وصل می‌کند. درحالت خاص اگر C بسته باشد، آنگاه $Z=z_0$ وانتگرال صفر است.

مثال ۵. استفادهٔ مستقیم دیگری ازتعریف

فرض می‌کنیم $f(z)=z$ و C منحنی دلخواهی باشد که نقاط z_0 و Z را به هم وصل می‌کند. مجدداً از (۲) استفاده می‌کنیم. $\zeta_m=z_m$ می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$S_n=\sum_{m=1}^{n}z_m\Delta z_m=z_1(z_1-z_0)+z_2(z_2-z_1)+\dots+Z(Z-z_{n-1})$$

با فرض $\zeta_m=z_{m-1}$ می‌یابیم

$$S_n^*=\sum_{m=1}^{n}z_{m-1}\Delta z_m=z_0(z_1-z_0)+z_1(z_2-z_1)+\dots+z_{n-1}(Z-z_{n-1})$$

ازجمع کردن مجموعهای فوق نتیجه می‌شود $S_n+S_n^*=Z^2-z_0^2$. درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty}(S_n+S_n^*)=2\int_{z_0}^{Z}z\,dz=Z^2-z_0^2$$

از اینجا نتیجه می‌شود که درطول هرمسیری که z_0 را به Z وصل می‌کند

$$\int_{z_0}^{Z}z\,dz=\frac{1}{2}(Z^2-z_0^2)$$

درحالت خاص، اگر C مسیری بسته باشد، آنگاه $Z=z_0$ و

$$\int_C z\,dz=0 \qquad (10)$$

توجه کنید که این نتیجه از قضیهٔ گرین (ر. ك. بخش ۴.۹) نیز با استفاده از فرمول (۶) این بخش به‌دست می‌آید.

مسائل بخش ۱۰.۱۴

پاره خطهایی راکه A را به B وصل می‌کنند به‌صورت $z=z(t)$ نمایش دهید. A و B عبارتند از

۱. $A: z=0, \quad B: z=1+2i$

۲. $A: z=0, \quad B: z=4-8i$

۳. $A: z=1+i, \quad B: z=3-4i$

۴. $A: z=3i, \quad B: z=4-i$

۵. $A: z=-2+i, \quad B: z=-2+4i$

۶. $A: z=3-i, \quad B: z=5-7i$

منحنیهای زیر را به‌صورت $z=z(t)$ نمایش دهید.

۷. $|z-1+2i|=3$

۸. $y=x^2$ از $(0, 0)$ تا $(3, 9)$

۹. $x^2+9y^2=9$

۱۰. $4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$

۱۱. $y=\frac{1}{x}$ از $(1, 1)$ تا $\left(4, \frac{1}{4}\right)$

۱۲. $y=-1+3/x$ از $(1, 2)$ تا $(3, 0)$

چه منحنیهایی با توابع زیر نمایش داده می‌شوند؟

۱۳. $1+(2-i)t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

۱۴. $i-t+3it, \quad -1 \leqslant t \leqslant 2$

۱۵. $3i+3e^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

۱۶. $4+2e^{it}, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 0$

۱۷. $t+3t^2i, \quad -1 \leqslant t \leqslant 2$

۱۸. $i+t-t^3i, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

از $3z^2$ در طول هریك ازپاره خطهای زیر انتگرال بگیرید:

۱۹. از 0 تا $2i$

۲۰. از 0 تا $1+i$

۲۱. از $1+i$ تا $3-4i$

۲۲. از $3i$ تا $4-i$

انتگرال بگیرید

۲۳. از $3z^2$ روی محیط مثلثی با رئوس ۰ ، ۱ ، i (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت).

۲۴. از $z+1/z$ روی دایرهٔ یکه (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت).

۲۵. از z ابتدا به‌طور قائم از ۱ تا $1+i$ وسپس به طور افقی تا $2+i$

۲۶. از $az+b$ درطول پاره خطی که از ۰ تا $-4-4i$ ادامه دارد.

۲۷. مطلوب است محاسبهٔ $\int_C (z-3)^{-1}\, dz$ ، $C: |z-3| = 2$

(الف) درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، (ب) درجهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۲۸. مطلوب است محاسبهٔ $\int_C \mathrm{Re}\, z\, dz$ روی دایرهٔ $|z| = r$: (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۹. مطلوب است محاسبهٔ $\int_C |z|\, dz$ از $A: z=-i$ تا $B: z=i$ در طول (الف)

پاره خط AB (ب) دایرهٔ یکه‌ای که درنیمه‌صفحهٔ چپ واقع است، (ج) دایرهٔ یکه‌ای که درنیم صفحهٔ راست واقع است.

۳۰. مطلوب است محاسبهٔ $\int_C (1/\sqrt{z})\, dz$ از ۱ تا -1 (الف) درطول نیم دایرهٔ فوقانی $|z| = 1$ ، (ب) درطول نیم دایرهٔ تحتانی $|z| = 1$ ، دراینجا $\sqrt{z}$ مقدار اصلی ریشهٔ دوم است.

۲.۱۴ خواص اساسی انتگرال روی خط مختلط

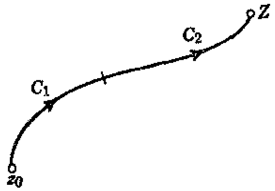
ازتعریف انتگرال روی‌خط مختلط به‌عنوان حد یک‌مجموع می‌توان خواص زیررا به‌دست آورد.

هرگاه مسیر C را به دوقسمت C_1 و C_2 تقسیم کنیم (شکل ۲۹۹)،

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz. \qquad (1)$$

اگر جهت انتگرالگیری را عوض کنیم، علامت مقدار انتگرال عوض می‌شود:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = -\int_{z}^{z_0} f(z)\, dz ; \qquad (2)$$



شکل ۲۹۹. فرمول (۱)

دراینجا مسیر C با نقاط انتهایی z_0 و z همان مسیر قبلی است؛ در طرف چپ از z_0 تا Z، و درطرف راست از Z تا z_0 انتگرال می گیریم

از مجموع دوتابع (یا بیشتر) می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، و ضریب ثابت را می‌توان اززیرعلامت انتگرال خارج کرد، یعنی

$$(۳)\quad \int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)]\, dz = k_1 \int_C f_1(z)\, dz + k_2 \int_C f_2(z)\, dz$$

اغلب اوقات لازم می آید که قدرمطلق انتگرال روی خط مختلط را تخمین بزنیم. فرمول اساسی چنین است:

$$(۴)\quad \left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant Ml$$

که درآن l طول مسیر C و M عدد حقیقی ثابتی است که در هرنقطه از C، $|f(z)| \leqslant M$.

برای اثبات (۴)، (۱۱) از بخش ۲.۱۲ را درمجموع S_n که با (۲) بخش ۱.۱۴ تعریف شده است به‌کارمی بریم و می‌یابیم

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m) \Delta z_m \right| \leqslant \sum_{m=1}^{n} |f(\zeta_m)| |\Delta z_m| \leqslant M \sum_{m=1}^{n} |\Delta z_m|.$$

حال $|\Delta z_m|$ طول وتری است که نقاط انتهایی آن z_{m-1} و z_m هستند، به‌شکل ۲۹۶ بخش ۱.۱۴ مراجعه کنید. بنابراین مجموع طرف راست‌طول L خط شکستهٔ مرکب‌از وترهایی‌را که نقاط انتهایی آنها z_0، z_1، ...، $z_n(=Z)$ هستند نمایش می‌دهد. هرگاه n طوری به‌سمت بینهایت برود که بزرگترین $|\Delta z_m|$ به سمت صفرمیل کند، آنگاه بنابه‌تعریف طول قوس (ر. ك. بخش ۴.۸) L به سمت l، طول منحنی C، میل می کند. از اینجا نامساوی (۴) نتیجه می‌شود.

مثال ۱. استفاده ازفرمول (۴)

فرض می کنیم $f(z) = 1/z$ واز این تابع روی دایرهٔ $|z| = \rho$ انتگرال می گیریم. پس $l = 2\pi\rho$ و برروی دایره $|f(z)| = 1/\rho$. درنتیجه، باتوجه به (۴)

$$\left|\int_C \frac{dz}{z}\right| \leqslant \frac{۱}{\rho}۲\pi\rho = ۲\pi \qquad \text{(ر. ک. مثال ۱، بخش ۱۰۱۴)}$$

مثال ۲. تخمین یك انتگرال دیگر

مسیر $C_۲$ی مثال ۲ بخش ۱.۱۴ دارای طـول $l=۲$ است، و روی $C_۲$، $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant ۱$.
بنابراین باتوجه به (۴)

$$\left|\int_{C_۲} \mathrm{Re}\, z\, dz\right| \leqslant ۲.$$

مسائل بخش ۲۰۱۴

۱. درستی (۱) را درمورد $f(z)=۱/z$ در حالتی‌که C دایرهٔ یکه، $C_۱$ نیمهٔ فوقانی دایرهٔ یکه و $C_۲$ نیمهٔ تحتانی آن است، تحقیق کنید.

۲. درستی (۲) را درمورد $f(z)=z^۲$ درحالتی‌که C پاره خطی‌است‌که از $-۱-i$ تا $۱+i$ ادامه دارد تحقیق کنید.

۳. درستی (۳) رادرمورد $k_۱f_۱+k_۲f_۲=۳z-z^۲$ درحالتی‌که C نیمهٔ فوقانی‌دایرهٔ یکه، از ۱ تا ۱ــ، است تحقیق کنید.

۴. درستی (۴) را، درمورد $f(z)=۱/z$ و Cیی که درمسئلهٔ ۳ آمده است‌تحقیق کنید.

مطلوب است محاسبهٔ $\int_C f(z)dz$ درحالتی که

۵. $f(z)=az+b$، C مانند مسئلهٔ ۲

۶. $f(z)=z^۳+۲z^{-۱}$، C دایرهٔ یکه (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۷. $f(z)=z^۲+۳z^{-۴}$، C مانند مسئلهٔ ۳

۸. $f(z)=۲z-z^{-۱}+۲z^{-۲}$، C دایرهٔیکه (درجهت‌عکس حرکت عقربه‌های‌ساعت)

۹. $f(z)=e^z$، C پاره خطی‌که از ۰ تا $۱+\pi i/۲$ کشیده شده است.

۱۰. $f(z)=(z-۱)^{-۱}-۲(z-۱)^{-۲}$، C دایرهٔ $|z-۱|=۴$ (در جهت حـرکت عقربه‌های ساعت).

۱۱. $f(z)=\cos z$، C پاره خطی‌که از πi تا $۲\pi i$ کشیده شده است.

۱۲. $f(z)=\sin z$، C مانند مسئلهٔ ۱۱

۱۳. $f(z)=\sin z$، C پاره خطی که از ۰ تا i کشیده شده است.

۱۴. $f(z)=\sinh z$ ، C مانند مسئلهٔ ۱۳

۱۵. $f(z)=\cosh z$ ، C مانند مسئلهٔ ۱۳

با استفاده از (۴)، کرانهای بالای انتگرالهای زیرین راتعیین کنید ، C پاره خطی است که از ۰ تا $۳+۴i$ کشیده شده است.

۱۶. $\int_c z\,dz$ ۱۷. $\int_c e^z\,dz$ ۱۸. $\int_c \operatorname{Ln}(z+1)\,dz$ ۱۹. $\int_c (z+1)^{-1}\,dz$

۲۰. درمسئلهٔ ۱۶ باتقسیم کردن C به دوقوس، کران بهتری برای انتگرال بیابید.

۳.۱۴ قضیهٔ انتگرال کشی

قضیهٔ انتگـرال کشی درآنالیز مختلط بسیارمهم است و دارای نتایج متعدد نظری و عملی است. برای بیان این قضیه به مفاهیم زیر نیاز داریم.

حوزهٔ D واقع در صفحهٔ مختلط را **حوزهٔ همبند ساده** نامند اگـر هرمنحنی بستهٔ ساده در D (یعنی ، منحنی بسته‌ای در D که خود را قطع نمی‌کند) فقط شامل نقاط D باشد. حوزه‌ای که همبند ساده نباشد همبند چندگانه نامیده می‌شود.

مثلا ، داخل یك دایره («قرص مستدیر»)، بیضی یا مربع همبند ساده است. به طور کلی داخل یـك منحنی بستهٔ سادهٔ همبند ساده است. حلقهٔ دایـره‌ای (ر.ك. بخش ۳.۱۲) همبند چندگانه (به عبارت دقیقتر: همبند دوگانه[1]) است.

به‌علاوه ، حوزهٔ D را کراندار نامند هرگاه D به طـورکامل در داخل دایره‌ای به مرکز مبدأ قرار داشته باشد. درغیر این صورت D را بیکران گویند.

قضیهٔ انتگرال کشی

هرگاه $f(z)$ درحوزهٔ کراندار همبند سادهٔ D تحلیلی[2] باشد. آنگاه به‌ازای هرمسیر بستهٔ C واقع در D

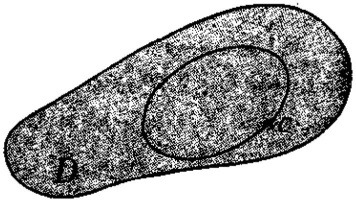
$$\int_c f(z)\,dz=0 \tag{1}$$

اثبات کشی ، با توجه به (۵) بخش ۱.۱۴ داریم

---

۱. یك حوزه کراندار را همبند p گانه نامند هـرگاه مرز آن مرکب از p مجموعـهٔ همبند بسته‌که باهم هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند باشد. درمورد طوق $p=2$ ، زیرا مرزآن تشکیل شده است از دو دایره‌که دارای نقطهٔ مشترك نیستند.

۲. یادآوری می‌کنیم که بنا به تعریف ، تابع یك رابطهٔ یك مقداری است. ر.ك. بخش ۴.۱۲.



شکل ۳۰۰. قضیهٔ انتگرال کشی

$$\int_C f(z)dz=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (udy+vdx)\,.$$

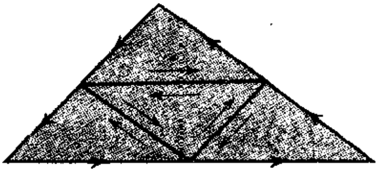
$f(z)$ تحلیلی است و بنا براین $f'(z)$ موجود است. کشی این فرض اضافی راکه $f'(z)$ پیوسته است وارد مسئله کرد. با این فرض چنانکه از (۳) و (۴) بخش ۵.۱۲ نتیجه می‌شود u و v دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته در D هستند، می‌توان ازقضیهٔ گرین (ر.ك. بخش ۴.۹) (با u و $-v$ به جای f و g) استفاده کرد، و

$$\int_C (udx-vdy)=\iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

دراینجا R ناحیه‌ای است که با C محصورشده است. معادلهٔ دوم کشی ــ ریمان (بخش ۵.۱۲) نشان می‌دهد که انتگران طرف راست همواره صفراست. درنتیجه انتگرال طرف چپ صفراست. به همین طریق با استفاده ازمعادلهٔ اول کشی ــ ریمان نتیجه می شود که انتگرال آخردرفرمول بالا صفراست، و بدین ترتیب اثبات تمام می‌شود. ▲

اثبات گورسا[1]. گورسا قضیهٔ کشی رابدون آنکه فرض کند $f'(z)$ پیوسته است ثابت کرد. این کار بسیارمهم است. ابتدا حالتی راکه C کرانهٔ یك مثلث است درنظر می گیریم. این مثلث را درجهت‌عکس حرکت عقربه‌های ساعت جهتدار می کنیم. وسطهای اضلاع مثلث را بـه هم وصل می کنیم تـا مثلث بـه چهارمثلث متشابه تقسیم شود (شکل ۳۰۱). آنگاه

$$\int_C f\,dz=\int_{C_I} f\,dz+\int_{C_{II}} f\,dz+\int_{C_{III}} f\,dz+\int_{C_{IV}} f\,dz$$



شکل ۳۰۱. اثبات قضیهٔ انتگرال کشی

۱. ادوارد گورسا (Edouard Goursat) ریاضیدان فرانسوی.

دراینجا C_I ، . . . ، C_{IV} کرانه‌های مثلثها هستند؛ در واقع، درطرف راست فرمول بالا درطول هریك ازسه پاره خطی که وسطهای اضلاع را به‌هم وصل کرده‌اند درهسردو جهت انتگرال می‌گیریم ، این انتگرالها دوبدو با همدیگرحذف می‌شوند، ومجموع انتگرالهای طرف راست برابرانتگرال طرف چپ می‌شود. ازمیان چهارانتگرال طرف راست ، یکی ازآنها ، که کرانهٔ آن را C_1 می‌نامیم، باید طوری باشد که

$$\left|\int_C f\,dz\right| \leqslant 4\left|\int_{C_1} f\,dz\right|$$

چرا کـه ممکن نیست قدرمطلق یك یك چهارانتگرال از ۱/۴ قدرمطلق مجموع انتگرالها کوچکتر باشد. این موضوع به سادگی از (۱۱) بخش ۲.۱۲ نتیجه می‌شود.

مانند قبل مثلث محصور به C_1 را تقسیم می کنیم وازمیان مثلثهای حاصل مثلثی بـا کرانهٔ C_2 را چنان انتخاب می کنیم که

$$\left|\int_{C_1} f\,dz\right| \leqslant 4\left|\int_{C_2} f\,dz\right| \quad \text{و بنابراین} \quad \left|\int_C f\,dz\right| \leqslant 4^2\left|\int_{C_2} f\,dz\right|$$

اگر بـه این‌کارادامه دهیم ، دنباله‌ای از مثلثهای T_1 ، T_2 ، . . . بـا کرانه‌های C_1 ، C_2 ، . . . به دست می‌آوریم کـه با هم متشابه بوده ، طـوری هستندکه بـه ازای $n > m$ ، T_n داخل T_m قرار می گیرد ، و

$$\left|\int_C f\,dz\right| \leqslant 4^n\left|\int_{C_n} f\,dz\right| \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{۲}$$

فرض می کنیم z_0 نقطه‌ای بـاشد که بـه تمام این مثلثها تعلق دارد. چـون f در $z = z_0$ مشتقپذیراست ، مشتق $f'(z_0)$ وجود دارد ، ومی‌توانیم بنویسیم

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + h(z)(z - z_0). \tag{۳}$$

درنتیجه از انتگرالگیری روی کرانهٔ C_n ازمثلث T_n داریم

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = \int_{C_n} f(z_0)\,dz + \int_{C_n} (z - z_0) f'(z_0)\,dz + \int_{C_n} h(z)(z - z_0)\,dz$$

چون $f(z_0)$ و $f'(z_0)$ ثابتند، با توجه بـه نتایج حاصل ازمثالهای ۴ و ۵ بخش ۱۰۱۴ نتیجه می‌شود که دو انتگرال اول طرف راست صفرند. در نتیجه

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = \int_{C_n} h(z)(z - z_0)\,dz\,.$$

با تقسیم (۳) بر $(z - z_0)$ ، انتقال دوجمله ازسمت راست آن به طرف چپ ، وقدرمطلق گرفتن از دوطرف به دست می‌آوریم

$$\left|\frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}-f'(z_\circ)\right|=|h(z)| \cdot$$

با توجه به این و (۵) از بخش ۴.۱۲ مشاهده می‌کنیم که به‌ازای عدد مثبت مفروض ε عدد مثبتی مانند δ یافت می‌شود به‌طوری که

$$|h(z)|<\varepsilon \quad \text{اگر} \quad |z-z_\circ|<\delta$$

اکنون n را می‌توان آنقدر بزرگ گرفت که مثلث T_n در قرص $|z-z_\circ|<\delta$ واقع شود. فرض می‌کنیم l_n طول C_n باشد. آنگاه به ازای هرنقطهٔ z که روی C_n و هر نقطهٔ $z_\circ$ که درون T_n قرارداشته باشد $|z-z_\circ|\leqslant l_n/۲$. با استفاده از (۴) بخش ۲.۱۴ به دست می‌آوریم

$$(۴) \qquad \left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right|=\left|\int_{C_n} h(z)(z-z_\circ)dz\right|<\varepsilon\frac{l_n}{۲}\,l_n=\frac{\varepsilon}{۲}\,l_n^{۲}$$

فرض می‌کنیم l طول C باشد. دراین صورت مسیر $C_۱$ دارای طول $l_۱=l/۲$ ، مسیر $C_۲$ دارای‌طول $l_۲=l_۱/۲=l/۴$ ، و C_n دارای طول

$$l_n=\frac{l}{۲^n}$$

خواهد بود. بنابراین از (۲) و (۴) به‌دست می‌آوریم

$$\left|\int_C f\,dz\right|\leqslant ۴^n\left|\int_{C_n} f\,dz\right|<۴^n\frac{\varepsilon}{۲}\,l_n^{۲}=۴^n\frac{\varepsilon}{۲}\frac{l^{۲}}{۴^n}=\frac{\varepsilon}{۲}\,l^{۲}.$$

با انتخاب یك $(\varepsilon>\circ)$ ، که به قدرکافی کوچك باشد، می‌توانیم عبارت طرف راست را هرقدرکه بخواهیم کوچك کنیم، وحال‌آنکه عبارت طرف چپ مقدارمعین یك انتگرال است. ازاینجا نتیجه می‌گیریم که این مقدار باید صفر باشد ، واثبات‌کامل می‌شود.

اثبات قضیه در حالتی که C کرانهٔ یك چند ضلعی باشد ، با تقسیم چند ضلعی به مثلث (شکل ۳۰۲) ، ازاثبات قبلی نتیجه می‌شود. انتگرال مربوط به هریك از مثلثها صفر است. مجموع این انتگرالها برابراست با انتگرال روی C ، زیرا ازآنجاکه روی هریك از پاره خطهای تقسیم‌کننده در دوجهت انتگرال گرفته‌ایم. انتگرالهای متناظردوبدو با هم حذف می‌شوند، وآنچه باقی می‌ماند انتگرال روی C است.

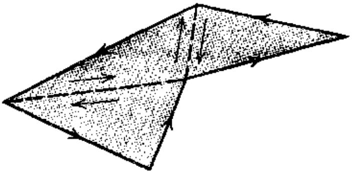
به‌طورکلی هرمسیر بستهٔ سادهٔ C را می‌توان با محاط‌کردن چند ضلعی p از وترها در C به حالت قبل برگرداند، به شرط اینکه « با دقت‌کافی » تقریبی برای C باشد، و می‌توان نشان داد‌که یك چند ضلعی مانند P موجود است به طوری‌که تفاوت انتگرال روی P با انتگرال روی C ازهرعدد حقیقی مثبتی مانند ε کوچکترباشد، هرقدرهم‌که ε کوچك باشد. جزئیات اثبات اخیررا می‌توان درمرجع [F۶] ضمیمهٔ ۱ یافت . ▲

مثال ۱

به‌ازای هرمسیر بستهٔ C

$$\int_C e^z dz = ۰$$

چراکه e^z به‌ازای تمام مقادیر z تحلیلی است.



شکل ۳۰۲. اثبات قضیهٔ انتگرال کشی درمورد چند ضلعی

مثال ۲

$$\int_C \frac{dz}{z^۲} = ۰$$

که درآن C دایرهٔ یکه است (ر. ک. بخش ۱.۱۴) . ایــن موضوع ازقضیهٔ کشی نتیجه می‌شود ، زیرا $f(z)=۱/z^۲$ در $z=۰$ تحلیلی نیست . درنتیجه این شرط که f در D تحلیلی باشد شرط کافی برقراری (۱) است و نه لازم .

مثال ۳

$$\int_C \frac{dz}{z} = ۲\pi i$$

انتگرالگیری روی دایرهٔ یکه درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام گرفته است (ر. ک. بخش ۱.۱۴) . C درون طوق $۱/۲ < |z| < ۳/۲$ ، که درآن $۱/z$ تحلیلی است، قراردارد، اما این حوزه همبند ساده نیست، بنابراین دراینجا نمی‌توان ازقضیهٔ کشی استفاده کرد. درنتیجه شرط همبند ساده بودن حوزهٔ D کاملاً ضروری است. ▲

هرگاه درقضیهٔ کشی مسیر C رابه دوقوس $C_۱$ و $C_۲^*$ تبدیل کنیم (شکل ۳۰۳) ، آنگاه (۱) به صورت

$$\int_C f\,dz = \int_{C_۱} f\,dz + \int_{C_۲^*} f\,dz = ۰$$

در می آید. درنتیجه

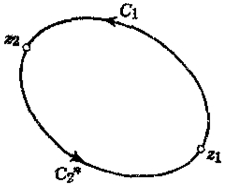
$$-\int_{C_۲^*} f\,dz = \int_{C_۱} f\,dz \,. \qquad (۵')$$

هر گاه جهت انتگرالگیری در طول C_2^* را عوض کنیم، آنگاه انتگرال روی C_2^* در ۱ − ضرب می‌شود، و به دست می‌آوریم (شکل ۳۰۴)

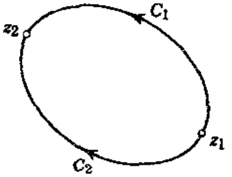
$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz . \qquad (۵)$$

پس، هر گاه f در D تحلیلی باشد، و C_1 و C_2 مسیرهای دلخواهی در D باشند که دو نقطه از آن را به هم وصل می‌کنند و دارای نقطهٔ مشترک دیگری نباشند، آنگاه (۵) برقرار است.

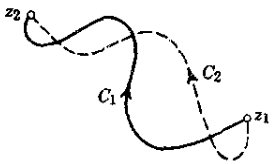
هر گاه مسیرهای C_1 و C_2 دارای تعداد متناهی نقاط مشترک باشند (شکل ۳۰۵)، آنگاه (۵) همچنان برقرار است؛ این موضوع را می‌توان با استفاده از نتیجهٔ قبل درمورد قسمتهایی از C_1 و C_2 که بین هرزوج متوالی ازنقاط تقاطع قراردارند نشان داد.



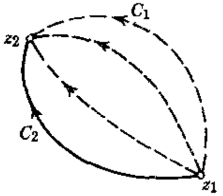
شکل ۳۰۳ . فرمول (′۵)



شکل ۳۰۴ . فرمول (۵)



شکل ۳۰۵ . مسیرهایی که دارای تعدادی متناهی نقاط تقاطع هستند



شکل ۳۰۶ . تغییرشکل پیوستهٔ مسیر

حتی می‌توان گفت که (۵) در مورد هر مسیری که به طور کامل در حوزهٔ همبند سادهٔ D قرار داشته باشد و دو نقطهٔ z_1 و z_2 از D را به هم وصل کند و $f(z)$ روی آن تحلیلی باشد برقرار است. بنابراین گوییم که انتگرال $f(z)$ از z_1 تا z_2 **مستقل ازمسیردر D** است. (البته مقدارانتگرال به انتخاب z_1 و z_2 بستگی دارد.)

برای اثبات این ادعالازم است موردی را که C_1 و C_2 دارای تعدادی نامتناهی نقاط تقاطع هستند بررسی کنیم، وما دراینجا اثبات را نمی‌آوریم.

می‌توان تصور کرد که مسیر C_2 در (۵) از C_1 با یك تغییرشکل پیوسته به دست آمده‌است (شکل ۳۰۶) . نتیجه می گیریم که در یك انتگرال می‌توانیم تغییرشکل پیوسته‌ای

به مسیر انتگرالگیری بدهیم (نقاط انتهایی را ثابت نگه می‌داریم)؛ تا وقتی مسیر تغییرشکل‌یافته از نقطه‌ای که $f(z)$ در آن تحلیلی نیست نگذرد، مقدار انتگرال روی خط تحت تغییرشکل تغییر نمی‌کند، و این به **اصل تغییرشکل مسیر** معروف است.

حوزهٔ همبند چندگانهٔ D^* را می‌توان طوری برید که حوزهٔ حاصل (D^* بدون نقاط بریده شده) همبند ساده شود. درمورد حوزهٔ همبند دوگانه D^* نیاز به‌یك بریدگی $\tilde{C}$ داریم (شکل ۳۰۷). هرگاه $f(z)$ در D^* و درهر نقطه از C_1 و C_2 تحلیلی باشد آنگاه، نظربه اینکه C_1، C_2، و $\tilde{C}$ کرانه‌های یك حوزهٔ همبند ساده هستند، از قضیهٔ کشی نتیجه می‌شود که انتگرال f روی C_1، $\tilde{C}$، C_2 درجهتی که درشکل ۳۰۷ باپیکان نشان داده شده است دارای مقدار صفراست. چون درطول $\tilde{C}$ در هر دو جهت انتگرال می‌گیریم، انتگرالهای متناظر با همدیگر حذف می‌شوند و به دست می‌آوریم

$$\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz=0 \qquad (۶)$$

دراینجا یکی ازمنحنیها درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت ودیگری درجهت‌مخالف آن پیموده می‌شود.

معادلهٔ (۶) را به‌شکل زیرهم می‌توان نوشت:

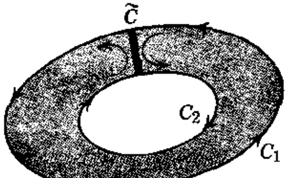
$$\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_{C_2} f(z)\,dz, \qquad (۷)$$

که دراینجا حالا C_1 و C_2 همجهت هستند (شکل ۳۰۸). یادآوری می‌کنیم که (۷) با فرض‌تحلیلی بودن $f(z)$ درحوزهٔ محصور به C_1 و C_2 ودرهر نقطه از C_1 و C_2 برقرار است.

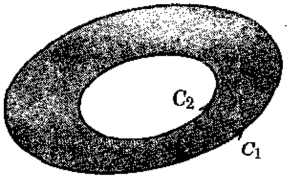
درمورد حوزه‌های پیچیده‌تر ممکن است به بیش ازیك بریدگی نیاز باشد. اما ایدهٔ اساسی همان است که دربالا گفته شد. مثلا، درمورد حوزهٔ همبند سه‌گانهٔ شکل ۳۰۹

$$\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz+\int_{C_3} f(z)\,dz=0$$

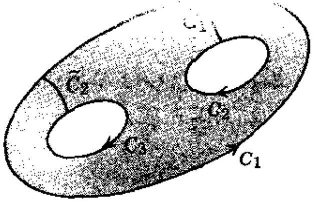
که درآن C_2 و C_3 دریك جهت و C_1 درجهت مخالف پیموده می‌شوند.



شکل ۳۰۷. حوزهٔ همبند دوگانه



شکل ۳۰۸. مسیرهای (۷)



شکل ۳۰۹. حوزهٔ همبند سه‌گانه

متذکر می‌شویم که بعضی اوقات مسیرسادهٔ بسته را مرز می‌نامند، و انتگرال درطول چنین مسیرهایی **انتگرال روی مرز** نامیده می‌شود.

مثال ۴

فرض می‌کنیم $C_۱$ دایرهٔ یکهٔ $|z|=۱$ و $C_۲$ دایرهٔ $|z|=۱/۲$ باشد. آنگاه با توجه به (۷)،

$$\int_{C_۲}\frac{dz}{z}=\int_{C_۱}\frac{dz}{z}=۲\pi i \qquad \text{(ر. ک. مثال۱ بخش ۱۰۱۴)}$$

که درآن هردومسیر درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شوند.

مثال ۵

ازمثال ۳ بخش ۱۰۱۴ واصل تغییرشکل مسیر نتیجه می‌شود که

$$\int_C (z-z_۰)^m\,dz=\begin{cases}۲\pi i & (m=-۱)\\ ۰ & (m\neq -۱ \text{ وعدد صحیح})\end{cases}$$

دراینجا C مرز دلخواهی است که نقطهٔ $z_۰$ درون آن قرار دارد و انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت صورت می‌گیرد.

مسائل بخش ۳۰۱۴

۱. درستی قضیهٔ کشی را در مورد $\int_C z^۲\,dz$ که درآن C کرانهٔ مثلثی با رئوس ۰، ۲ و $۲i$ است تحقیق کنید.

۲. نشان دهید که انتگرال $۱/z^۳$ روی دایرهٔ یکه صفراست. آیا این موضوع از قضیهٔ کشی نتیجه می‌شود؟

۳. روی کدام مسیر بستهٔ ساده انتگرال $1/z$ برابر صفر است؟

درهر مورد مقدار انتگرال تابع داده‌شده را روی دایرهٔ یکه درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بیابید و به این سؤال جواب دهید که آیا قضیهٔ کشی را می‌توان به‌کار برد.

۴. $f(z)=1/z^4$ ۵. $f(z)=e^{-z}$ ۶. $f(z)=|z|$

۷. $f(z)=\operatorname{Im} z$ ۸. $f(z)=\operatorname{Re} z$ ۹. $f(z)=\tanh z$

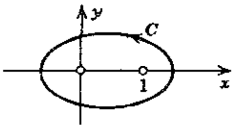
۱۰. $f(z)=1/(z^2+2)$ ۱۱. $f(z)=1/\bar{z}$ ۱۲. $f(z)=z^2\sec z$

۱۳. جواب مسئلهٔ ۸ را با استفاده ازمسئلهٔ ۷ و به‌کار بردن قضیهٔ کشی درمورد $f(z)=z$ به دست آورید.

۱۴. با استفاده از تغییر شکل مسیر و $\frac{2z-1}{z^2-z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}$ نشان دهید که

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz=\int_C \frac{dz}{z}+\int_C \frac{dz}{z-1}=4\pi i$$

دراینجا C مسیری است که درشکل نشان داده شده است.



مسئلهٔ ۱۴

۱۵. از $f(z)=\bar{z}/|z|$ روی دایرهٔ (الف) $|z|=2$ ، (ب) $|z|=4$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید. آیا می‌توان نتیجهٔ قسمت (ب) را ازنتیجهٔ قسمت (الف) به‌کمك اصل تغییرشکل مسیر به‌دست آورد؟

انتگرالهای زیررا محاسبه کنید. (راهنمایی. درصورت لزوم، انتگران را برحسب کسرهای جزئی بنویسید.)

۱۶. $\int \frac{dz}{z}$ ، C عبارت است ازدایرهٔ $|z-2|=1$ (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۱۷. $\int_C \frac{z^2-z+1}{z^3-z^2}dz$ ، C عبارت است از دایرهٔ (الف) $|z|=2$ ،(ب) $|z|=1/2$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۱۸. $\int_C \frac{dz}{z^2-1}$ ، C عبارت است از دایرهٔ (الف) $|z|=2$ ، (ب) $|z-1|=1$

(درجهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۱۹. $\int_C \frac{z}{z^2+1}\,dz$، C عبارت است از دایرهٔ (الف) $|z|=2$، (ب) $|z+i|=1$
(درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۰. $\int_C \frac{dz}{z^2+1}$، C عبارت است ازدایرهٔ (الف) $|z+i|=1$، (ب) $|z-i|=1$
(درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۱. $\int_C \frac{e^z}{z}\,dz$، C عبارت است ازدایرهٔ $|z|=2$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) و $|z|=1$ (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۲. $\int_C \frac{\cos z}{z^2}\,dz$، C عبارت است ازدایرهٔ $|z-2i|=1$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۳. $\int_C \frac{3z+1}{z^3-z}\,dz$، C عبارت است‌از دایرهٔ (الف) $|z|=1/2$، (ب) $|z|=2$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۴. $\int_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2}\,dz$، C عبارت است ازدایرهٔ $|z-2|=4$ (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت)

۲۵. $\int_C \frac{dz}{z^4+4z^2}$، C مرکب‌است از $|z|=3/2$ (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) و $|z|=1$ (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۴.۱۴ محاسبهٔ انتگرال روی خط با انتگرالگیری نامعین

می‌خواهیم با استفاده از قضیهٔ انتگرال‌کشی نشان دهیم که دربسیاری از موارد می‌توان انتگرالهای روی خط راباروشی خیلی ساده، یعنی، با انتگرالگیری نامعین محاسبه‌کرد.

فرض می‌کنیم $f(z)$ درحوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، وفرض می‌کنیم z_0 نقطهٔ دلخواهی از D باشدکه ثابت بماند. دراین صورت انتگرال

$$\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,dz^*$$

به‌ازای تمامی مسیرهایی که در D قراردارند و z_0 و z را به‌هم وصل می‌کنند تابعی از z است، ومی‌توان نوشت

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,dz^*. \qquad (۱)$$

حال ثابت می‌کنیم که $F(z)$ تابعی تحلیلی از z در D است، و $F'(z)=f(z)$.

z را مشخص می‌گیریم. چون D یک حوزه است، همسایگی N ی از z وجود دارد که متعلق به D است. در N نقطهٔ $z+\Delta z$ را طوری انتخاب می‌کنیم که پاره خطی که نقاط انتهایی آن z و $z+\Delta z$ است در N و در نتیجه در D قرار داشته باشد. سپس از(۱) به‌دست می‌آوریم

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z^*)\,dz^*$$

$$-\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,dz^*=\int_{z}^{z+\Delta z} f(z^*)\,dz^*$$

دراینجا می‌توان از z تا $z+\Delta z$ درطول پاره خطی که دربالا معرفی شد انتگرال گرفت (شکل ۳۱۰). بنابراین

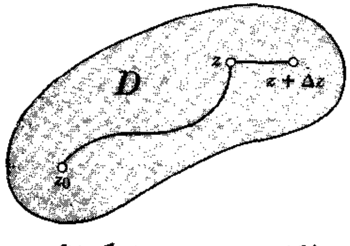
$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(z^*)-f(z)]\,dz^*$$

زیرا z ثابت نگه داشته شده است وبنابراین

$$-\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,dz^*=-\frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} dz^*=-f(z).$$

$f(z)$ پیوسته است. درنتیجه، به‌ازای $\varepsilon z>0$ مفروض عددی مانند $\delta>0$ می‌توان یافت به‌طوری که

$$|f(z^*)-f(z)|<\varepsilon \quad \text{وقتی‌که} \quad |z^*-z|<\delta.$$



شکل ۳۱۰. مسیر انتگرالگیری

در نتیجه، هرگاه $|\Delta z| < \delta$، آنگاه

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(z^*)-f(z)]\,dz^*\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}dz^*\right|=\varepsilon\,;$$

یعنی،

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z). \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌شود که اگر z_0 بانقطه ثابت دیگری در D عوض شود، به تابع $f(z)$ مقدار ثابتی اضافه می‌شود. بنابر(۲) مشاهده می‌کنیم $F(z)$ انتگرال نامعین یا تابع اولیهٔ $f(z)$ است، که به‌صورت

$$F(z)=\int f(z)\,dz\,;$$

نوشته می‌شود، یعنی، $F(z)$ تابعی تحلیلی در D است که مشتق آن برابر $f(z)$ است.

هرگاه $F'(z)=f(z)$ و $G'(z)=f(z)$، آنگاه در D $F'(z)-G'(z)\equiv 0$. در نتیجه تابع $F(z)-G(z)$ ثابت است (ر. ك. مسئلهٔ ۳۵ در انتهای بخش ۵.۱۲)، یعنی، دو انتگرال نامعین $F(z)$ و $G(z)$ تنها یك مقدار ثابت باهم تفاوت دارند. با توجه به (۱)، به‌ازای هردونقطهٔ a و b در D و هرمسیری در D که a را به b وصل می‌کند داریم

$$\int_a^b f(z)\,dz=\int_{z_0}^{b}f(z)\,dz-\int_{z_0}^{a}f(z)\,dz=F(b)-F(a)$$

و این همان چیزی است که درمورد انتگرال معین داشتیم، ولی نکتهٔ مهم اینکه دراینجا مسیرهای انتگرالگیری درحوزهٔ همبند ساده‌ای مانند D که درآن $f(z)$ تحلیلی است قرار دارند.

نتیجهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

قضیهٔ ۱ (محاسبهٔ انتگرال روی خط با انتگرالگیری نامعین)

هرگاه $f(z)$ درحوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال نامعینی از $f(z)$ در حوزهٔ D وجود دارد، یعنی، تابعی تحلیلی مانند $F(z)$ وجود دارد به‌طوری که در D $F'(z)=f(z)$، و به‌ازای هرمسیری در D که دونقطهٔ a و b از D را به‌هم وصل می‌کند

$$\int_a^b f(z)\,dz=F(b)-F(a) \qquad (۳)$$

این قضیه مارا قادرمی‌سازدکه انتگرالهای روی خط مختلط را به‌کمك انتگرالگیری نامعین محاسبه‌کنیم. توجه‌کنید که در (۳) می‌توان هر انتگرال نامعین $F(z)$ ی از $f(z)$ در D را درنظر گرفت، زیرا $F(z)$ صرفنظر ازجمع آن بامقدارهای ثابت یکتا است.

مثال ۱

$$\int_{i}^{1+4i} z^{2}\,dz=\left[\frac{z^{3}}{3}\right]_{i}^{1+4i}=\frac{1}{3}[(1+4i)^{3}-i^{3}]=-\frac{47}{3}-17i$$

مثال ۲

$$\int_{i}^{\pi/2} \cos z\,dz=\sin z\Big|_{i}^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin i=1-i\sinh 1$$

مسائل بخش ۴.۱۴

مطلوب است محاسبهٔ

۱. $\int_{i}^{2+i} z\,dz$

۲. $\int_{1}^{3i} z^{2}\,dz$

۳. $\int_{i}^{1}(z+1)^{2}\,dz$

۴. $\int_{1-i}^{1+i} z^{3}\,dz$

۵. $\int_{1}^{1+\pi i} e^{z}\,dz$

۶. $\int_{\pi i}^{2\pi i} e^{2z}\,dz$

۷. $\int_{0}^{i} z e^{z^{2}}\,dz$

۸. $\int_{1-\pi i}^{1+\pi i} e^{z/2}\,dz$

۹. $\int_{0}^{\pi i} \cos z\,dz$

۱۰. $\int_{0}^{2\pi i} \sin 2z\,dz$

۱۱. $\int_{0}^{\pi i} z\cos z^{2}\,dz$

۱۲. $\int_{0}^{\pi i} z\cos z\,dz$

۱۳. $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^{2} z\,dz$

۱۴. $\int_{1-i}^{1+i} \cos z\,dz$

۱۵. $\int_{0}^{3i} z\cosh z\,dz$

۱۶. $\int_{i}^{1+i} \sinh z\,dz$

۱۷. $\int_{0}^{2i} \sinh z\,dz$

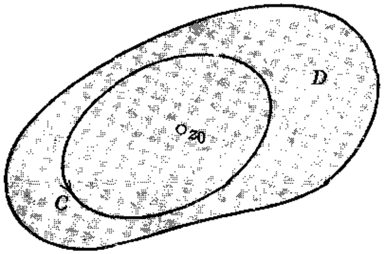
۱۸. $\int_{i}^{3i} z\sinh z^{2}\,dz$

۱۹. $\int_{-i}^{i} z\cosh z^{2}\,dz$

۲۰. $\int_{-\pi i}^{\pi i} z\cosh z\,dz$

۵.۱۴ فرمول انتگرال کشی

مهمترین نتیجهٔ قضیهٔ انتگرال کشی فرمول انتگرال کشی است. این فرمول وشرایط برقراری



شکل ۳۱۱. فرمول انتگرال کشی

آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ ۱ (فرمول انتگرال کشی)

فرض می‌کنیم $f(z)$ درحوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد. آنگاه به ازای هرنقطهٔ z_0 از D و هر مسیر بستهٔ سادهٔ C در D که z_0 را محصور کند (شکل ۳۱۱)،

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) \qquad (1)$$

(فرمول انتگرال کشی)

انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام می‌گیرد.

اثبات. اگر بنویسیم $f(z)=f(z_0)+[f(z)-f(z_0)]$، با توجه به‌اینکه ضریب ثابت را می‌توان از زیرعلامت انتگرال خارج کرد، داریم

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_C \frac{dz}{z-z_0} + \int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz. \qquad (2)$$

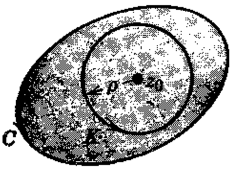
از مثال ۵ بخش ۳.۱۴ نتیجه می‌شود که جملهٔ اول طرف راست برابر $2\pi i f(z_0)$ است. درنتیجه (۱) وقتی برقرار است که انتگرال آخر در (۲) صفر باشد. اما انتگران این انتگرال در D جز درنقطهٔ z_0، تحلیلی است. بنابراین می‌توان C را با دایرهٔ کوچك K به‌مرکز z_0 عوض کرد بدون آنکه مقدار انتگرال تغییر کند (شکل ۳۱۲). $f(z)$ چون تحلیلی است پیوسته است. درنتیجه به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، می‌توان عددی مانند $\delta > 0$ یافت به طوری که

$|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$ ، به‌ازای هر z ازقرص $|z-z_0| < \delta$.

اگر ρ ، شعاع دایرهٔ K، راکوچکتر از δ انتخاب کنیم در هرنقطه از K نامساوی

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

را خواهیم داشت. طول K برابراست با $2\pi\rho$. بنابراین، باتوجه به (۴) از بخش ۲.۱۴



شکل ۳۱۲. اثبات فرمول انتگرال کشی

$$\left|\int_K \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}۲\pi\rho = ۲\pi\varepsilon.$$

از آنجا که می‌توانیم ε را هرقدر که بخواهیم کوچك اختیار کنیم، نتیجه می‌گیریم که انتگرال آخر در طرف راست (۲) دارای مقدار صفر است، و بدین ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد. ▲

مثال ۱. انتگرالگیری در روی مسیرهای بستهٔ گوناگون

از

$$\frac{z^۲+۱}{z^۲-۱}$$

درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در روی دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز هریك از نقاط زیر انتگرال بگیرید:

(الف) $z=۱$ (ب) $z=\frac{۱}{۲}$ (پ) $z=-۱$ (ت) $z=i$

(الف) انتگرال مورد نظر را می‌توان چنین نوشت:

$$\int_C \frac{z^۲+۱}{z^۲-۱}\,dz = \int_C \frac{z^۲+۱}{z+۱}\,\frac{dz}{z-۱}$$

عبارت طرف راست به‌صورت (۱) است که درآن $z_\circ=۱$ و

$$f(z)=\frac{z^۲+۱}{z+۱}.$$

نقطهٔ $z_\circ+۱$ درون دایرهٔ C قرار دارد، و $f(z)$ در داخل و روی C تحلیلی است. [نقطهٔ $z=-۱$، که درآن $f(z)$ تحلیلی نیست، خارج دایرهٔ C قرار دارد.] درنتیجه بنا به‌فرمول انتگرال کشی

$$\int_C \frac{z^۲+۱}{z^۲-۱}\,dz = \int_C \frac{z^۲+۱}{z+۱}\,\frac{dz}{z-۱} = ۲\pi i\left[\frac{z^۲+۱}{z+۱}\right]_{z=۱} = ۲\pi i$$

(ب) دراین مورد نیز همان نتیجهٔ قبل‌را به‌دست می‌آوریم زیرا تابع ما جزدرنقاط $z=۱$ و $z=-۱$ تحلیلی است، می‌توانیم دایرهٔ (ب) را با یك تغییرشکل پیوسته

(و احیاناً با یك انتقال) از دایرهٔ (الف) به‌دست آوریم بدون آنکه از نقطه‌ای که تابع در آن تحلیلی نیست بگذریم.

(پ) می‌توان نوشت

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz=\int_C \frac{z^2+1}{z-1}\,\frac{dz}{z+1}.$$

انتگرال طرف راست به صورت (۱) است با $z_0=-1$ و

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z+1}$$

نقطهٔ $z_0=-1$ درون دایرهٔ C که اکنون مورد بررسی ما است قرار دارد، و $f(z)$ در داخل و روی C تحلیلی است. درنتیجه بنا به (۱)،

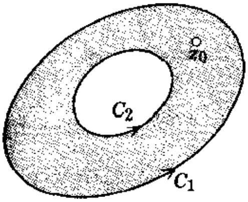
$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz=\int_C \frac{z^2+1}{z-1}\;\frac{dz}{z+1}=2\pi i\left[\frac{z^2+1}{z-1}\right]_{z=-1}=-2\pi i$$

(ت) تابع داده شده در داخل و روی دایرهٔ مورد نظر همه جا تحلیلی است. در نتیجه، بنا به قضیهٔ انتگرال کشی، انتگرال دارای مقدار صفر است. ▲

درمورد حوزهٔ همبند چندگانه می‌توان مانند بخش ۳.۱۴ عمل کرد. مثلاً، هرگاه $f(z)$ روی C_1 و C_2 و درحوزهٔ حلقه‌ای شکل محدود به C_1 و C_2 (شکل ۳۱۳) تحلیلی بوده z_0 نقطهٔ دلخواهی ازاین حوزه باشد، آنگاه

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz, \qquad (3)$$

که هردو انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام می‌گیرند.



شکل ۳۱۳. فرمول (۳)

مسائل بخش ۵.۱۴

از $z^2/(z^2+1)$ درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی هریك از دایره‌های زیر انتگرال بگیرید.

۱. $|z+i|=1$ ۲. $|z-i|=1/2$ ۳. $|z|=2$ ۴. $|z|=1/2$

از $z^2/(1-z^4)$ درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی هریك از دایره‌های زیر انتگرال بگیرید.

۵. $|z-1|=1$ ۶. $|z+i|=1$ ۷. $|z-i|=1/2$ ۸. $|z|=2$

ازتوابع زیر درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایرهٔ یکه انتگرال بگیرید.

.۹	$1/z$	.۱۰	$1/(z^2+4)$	.۱۱	$1/(4z+i)$
.۱۲	e^z/z	.۱۳	$e^{2z}/(z+2i)$	.۱۴	$e^{z^2}/(2z-i)$
.۱۵	$(\cos z)/z$	.۱۶	$(\sin z)/z$	.۱۷	$(e^z-1)/z$
.۱۸	$(\sinh z)/z$	.۱۹	$(\cosh 3z)/z$	.۲۰	$(z-2)^{-1}\sin z$

۶.۱۴ مشتقات یك تابع تحلیلی

ازاین فرض که تابعی حقیقی ازیك متغیرحقیقی یك بارمشتقپذیر است درمورد وجودمشتقات مراتب بالاتر نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت. ولی چنانچه خواهیم دید اگر فرض کنیم که یك تابع مختلط در حوزهٔ D مشتق مرتبهٔ اول دارد می‌توانیم وجود مشتق از هرمرتبه‌ای را در D نتیجه بگیریم. یعنی توابع تحلیلی مختلط بدین طریق بسیارساده‌تر ازتوابع حقیقی که یك بار مشتقپذیرهستند رفتار می کنند.

قضیهٔ ۱ (مشتقات یك تابع تحلیلی)

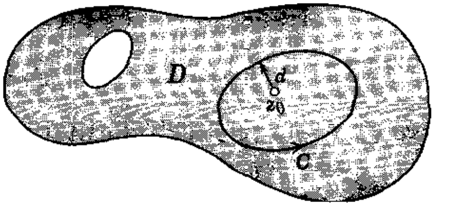
هرگاه $f(z)$ درحوزهٔ D تحلیلی باشد، آنگاه f در D ازهرمرتبه‌ای مشتق دارد و بنابراین همهٔ این مشتقات نیز در D تحلیلی هستند. مقادیر این مشتقات درنقطه‌ای مانند z_0 از D فرمولهای

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz, \tag{1'}$$

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz, \tag{1''}$$

و درحالت کلی با

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad (n=1, 2, \cdots); \tag{1}$$



شکل ۳۱۴. قضیهٔ ۱

داده می‌شوند؛ در اینجا C مسیر بستهٔ سادهٔ دلخواهی در D است که $z_\circ$ را در بر می‌گیرد و تمامی درون آن متعلق به D است؛ منحنی C درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود (شکل ۳۱۴).

تبصره. برای به‌خاطرسپردن (۱)، بدنیست درنظر داشته باشید که این فرمول بامشتقگیری ازفرمول کشی (۱)، بخش ۵.۱۴، در زیرعلامت انتگرال نسبت به $z_\circ$ حاصل می‌شود.

اثبات قضیهٔ ۱. ($'$۱) را ثابت می‌کنیم. بنا به تعریف

$$f'(z_\circ)=\lim_{\Delta z\to\circ}\frac{f(z_\circ+\Delta z)-f(z_\circ)}{\Delta z}$$

از اینجا وازفرمول انتگرال کشی (۱) بخش ۵.۱۴ نتیجه می‌شود که

$$(۲)\quad f'(z_\circ)=\lim_{\Delta z\to\circ}\frac{۱}{۲\pi i\Delta z}\left[\int_C\frac{f(z)}{z-(z_\circ+\Delta z)}\,dz-\int_C\frac{f(z)}{z-z_\circ}\,dz\right].$$

با محاسبهٔ مستقیم نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{\Delta z}\left[\frac{۱}{z-(z_\circ+\Delta z)}-\frac{۱}{z-z_\circ}\right]=\frac{۱}{(z-z_\circ)^۲}+\frac{\Delta z}{(z-z_\circ-\Delta z)(z-z_\circ)^۲}$$

پس (۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$f'(z_\circ)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^۲}\,dz+\lim_{\Delta z\to\circ}\frac{\Delta z}{۲\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_\circ-\Delta z)(z-z_\circ)^۲}\,dz.$$

درنتیجه ($'$۱) وقتی به‌اثبات می‌رسد که نشان دهیم عبارت آخرطرف راست صفراست، و این همان‌کاری است که خواهیم کرد.

تابع $f(z)$ روی C پیوسته‌است. بنابراین قدرمطلق $f(z)$ روی C کراندار است، مثلا $|f(z)|<M$. فرض می‌کنیم d فاصلهٔ نزدیکترین نقطه (یا نقاط) C از $z_\circ$ باشد. درآن صورت به‌ازای هر z از C،

$$|z-z_0|\geqslant d \quad \text{و} \quad \frac{1}{|z-z_0|}\leqslant\frac{1}{d}$$

به علاوه، هرگاه $|\Delta z|\leqslant d/2$، آنگاه به‌ازای هر z از C نامساوی زیر را داریم

$$|z-z_0-\Delta z|\geqslant\frac{d}{2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{|z-z_0-\Delta z|}\leqslant\frac{2}{d}$$

اگرطول C را با L نشان‌دهیم واز فرمول (۴) بخش۲.۱۴ استفاده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\left|\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\,dz\right|<\frac{|\Delta z|}{2\pi}\frac{M}{\frac{1}{2}dd^2}L \qquad \left(|\Delta z|\leqslant\frac{d}{2}\right)$$

هرگاه Δz به سمت صفرمیل کند، عبارت طرف راست به سمت صفرمیل می‌کند. بدین ترتیب ($1'$) به‌اثبات می‌رسد. توجه کنید که ما از فرمول انتگرال کشی (۱) بخش ۵.۱۴ استفاده کرده‌ایم؛ اگر تمام معلومات ما درمورد $f(z_0)$ این بود که می‌توان $f(z_0)$ را به صورت (۱) بخش ۵.۱۴ نمایش داد، باتوجه به آنچه گفته شد وجود $f'(z_0)$، مشتق $f(z)$ به‌اثبات می‌رسید. فرمول($1''$) نیز با برهان مشابهی ثابت می‌شود، وفرمول کلی (۱) با استقرا به دست می‌آید.

با استفاده ازقضیهٔ ۱، عکس قضیهٔ کشی را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ مررا[1]

اگر $f(z)$ درحوزهٔ همبند سادهٔ D پیوسته باشد واگر به‌ازای هرمسیر بسته در D

$$\int_C f(z)\,dz=0, \tag{۳}$$

آنگاه $f(z)$ در D تحلیلی است.

اثبات. دربخش ۴.۱۴ نشان دادیم که اگر $f(z)$ در D تحلیلی باشد، آنگاه تابع

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z^*)\,dz^*$$

در D تحلیلی است و $F'(z)=f(z)$. برای اثبات این قضیه فقط از پیوستگی $f(z)$ و این خاصیت که انتگرال آن روی هرمسیر بسته در D صفراست استفاده کردیم؛ از این فرضها نتیجه گرفتیم که $F(z)$ تحلیلی است. بنابه قضیهٔ۱، مشتق $F(z)$ تحلیلی است، یعنی $f(z)$ در D تحلیلی است، وقضیهٔ مررا به‌اثبات می‌رسد. ▲

حال می‌خواهیم نامساوی مهمی را به‌دست آوریم. در (۱)، فرض می‌کنیم که C

---

۱. جیاچنیتومررا (Giacinto Morera)، ۱۸۵۶–۱۹۰۹، ریاضیدان ایتالیایی.

دایره‌ای به‌شعاع r و مرکز z_0، و M ماکزیمم $|f(z)|$ روی C باشد. دراین‌صورت با استفاده از (۴) بخش ۲.۱۴، در(۱) می‌یابیم

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r.$$

از نامساوی بالا **نامساوی کشی** حاصل می‌شود

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!M}{r^n} \tag{۴}$$

با استفاده از (۴)، قضیهٔ اساسی وجالب زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ لیوویل

هرگاه $f(z)$ به‌ازای هر z از صفحهٔ مختلط متناهی(ر.ک. بخش۳.۱۳) تحلیلی و قدرمطلق آن کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ ثابت است.

اثبات. بنا به‌فرض، $|f(z)|$ کراندار است، مثلاً به‌ازای هر z متناهی $|f(z)|<K$. با استفاده از (۴)، مشاهده می‌کنیم $|f'(z_0)|<K/r$. چون این نامساوی به‌ازای هر r برقرار است، می‌توانیم r را هرقدر که می‌خواهیم بزرگ اختیار کنیم و نتیجه بگیریم که $f'(z_0)=0$. از آنجاکه z_0 دلخواه است، پس به‌ازای هر z متناهی، $f'(z)=0$، و $f(z)$ ثابت است (ر. ک. مسئلهٔ ۳۵ درانتهای بخش ۵.۱۲). بدین ترتیب اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

مسائل بخش ۶.۱۴

با استفاده از قضیهٔ ۱، از توابع زیر درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایرهٔ یکه انتگرال بگیرید. (n درمسائل ۸، ۱۲، ۱۳ عددی صحیح ومثبت است.)

۱. $z^2/(2z-1)^2$ ۲. $z^2/(2z-1)^4$ ۳. $z^3/(2z+i)^3$

۴. $z^4/(z-3i)^2$ ۵. $z/(4z+i)^2$ ۶. e^z/z^2

۷. e^z/z^3 ۸. e^z/z^n ۹. $ze^z/(4z+\pi i)^2$

۱۰. $z^{-2}\cos z$ ۱۱. $z^{-2}\sin z$ ۱۲. $z^{-2n}\cos z$

۱۳. $z^{-2n-1}\cos z$ ۱۴. e^{z^2}/z^3 ۱۵. $z^{-2}e^{-z}\sin z$

۱۶. e^{z^3}/z^3

۱۷. هرگاه $f(z)$ ثابت نبوده، به‌ازای هرمقدار z (متناهی) تحلیلی باشد، و R و M اعداد حقیقی مثبت دلخواه باشند (صرفنظر از اینکه چقدر بزرگ باشند)، نشان دهید مقادیری از z موجود است به‌طوری‌که $|z|>R$ و $|f(z)|>M$. راهنمایی. از قضیهٔ لیوویل استفاده کنید.

۱۸. هرگاه $f(z)$ یك چند جمله‌ای از درجهٔ $n>0$ و M عدد حقیقی مثبت دلخواهی باشد (صرفنظر از اینکه چقدربزرگ باشد)، نشان دهید که عددحقیقی مثبت R وجود دارد به‌طوری‌که $|f(z)|>M$ به ازای هر $|z|>R$.

۱۹. نشان دهید که $f(z)=e^z$ خاصیتی را که درمسئلهٔ ۱۷ ذکرشد دارد، ولی دارای خاصیتی که درمسئلهٔ ۱۸ بیان شدنیست.

۲۰. قضیهٔ بنیادی جبر را ثابت‌کنید: هرگاه $f(z)$ که ثابت نیست یك چند جمله‌ای برحسب z باشد، آنگاه لااقل به ازای یك مقدار z، $f(z)=0$. راهنمایی. فرض کنیدکه به‌ازای هر z $f(z)\neq 0$ ونتیجهٔ حاصل‌ازمسئلهٔ ۱۷ را درمورد $g=1/f$ به‌کار برید.

۱۵

دنباله‌ها و سریها

دراین فصل مفاهیم اساسی و حقایق مربوط به دنباله‌ها و سریهای حقیقی و مختلط به طور خودکفا عرضه می‌شود.

بخشهای ۱.۱۵ و ۲.۱۵ تعاریف اساسی را دربردارند.

بخشهای ۳.۱۵ ــ ۵.۱۵ به‌آزمونهای همگرایی می‌پردازند و بخش ۶.۱۵ به‌اعمالی که روی سریها انجام می‌شود نظیر جمع جمله به جمله و باز آرایش اختصاص دارد.

بخشهای ۳.۱۵ ــ ۶.۱۵ برای خواننده‌ای که صرفاً به‌توابع تحلیلی مختلط علاقه‌منداست ودربارهٔ سریهای حقیقی مطالعاتی دارد اختیاری‌هستند، بنابراین چنین خواننده‌ای‌می‌تواند بعداز بخش ۲.۱۵ یکسر سراغ فصل ۱۶ (سریهای توانی، سری تیلور وسری لورن که‌در آنالیز مختلط اساسی هستند) برود. یعنی، می‌توان بخشهای ۳.۱۵ ــ ۶.۱۵ را حذف کرد واز آنها، درصورت لزوم، به عنوان مرجع استفاده کرد و بدین ترتیب سرعت مطالعه را بیشتر ساخت.

دسته‌های خاص سریها را می‌توان درفصلهای زیر یافت:

فصل ۱۰ **(سری فوریه)**

فصل ۱۶ **(سری توانی)**

بخش ۱۹. ۱۵ **(بسط مجانبی)**

پیشنیازهای این فصل: بخشهای ۱.۱۲ ــ ۵.۱۲.

بخشهایی که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: بخشهای ۳.۱۵ ــ ۶.۱۵.

مراجع: [A۲], [A۳], [A۷], [A۹], [A۱۵] درضمیمهٔ ۱.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱۰۱۵ دنباله‌ها

سریها و بخصوص سریهای توانی، درآنالیزمختلط نقشی اساسی دارند. برای معرفی‌سریها بحث‌را بادنباله ومفاهیم مربوط به‌آن آغاز می‌کنیم. خواهیم‌دیدکه بیشترتعاریف‌وقضایای مربوط به‌دنباله‌ها وسریهای مختلط‌شبیه تعاریف وقضایای مربوط به‌دنباله وسریهای حقیقی هستندکه درحساب دیفرانسیل وانتگرال باآنها آشنا شده‌ایم.

هرگاه به هر عدد صحیح مثبت n عددی مانند z_n نسبت داده شود آنگاه گویند که اعداد

$$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$$

یك‌دنبالهٔ نامتناهی یا، به‌اختصار **یك دنباله** تشکیل می‌دهند واعداد z_n را **جمله‌های** این دنباله می‌نامند.

دنباله‌ای راکه جملاتش حقیقی باشند دنبالهٔ حقیقی می‌نامند.

گاهی مناسب است‌که شماره‌گذاری جملات یك دنباله را با ۰ ، ۲ ، یا هرعدد صحیح دیگری، آغازکنیم.

دنبالهٔ $z_1, z_2, \ldots$ را **همگرا** نامند هرگاه عددی مانند c با این خاصیت وجود داشته باشدکه به‌ازای هرعدد حقیقی مثبت ε (اینکه چقدرکوچك باشد مهم نیست ولی صفرنباشد) بتوانیم عدد صحیح N را طوری بیابیم که

$$|z_n - c| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای هر } n > N \tag{1}$$

c را **حد** دنباله می‌نامند. دراین صورت می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c$$

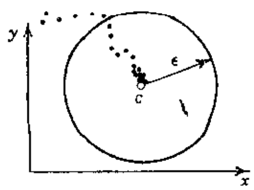
یا به‌طور ساده

$$z_n \to c \quad (n \to \infty)$$

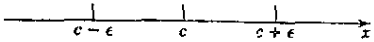
ومی‌گوییم‌که این دنباله به c همگراست ویا دارای حد c است.

دنباله‌ای راکه همگرا نباشد واگرا نامند.

شرط (۱) تعبیرهندسی‌ساده‌ای دارد. بدین مضمون‌که هرجملهٔ z_n با $n > N$ درون قرص‌دایره‌ای بازی به‌شعاع ε وبه‌مرکز c قراردارد (شکل۳۱۵)، وهرقدر هم‌که‌شعاع ε



شکل ۳۱۵. دنبالهٔ مختلط همگرا



شکل ۳۱۶. دنبالهٔ حقیقی همگرا

قرص کوچك انتخاب شود تعدادی متناهی از جمله‌های z_n درون قرص قرار نمی گیرند. البته، درحالت کلی، N به‌انتخاب ε بستگی دارد.

درمورد دنبالهٔ حقیقی مفهوم هندسی شرط (۱) آن است که هرجملهٔ z_n با $n > N$ بین $c - \varepsilon$ و $c + \varepsilon$ قرارمی گیرد (شکل ۳۱۶)، وحداکثر تعدادی متناهی ازجملات‌دنباله در آن فاصله قرارنمی گیرد.

مثال ۱. دنباله‌های همگرا و واگرا

دنباله‌ای‌که جملات آن به‌صورت $z_n = ۱ + ۲/n$ است عبارت است از $۳, ۲, ۵/۳, ۶/۴, ۷/۵, \ldots$. این سری همگـرا و حد آن $c = ۱$ است. در واقع، در (۱) $z_n - c + ۱ = ۲/n - ۱ = ۲/n$ و وقتی‌که $n/۲ > ۱/\varepsilon$ یا $n > ۲/\varepsilon$ داریم $۲/n < \varepsilon$. مثلا با انتخاب $\varepsilon = ۰٫۰۱$ وقتی‌که $n > ۲۰۰$ داریم $۲/n < ۰٫۰۱$.

دنباله‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۱/۴، ۳/۴، ۱/۵، ۴/۵، ۱/۶، ۵/۶، ... واگرا هستند.

دنباله‌ای‌که جملات آن به صورت زیرند:

$$z_n = ۲ - \frac{۱}{n} + i\left(۱ + \frac{۲}{n}\right)$$

عبارت است از

$$۱ + ۳i, \quad \frac{۳}{۲} + ۲i, \quad \frac{۵}{۳} + \frac{۵}{۳}i, \quad \frac{۷}{۴} + \frac{۳}{۲}i, \ \ldots,$$

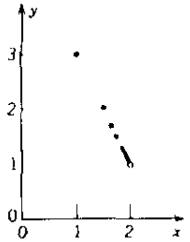
ر ك. شکل ۳۱۷. این دنباله همگراست و حد آن $c = ۲ + i$ است. در واقـع، در (۱) داریم

$$|z_n - c| = \left|\frac{۲n - ۱}{n} + i\frac{n + ۲}{n} - (۲ + i)\right| = \left|-\frac{۱}{n} + \frac{۲i}{n}\right| = \frac{\sqrt{۵}}{n}$$

و وقتی‌که $\dfrac{n}{\sqrt{۵}} > \dfrac{۱}{\varepsilon}$ یا $n > \dfrac{\sqrt{۵}}{\varepsilon} = \dfrac{۲٫۲۳۶\ldots}{\varepsilon}$ داریم $\dfrac{\sqrt{۵}}{n} < \varepsilon$.

مثلا با انتخاب $\varepsilon = ۱/۱۰۰$ وقتی‌که $n = ۲۲۴, ۲۲۵, \ldots$ داریم $|z_n - c| < \varepsilon$. ▲

درمورد دنبالهٔ مختلط $z_۱, z_۲, z_۳, \ldots$ می‌توانیم‌بنویسیم $z_n = x_n + iy_n$ ودنبالهٔ



شکل ۳۱۷. آخرین دنبالهٔ مثال ۱

قسمتهای حقیقی و دنبالهٔ قسمتهای موهومی، یعنی

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ \cdots,\qquad y_1,\ y_2,\ y_3\ \cdots$$

را درنظر بگیریم. مثلاً درمورد آخرین دنبالهٔ مثال ۱، دو دنباله عبارتند از

$$3,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{3}{2},\ \cdots,\qquad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \cdots$$

می‌بینیم که این دو دنباله به‌ترتیب به ۲ و ۱ همگراست، این اعداد قسمتهای حقیقی و موهومی حد دنبالهٔ مختلط مزبورهستند. مثالی که گفته شد نمونهٔ خوبی است و درحقیقت مصداقی ازقضیهٔ زیراست:

قضیهٔ ۱ (دنبالهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی)

دنبالهٔ $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots$ ازاعداد مختلط $z_n=x_n+iy_n (n=1,\ 2,\ \cdots)$ به $c=a+ib$ همگراست اگر وتنها اگر دنبالهٔ قسمتهای حقیقی $x_1,\ x_2,\ \cdots$ به a و دنبالهٔ قسمتهای موهومی $y_1,\ y_2,\ \cdots$ به b همگرا باشد.

اثبات. هرگاه $|z_n-c|<\varepsilon$، آنگاه $z_n=x_n+iy_n$ درون دایره‌ای به شعاع ε و به مرکز $c=a+ib$ قرار دارد به طوری‌که الزاماً (شکل ۳۱۸ الف)

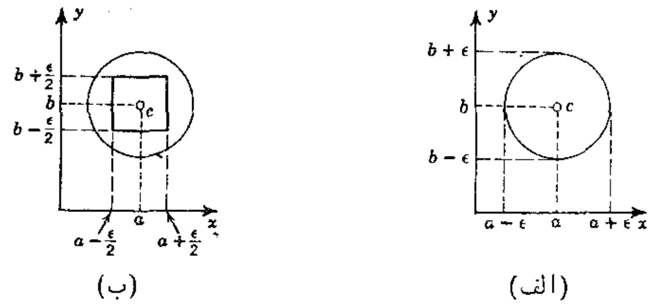
$$|x_n-a|<\varepsilon,\ \ |y_n-b|<\varepsilon.$$

بنابراین همگرایی $z_n\to c$ وقتی‌که $n\to\infty$ مستلزم همگرایی $x_n\to a$ و $y_n\to b$ است.

برعکس، هرگاه $x_n\to a$ و $y_n\to b$ وقتی‌که $n\to\infty$، در آن صورت به‌ازای $\varepsilon>0$ می‌توان N را به‌اندازه‌ای بزرگ انتخاب کرد که، به‌ازای‌هر $n>N$، داشته باشیم

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

لازمهٔ این دونامساوی آن است که $z_n=x_n+iy_n$ درمربعی به ضلع ε و به مرکز c



شکل ۳۱۸. اثبات قضیهٔ ۱

قرار داشته باشد. از این‌رو z_n باید داخل دایره‌ای به‌مرکز c و به‌شعاع ε قرار گیرد (شکل ۳۱۸ ب)، وبدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. ▲

این قضیه نشان می‌دهد که باجدا کردن قسمتهای حقیقی وقسمتهای موهومی،می‌توان بررسی همگرایی دنباله‌های مختلط را به بررسی همگرایی دنباله‌های حقیقی تبدیل کرد.

دنبالهٔ $z_1, z_2, \ldots$ را **کراندار** نامند در صورتی که عدد مثبتی مانند K وجود داشته باشد به طوری که تمام جملات دنباله در قرصی به‌شعاع K و به مرکز مبدأ واقع باشند، یعنی

$$|z_n| < K \qquad \text{به‌ازای هر } n$$

دنباله‌ای راکه کراندار نباشد **بیکران** نامند.

اغلب می‌توان بااستفاده ازاین مفهوم، واگرایی را به‌کمك قضیه سادهٔ زیر دریافت:

قضیهٔ ۲

هردنبالهٔ همگرا کراندار است. از این رو هرگاه دنباله‌ای بیکران باشد واگراست.

اثبات. فرض کنید دنبالهٔ $z_1, z_2, \ldots$ همگرا بوده، حد آن c باشد. دراین صورت می‌توان یك $\varepsilon > 0$ انتخاب‌و N متناظر باآن را طوری پیداکردکه هر z_n با $n > N$ درقرصی به شعاع ε و به مرکز c قرار گیرد و درنهایت ممکن است تعدادی متناهی جمله درقرص قرار نگیرد. واضح است که می‌توان قرصی به شعاع K و به‌مرکز مبدأ درنظر گرفت که آنقدر بزرگ باشد که قرص وآن تعداد متناهی جملات‌خارج قرص درون دایرهٔ مزبور واقع شوند. بدین ترتیب کراندار بودن دنباله ثابت می‌شود. ▲

توجه کنید که کراندار بودن برای‌همگرایی کافی‌نیست. مثلاً، دنبالهٔ ... ,۱ ,۰ ,۱ ,۰ ,۱ کراندار است اما واگراست (چرا؟) دنباله‌های بیکران ازاین قبیلند:

$$1, 2, 3, 4, \dots, \quad \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots$$

این دنباله‌ها بنا به قضیهٔ ۲ واگرا هستند.

مسائل بخش ۱۰۱۵

چندجملهٔ اول دنبالهٔ $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ را پیدا کنید و آنها را رسم نمایید درصورتی که z_n برابر است با

۱. $n/(n+3)$ ۲. $2n/(n^2+1)$ ۳. i^n/n^3

۴. $i^n/n+1$ ۵. $i^n n^2/(n+i)$ ۶. $(-1)^n+2n\pi i$

۷. چندجملهٔ اول و حد دنبالهٔ $z_1=1,\ z_2=i/2,\ z_n=iz_{n-2}z_{n-1}(n=3, 4, \dots)$ را پیدا کنید.

آیا دنباله‌های $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ که در زیرداده شده‌اندکراندارند؟ همگرا چطور؟ درمواردی که دنباله همگراست حد آن را بیابید.

۸. $z_n=i^n$ ۹. $z_n=i^n/n$ ۱۰. $z_n=in/(n+1)$

۱۱. $z_n=n^2/(n+i)$ ۱۲. $z_n=(-1)^n/n^3$ ۱۳. $z_n=e^{in\pi/4}$

۱۴. **(یکتایی حد)** نشان دهید که هرگاه دنباله‌ای همگرا باشد حد آن یکتاست.

۱۵. با روشی که درمثال ۱ به‌کاربردیم، همگرایی درمسئلهٔ ۳ را ثابت کنید.

۱۶. قضیهٔ ۱ را مورد دنباله‌ای که جملات آن با فرمول

$$z_n=(n^2-1)/(2n^2+1)+in/(n+2)$$

داده شده است به‌کاربرید.

۱۷. نشان دهید که دنبالهٔ مختلط $z_1, z_2, \dots$ کراندار است اگر وتنها اگر دو دنبالهٔ متناظر قسمتهای حقیقی وقسمتهای موهومی آن کراندار باشد.

۱۸. هرگاه دنبالهٔ $z_1, z_2, \dots$ همگرا و حد آن ۰ باشد، و هرگاه دنبالهٔ $b_1, b_2, \dots$ طوری باشد که به‌ازای‌هر n و مقدارمشخص $K>0$، $|b_n|\leqslant K|z_n|$، نشان‌دهید که دنبالهٔ $b_1, b_2, \dots$ همگرا و حد آن ۰ است.

۱۹. هرگاه $z_1, z_2, \dots$ همگرا و حد آن l، و $z_1^*, z_2^*, \dots$ همگراست و حد آن l^* باشد، نشان دهید که $z_1+z_1^*, z_2+z_2^*, \dots$ همگراست و حد آن $l+l^*$ است.

۲۰. نشان دهید که با مفروضات مسئلهٔ ۱۹ دنبالهٔ $zz_1^*,\ z_2z_2^*,\ \ldots$ همگراست و حد آن H^* است.

۲.۱۵ سری

فرض کنید $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_m,\ \ldots$ دنباله‌ای از اعداد، مختلط یا حقیقی، باشد. دراین صورت می‌توانیم سری نامتناهی یا، به‌اختصار، **سری**

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots \tag{۱}$$

را مورد بررسی قراردهیم. هر w_m **یك جمله** ازسری است. مجموع n جملهٔ اول عبارت است از

$$s_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n \tag{۲}$$

این عبارت n امین **مجموع جزئی** سری (۱) نامیده می‌شود. بدیهی‌است که هرگاه‌جملات s_n را از (۱) حذف‌کنیم عبارت باقیمانده به‌صورت زیراست:

$$R_n = w_{n+1} + w_{n+2} + w_{n+3} + \cdots \tag{۳}$$

این عبارت را **باقیماندهٔ** بعد از جمله n ام سری (۱) می‌نامند.

بدین ترتیب دنبالهٔ مجموعهای جزئی $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots$ را به سری (۱) مربوط می‌کنیم. هرگاه این دنباله همگرا باشد، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

دراین صورت سری (۱) را همگرا می‌نامیم، عدد s **مقدار** یا **مجموع** نامیده می‌شود و می‌توان نوشت

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + \cdots$$

هرگاه دنبالهٔ مجموعهای جزئی واگرا باشد، سری (۱) را واگرا نامند.

اگر سری (۱) همگرا و مقدارش s باشد دراین‌صورت

$$R_n = s - s_n \quad \text{یا} \quad s = s_n + R_n \tag{۴}$$

و از تعریف همگرایی دنباله، نتیجه می‌شود که با انتخاب n بزرگ می‌توانیم $|R_n|$ را هرقدرکه بخواهیم کوچك کنیم. دربسیاری موارد پیدا کردن مجموع s یك سری همگرا غیرممکن است. بنابراین برای مقاصد محاسبه‌ای باید مجموع جزئی s_n را به عنوان تقریبهایی از s به‌کار ببریم، در این صورت با تخمین باقیماندهٔ R_n می‌توانیم به میزان دقت این تقریب واقف گردیم.

مثال ۱. سریهای همگرا و واگرا

سری

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

همگرا ومقدارش ۱ است، زیرا

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}, \quad \lim_{n\to\infty} s_n=1$$

سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} m=1+2+3+\cdots$$

واگراست. سری

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m=1-1+1-+\cdots$$

واگراست زیرا

$$s_0=1, \quad s_1=1-1=0, \quad s_2=1-1+1=1, \text{ غیره}$$

و دنبالهٔ $1, 0, 1, 0, \ldots$ واگراست.

سری همساز

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

واگراست. در واقع

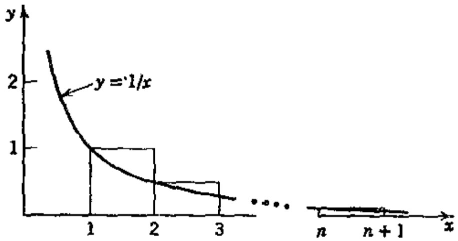
$$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

و s_n برابر است با مجموع سطوح n مستطیل شکل ۳۱۹. این‌سطح بزرگتراز سطح A_n، سطح زیرمنحنی $y=1/x$ است، و

$$A_n=\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)\to\infty \quad \text{وقتی که } n\to\infty،$$

چون $s_n > A_n$، نتیجه می‌شود وقتی که $n\to\infty$، $s_n\to\infty$ یعنی سری واگراست. ▲

از قضیهٔ ۱ بخش قبل قضیهٔ متناظری درمورد سریها به دست می‌آوریم:



شکل ۳۱۹. مثال ۱

قضیهٔ ۱ (سری قسمتهای حقیقی و موهومی)

فرض کنید $w_m = u_m + iv_m$. دراین صورت سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

همگراست و مقدارش برابر $s = a + ib$ است اگر و تنها اگر سری قسمتهای حقیقی و سری قسمتهای موهومی، یعنی

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = u_1 + u_2 + \cdots , \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_m = v_1 + v_2 + \cdots$$

همگرا باشند ومقادیر آنها به ترتیب a و b باشد.

می‌بینیم که این قضیه رابطه‌ای بین سریهای حقیقی وسریهای مختلط برقرار می کند. رابطهٔ مهمتری وجود داردکه پایهٔ آن مفهوم زیر است.

سری $w_1 + w_2 + \cdots$ را **همگرای مطلق** نامند هرگاه سری متناظرش

$$\sum_{m=1}^{\infty} |w_m| = |w_1| + |w_2| + \cdots \qquad (5)$$

(که جملات آن حقیقی وغیرمنفی هستند) همگرا باشد.

هرگاه سری $w_1 + w_2 + \cdots$ همگرا باشد اما (۵) واگرا باشد، درآن صورت سری را، به‌طور دقیقتر، همگرای شرطی نامند.

مثال ۲. سریهای همگرای مطلق و همگرای شرطی

سری

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + - \cdots$$

همگرای مطلق است زیرا سری (۵) متناظرش همگراست (ر. ك. مثال ۱). سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

فقط همگرای شرطی است، زیرا خود سری همگراست (بنابه آزمون مشهور لایبنیتس در مورد سری حقیقی، که دربخش ۴.۱۵ مجدداً بررسی می‌شود)، اما سری (۵) متناظرش سری همساز است که واگراست (ر.ك. مثال ۱). ▲

خاصیت زیر درمورد سری همگرای مطلق تقریباً بدیهی است.

قضیهٔ ۲.

هرگاه سری $w_1+w_2+\cdots$ همگرای مطلق باشد، همگراست.

درآخر بخش بعد بـا استفاده از اصل همگرایی کوشی این قضیه را بـه طور ساده اثبات می‌کنیم.

بالاخره قضیهٔ سادهٔ دیگری را بیان می‌کنیم که اغلب مفید واقع می‌شود.

قضیهٔ ۳

هرگاه سری $w_1+w_2+\cdots$ همگرا باشد، درآن صورت

$$\lim_{m\to\infty} w_m = 0 \tag{۶}$$

از این‌رو هر سریی که در (۶) صدق نکند واگراست.

اثبات. فرض کنید $w_1+w_2+\cdots$ همگرا بوده، مجموع آن s باشد. آنگاه

$$w_{n+1}=s_{n+1}-s_n$$

و

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=\lim_{n\to\infty}s_{n+1}-\lim s_n=s-s=0. \quad ▲$$

خوب توجه کنید که (۶) فقط شرط لازم همگرایی است اما کافی نیست. مثلاً سری همساز مثال ۱ در (۶) صدق می‌کند اما واگراست. دومین وسومین سری درمثال ۱ در (۶) صدق نمی‌کنند وبنابراین واگرا هستند.

۳.۱۵ اصل همگرایی کوشی در مورد سریها و دنباله‌ها

قبل‌ازآنکه یك‌سری یا دنباله‌را مورداستفاده قراردهیم باید دریابیم که همگراست یاخیر[1]. استفادهٔ مستقیم از تعریف همگرایی ممکن است دشوار باشد زیرا دربیشتر موارد دنباله یا

۱. به‌خوانندگانی که علاقه‌شان بیشترمتوجه توابع تحلیلی مختلط است ودرضمن مطالعاتی در زمینهٔ سریها و دنباله‌های حقیقی دارند، توصیه می‌کنیم که مقدمهٔ این فصل (فصل ۱۵) درمورد ترتیب موضوعات را دوباره بخوانند. چنین خواننده‌ای می‌تواند بلافاصله فصل ۱۶ راکه‌دربارهٔ سری توانی، سری تیلور وسری لورن است شروع کند ودرمواقع‌لزوم بخشهای ۳.۱۵–۶.۱۵ را به عنوان مرجع مورد استفاده قرار دهد.

سری را دردست نداریم. اصل همگرایی کوشی براین دشواری فایق می‌آید چه این اصل معیاری برای قضاوت دربارهٔ همگرایی به دست می‌دهد که درآن به دانستن حد نیازی نیست.

در اثبات اصل همگرایی کوشی از قضیهٔ مشهور بولتسانو ـ وایرشتراس* (قضیهٔ ۱ زیر) استفاده خواهیم کرد، برای بیان این قضیه به مفهوم زیر که موارد استفادهٔ دیگری هم دارد نیازمندیم.

نقطهٔ a را **نقطهٔ حدی** دنبالهٔ $z_1, z_2, \ldots$ نامند اگر، به‌ازای‌یك $\varepsilon > 0$ (هرقدر هم کوچك باشد) داشته باشیم

$$\text{به‌ازای تعدادی نامتناهی } n \qquad |z_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

معنی هندسی این گفته آن است که تعدادی نامتناهی ازجملات دنباله درون دایره‌ای به‌شعاع ε و به‌مرکز a قراردارند مستقل ازاینکه ε چقدر کوچك انتخاب شود.

توجه کنید که اگر (۱) صادق باشد هنوز ممکن است تعدادی نامتناهی جمله وجود داشته باشند که داخل دایره قرارنگیرند و دنباله همگرا نباشد. درحقیقت هر گاه دنباله‌ای همگرا باشد حد آن یك نقطهٔ حدی است (چرا؟) که درعین‌حال نقطهٔ حدی دنبالــه است وهر گاه دنباله‌ای بیش ازیك نقطهٔ حدی داشته باشد واگراست.

به‌علاوه توجه کنید هرعددی که بینهایت بار دردنباله تکرارشود، بنا به تعریف، نقطهٔ حدی دنباله است.

با چند مثال مطلب را روشن می‌کنیم. یادآور می‌شویم که کرانداری در اواخر بخش ۱.۱۵ تعریف شده است

مثال ۱. نقاط حدی، همگرایی، کرانداری

دنباله	نقاط حدی در	همگرایی یا واگرایی	کراندار یا بی‌کران
$1, 2, 3, \ldots$	(هیچ‌جا)	واگرا	بی‌کران
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	۱	همگرا	کراندار
$\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots$	۰	واگرا	بی‌کران
$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \ldots$	۰ و ۱	واگرا	کراندار

* Bolzano - Weierstrass

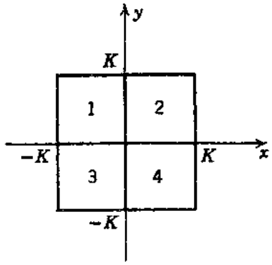
مشاهده می‌کنیم که دو دنبالهٔ کرانداری که در این مثال آمده‌اند نقطهٔ حدی دارند. این مثال اهمیت قضیهٔ زیر را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱ (بولتسانو[1] و وایرشتراس[2])

دنبالهٔ نامتناهی کراندار $z_1, z_2, z_3, \ldots$ در صفحهٔ مختلط حداقل یك نقطه حدی دارد.

اثبات. واضح است که ما به دو شرط زیر نیاز داریم. نخست آنکه دنبالهٔ متناهی نمی‌تواند نقطهٔ حدی داشته باشد، و در ثانی دنبالهٔ $\ldots, 3, 2, 1$ که نامتناهی است ولی کراندار نیست نقطهٔ حدی ندارد. برای اثبات قضیه دنبالهٔ نامتناهی کراندار $z_1, z_2, \ldots$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم K طوری باشد که به ازای هر n ی، چون دنباله نامتناهی است، یکی از این اعداد، مثلاً z باید بینهایت بار در دنباله تکرار شود و، بنا به تعریف، این عدد یك نقطهٔ حدی دنباله است.

اکنون حالتی را که در آن تعداد جملات متفاوت دنباله نامتناهی است درنظر می‌گیریم. مربع بزرگ Q_0 را که دربر گیرندهٔ تمام z_n هاست رسم می‌کنیم (شکل ۳۲۰). Q_0 را به ۴ مربع مساوی تقسیم می‌کنیم. بدیهی است که اقلاً یکی از این مربعها (هرمربع را با تمامی کرانه‌اش درنظر می‌گیریم). باید تعدادی نامتناهی از جملات دنباله را دربرداشته باشد. از بین مربعهایی که چنین خاصیتی دارند آن را که کوچکترین شماره (۱، ۲، ۳ یا ۴) را دارد با Q_1 نمایش می‌دهیم. این اولین مرحله است. درمرحلهٔ بعد Q_1 را به چهار مربع مساوی تقسیم کرده و مربعی مانند Q_2 به روش فوق ازمیان آنها انتخاب می‌کنیم و کار را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. از اینجا یك دنبالهٔ نامتناهی از مربعهای $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots$ به دست می‌آید با این خاصیت که وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند Q_n به سمت صفر میل می‌کند، و با این خاصیت که Q_m دربرگیرندهٔ تمام Q_n های با $n > m$



شکل ۳۲۰. اثبات قضیهٔ ۱

۱. برنهارد بولتسانو Bernhard Bolzano (۱۸۴۸ــ۱۷۸۱) ریاضیدان آلمانی و یکی از پیشگامان مطالعهٔ مجموعه‌های نقطه‌ای.

۲. ر.ك. پانوشت ۸ بخش ۵.۱۲

است. به سادگی معلوم می‌شود عددی که به‌تمامی این مربعها تعلق دارد[۱]، و آن را $z=a$ می‌گیریم، یکی از نقاط حدی دنباله است. درحقیقت، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توانیم N را طوری بزرگ بگیریم که ضلع مربع Q_N از ε کوچکتر باشد، و از آن‌جاکه Q_N شامل تعدادی نامتناهی z_n است، به‌ازای تعدادی نامتناهی n داریم $|z_n - a| < \varepsilon$؛ و برهان کامل است. ▲

اکنون همه چیز برای بیان قضیهٔ اصلی این بخش آماده است.

قضیهٔ ۲ (اصل همگرایی کوشی درمورد دنباله‌ها)

دنبالهٔ $z_1, z_2, z_3, \ldots$ همگراست اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد مثبت ε بتوان عددی مانند N (که ممکن است به ε بستگی داشته باشد) یافت که

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \qquad \text{وقتی که } m > N \text{، } n > N \tag{۲}$$

(یعنی، فاصلهٔ هر دو جملهٔ z_n و z_m با $n > N$ و $m > N$ ازیکدیگر باید کمتر از ε باشد).

اثبات. (الف) فرض کنید دنبالهٔ $z_1, z_2, \ldots$ همگرابوده حدآن c باشد. دراین‌صورت، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض می‌توان N ی یافت که

$$|z_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{به‌ازای هر } n > N$$

از این رو، وقتی که $n > N, m > N$، بنابه نامساوی مثلثی داریم

$$|z_m - z_n| = |(z_m - c) - (z_n - c)| \leqslant |z_m - c| + |z_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

که نشان می‌دهد اگردنباله همگرا باشد، آنگاه (۲) صادق است.

(ب) بالعکس، دنباله‌ای مانند $z_1, z_2, \ldots$ را که (۲) درمورد آن صادق‌است در نظر بگیرید. نخست نشان می‌دهیم که این دنباله کراندار است. یک ε و یک $n = n_0 > N$ مشخص برای (۲) انتخاب می‌کنیم. دراین صورت بنابه (۲) هر z_m ی با $m > N$ در قرصی به شعاع ε و به مرکز z_{n_0} قرار می‌گیرد و فقط تعدادی متناهی از جملات دنباله درون قرص قرارنمی گیرند. واضح است که می‌توان دایره‌ای به‌مرکز مبدأ و به قدری بزرگ درنظر گرفت که هم‌قرص وهم z_n ها داخل آن واقع شوند. این نشان‌می‌دهد

---

۱. این واقعیت که چنین عدد یکتای $z=a$ یی وجود دارد بدیهی به نظرمی‌رسد، امادرحقیقت این نتیجهٔ یکی از اصول موضوع دستگاه اعداد حقیقی؛ به‌نام اصل موضوع کانتور ـ ددکیند (Cantor - Dedekind) است. ر. ک. پانوشت بخش بعد.

که دنباله کراندار است و از قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس نتیجه می‌گیریم کـه این دنباله حداقل یك نقطه حدی ، مثلا L، دارد.

نشان می‌دهیم که دنباله همگراست وحد آن L است. بنابه‌تعریف نقطهٔ حد، به‌ازای یك $\varepsilon > 0$ مفروض، به‌ازای تعدادی نامتناهی n داریم $|z_n - L| < \varepsilon/2$. چون(۲) به ازای هر $\varepsilon > 0$ صادق است، به‌ازای یك $\varepsilon > 0$ مفروض می‌توانیم N^* را به‌گونه‌ای پیدا کنیم که به‌ازای $m > N^*$ ، $n > N^*$ داشته باشیم $|z_m - z_n| < \varepsilon/2$. $n > N^*$ مشخصی را انتخاب می‌کنیم بـه طوری کـه $|z_n - L| < \varepsilon/2$ ، و m را عدد صحیحی ، بزرگتر از N^* می‌گیریم. دراین صورت بنابه نامساوی مثلثی

$$|z_m - L| = |(z_m - z_n) + (z_n - L)| \leqslant |z_m - z_n| + |z_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

یعنی، به‌ازای تمام مقادیر $m > N^*$ داریم $|z_m - L| < \varepsilon$؛ وبنابه تعریف این بدان‌معنی است که دنباله همگراست وحد آن L است. بدینسان قضیه ثابت می‌شود.

درمورد سری $w_1 + w_2 + \dots$ می‌توانیم قضیهٔ بالارا برای دنبالهٔ مجموعهای جزئی s_n به‌کار بریم. دراین صورت نامساوی (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \qquad (m > N,\ n > N)$$

یا هرگاه قراردهیم $m = n + p$

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \quad (n > N,\ p = 1, 2, \dots)$$

حال بنابه تعریف مجموع جزئی

$$s_{n+p} - s_n = w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_{n+p}$$

واین اثبات قضیهٔ اساسی زیر است:

قضیهٔ ۳ (اصل همگرایی‌کوشی درمورد سریها)

سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگراست اگر وتنها اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض (هرچندکوچك) بتوان N را (که درحالت کلی به ε بستگی دارد) طوری پیدا کرد که

$$|w_{n+1} + w_{n+2} + \dots + w_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{به ازای هر } n > N \text{ و } p = 1, 2, \dots$$

به‌عنوان اولین کاربرد این قضیهٔ مهم به‌اثبات قضیه‌ای کـه قبلا بیان‌کرده‌ایم (قضیهٔ ۲ بخش قبل) می‌پردازیم:

قضیهٔ ۴

اگر سری $w_1 + w_2 + \dots$ همگرای مطلق باشد، همگراست.

اثبات. بنا به تعمیم نامساوی مثلثی (۱۱) بخش ۲.۱۲ داریم

$$|w_{n+1}+\cdots+w_{n+p}| \leqslant |w_{n+1}|+|w_{n+2}|+\cdots+|w_{n+p}|. \qquad (3)$$

چون، بنا به فرض، سری $|w_1|+|w_2|+\cdots$ همگراست، از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که سمت راست (۳) به ازای هر $n>N$ (که N به اندازهٔ کافی بزرگ است) و $p=1, 2, \ldots$ از هر $\varepsilon>0$ی کوچکتر می‌شود. درنتیجه این حکم درمورد سمت چپ (۳) نیز صادق است، و، بنا به همان قضیه، همگرایی سری $w_1+w_2+\cdots$ ثابت می‌شود. ▲

مسائل بخش ۳.۱۵

آیا دنبالهٔ $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ زیرکراندار است؟ همگراچطور؟ نقاط حدی را بیابید.

۱. $z_n=(2i)^n$ ۲. $z_n=1+i^n$ ۳. $z_n=(-1)^n+i/n$

۴. $z_n=e^{in\pi/2}$ ۵. $z_n=i^n\cos n\pi$ ۶. $z_n=i^n\cosh n\pi$

۷. $z_n=(1-i)^n$ ۸. $z_n=(1+i)^{2n}/n$ ۹. $z_n=(3+4i)^n/n!$

۱۰. $z_n=\pi i+\sin n\pi$ ۱۱. $z_n=(\cos n\pi)/\sqrt{n}$ ۱۲. $z_n=i^n n^2$

۱۳. $z_1=1,\ z_2=2,\ z_3=3,\ z_n=z_{n-3}-z_{n-2}+z_{n-1}(n=4, 5, \cdots)$

۱۴. $z_1=1/3,\ z_2=1/4,\ z_n=z_{n-2}/z_{n-1}(n=3, 4, \cdots)$

۱۵. $z_1=1,\ z_2=i,\ z_n=z_{n-2}z_{n-1}(n=3, 4, \cdots)$

۴.۱۵ دنبالهٔ حقیقی یکنوا. آزمون لایبنیتس درمورد سریهای حقیقی

این بخش شامل دوقضیه دربارهٔ سریها و دنبالەهای حقیقی است که مشابه آنها درمورد سریها ودنبالەهای مختلط وجود ندارد. هردوقضیه ازنظر عملی مورد توجه هستند.

دنبالهٔ حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ را **صعودی‌یکنوا** نامند اگر

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots.$$

به همین ترتیب دنباله را **نزولی یکنوا** نامند اگر

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots.$$

دنباله‌ای که صعودی یکنوا یا نزولی یکنوا باشد **دنبالهٔ یکنوا** نامیده می‌شود.

مثلاً دنبالهٔ واگرای ... ,۳ ,۲ ,۱ یکنوا و بی‌کران است. دنبالهٔ همگرای ... ,۳/۴ ,۲/۳ ,۱/۲ یکنوا و کراندار است و ثابت خواهیم کرد که این دو خاصیت برای همگرایی کافی است:

قضیهٔ ۱ (همگرایی دنبالهٔ حقیقی)

هرگاه یک دنبالهٔ حقیقی کراندار و یکنوا باشد، همگراست.

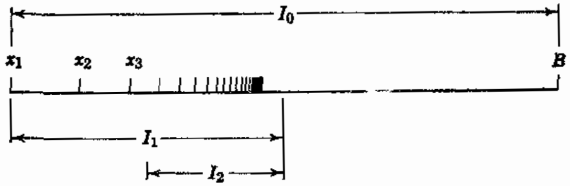
اثبات. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots$ یک دنبالهٔ صعودی یکنوای کراندار است. در این صورت جملات دنباله از عددی مانند B کوچکترند و چون به‌ازای تمام nها $x_1 \leqslant x_n$ این جملات در بازهٔ $x_1 \leqslant x_n \leqslant B$ که آن را با I_0 نشان می‌دهیم قرار می‌گیرند. I_0 را نصف می‌کنیم یعنی آن را به‌دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. اگر نیمهٔ راست (به انضمام دو نقطهٔ انتهاییش) جملات دنباله را در برداشته باشد آن را با I_1 نمایش می‌دهیم. اگر نیمهٔ راست شامل جملات دنباله نباشد، در این صورت نیمهٔ چپ I_0 (به انضمام دو نقطهٔ انتهاییش) را I_1 می‌نامیم. این مرحلهٔ نخست است.

در مرحلهٔ دوم I_1 را نصف می‌کنیم و یکی از نیمه‌ها را به‌روش بالا انتخاب کرده و آن را I_2 می‌نامیم و کار را به همین شکل دنبال می‌کنیم (شکل ۳۲۱).

بدین ترتیب بازه‌های کوچک و کوچکتر $I_0, I_1, I_2, \ldots$ را که خواص زیر را دارند به‌دست می‌آوریم. به‌ازای $n > m$ هر I_m دربرگیرندهٔ تمام I_n ها است. هیچ جملهٔ دنباله در سمت راست I_m قرار ندارد و چون دنباله صعودی یکنواست، تمام x_nهایی که n آنها از عددی مانند N بزرگتر است در I_m قرار می‌گیرند؛ البته، در حالت کلی N به m بستگی دارد. وقتی m به‌سمت بینهایت میل می‌کند طول I_m به‌سمت صفر میل می‌کند. از این‌رو دقیقاً یک عدد، مانند L، وجود دارد که در همهٔ این بازه‌ها قرار می‌گیرد[1] و حال به سادگی می‌توان ثابت کرد که دنباله همگراست و حد آن L است.

در واقع به ازای یک $\varepsilon > 0$ مفروض، m را طوری انتخاب می‌کنیم که طول I_m از ε کوچکتر باشد. در این صورت L و تمام x_n های با $n > N(m)$ در I_m قرار می‌گیرند و بنابراین به ازای همهٔ این n ها داریم $|x_n - L| < \varepsilon$. بدین ترتیب اثبات

۱. این حکم بدیهی به نظر می‌رسد اما در واقع چنین نیست؛ آن را می‌توان اصلی از دستگاه اعداد حقیقی به صورت زیر در نظر گرفت. فرض کنید $J_1, J_2, \ldots$ بازه‌های بسته‌ای باشند که هر J_mی شامل تمام J_nها با $n > m$ باشد، و وقتی که m به سمت بینهایت میل می‌کند اندازه‌های J_m به سمت صفر میل کنند، در این صورت دقیقاً یک عدد حقیقی یافت می‌شود که در تمام آن بازه‌ها وجود دارد. این اصل را به یاد ریاضیدان آلمانی **گئورگ کانتور** Georg Cantor (۱۸۴۵-۱۹۱۸)، واضع نظریهٔ گروه، و **ریچارد ددکیند** Richard Dedekind (۱۸۳۱-۱۹۱۶) **اصل کانتور- ددکیند** می‌نامند. برای توضیح بیشتر مرجع [A۲] ضمیمهٔ۱ را ببینید. (بازهٔ I را **بسته** نامند هرگاه دوسرش نقاطی متعلق به I محسوب شوند. آن را **باز** می‌نامند درصورتی که دوسرش نقاطی متعلق به I نباشند.)



شکل ۳۲۱. اثبات قضیهٔ ۱

قضیه در مورد دنبالـهٔ صعودی تمام می‌شود . درمورد دنبالهٔ نزولی اثبات به همین نحو انجام می‌شود جزآنکه هنگام ساختن بازه‌ها درموارد لزوم جای کلمات «چپ» و«راست» باهم عوض می‌شود. ▲

حال به اثبات قضیهٔ دیگرکه ازنـظر عملی مفید است می‌پردازیم. این قضیه دربارهٔ سری حقیقی‌است‌که علامت جملاتش یك‌درمیان تغییرمی‌کند وازنظرقدرمطلق نزولی‌است. این قضیه شرایط‌کافی همگرایی را بیان می‌کند و برآوردی از باقیمانده به‌دست می‌دهد .

قضیهٔ ۲ (آزمون لایبنیتس درمورد سریهای حقیقی)

فرض‌کنید $u_۱, u_۲, \dots$ حقیقی هستند و

(الف) $u_۱ \geqslant u_۲ \geqslant u_۳ \geqslant \dots$ ، (ب) $\lim\limits_{m \to \infty} u_m = ۰$ (۱)

دراین صورت سری

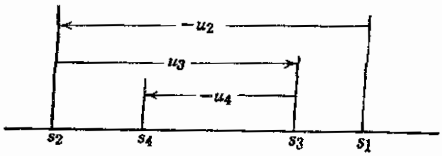
$$u_۱ - u_۲ + u_۳ - u_۴ + - \dots$$

همگراست و برای باقیماندهٔ R_n بعد ازجملهٔ nام برآورد زیر را داریم

$$|R_n| \leqslant u_{n+۱} \qquad (۲)$$

اثبات . s_n را nامین مجموع جزئی سری درنظربگیرید. دراین صورت ، بنا به (۱ الف)

$$s_۱ = u_۱ \,, \qquad s_۲ = u_۱ - u_۲ \leqslant s_۱ \,,$$
$$s_۳ = s_۲ + u_۳ \geqslant s_۲ \,, \quad s_۳ = s_۱ - (u_۲ - u_۳) \leqslant s_۱ \,,$$



شکل ۳۲۲. اثبات قضیهٔ ۲ (آزمون لایبنیتس)

بنابراین $s_۱ \geqslant s_۳ \geqslant s_۲$. با این روش نتیجه می‌گیریم (شکل ۳۲۲)

$$s_۱ \geqslant s_۳ \geqslant s_۵ \geqslant \cdots \geqslant s_۶ \geqslant s_۴ \geqslant s_۲ \qquad (۳)$$

کـه نشان می‌دهد مجموعهای جزئی فـرد تشکیل یک دنبالهٔ یکنوای کراندار می‌دهند و مجموعهای جزئی زوج نیز همینطور. ازاین رو، بنا به قضیهٔ ۱، هردو دنباله همگرا هستند، یعنی

$$\lim_{n \to \infty} s_{۲n+۱} = s, \quad \lim_{n \to \infty} s_{۲n} = s^*$$

حال چون $s_{۲n+۱} - s_{۲n} = u_{۲n+۱}$ ، (۱ب) ایجاب می‌کند که

$$s - s^* = \lim_{n \to \infty} s_{۲n+۱} - \lim_{n \to \infty} s_{۲n} = \lim_{n \leftarrow \infty} (s_{۲n+۱} - s_{۲n}) = \lim_{n \to \infty} u_{۲n+۱} = ۰$$

از این‌رو $s = s^*$ وسری همگراست و مجموع آن s است.

حال برآورد (۲) درمورد باقیمانده را ثابت می‌کنیم. چون $s_n \to s$ ، از(۳)نتیجه می‌شود که

$$s_{۲n+۱} \geqslant s \geqslant s_{۲n} \quad \text{و همچنین} \quad s_{۲n+۱} \geqslant s \geqslant s_{۲n}$$

با تفریق $s_{۲n}$ و $s_{۲n-۱}$ ، به‌ترتیب، به‌دست می‌آوریم

$$s_{۲n+۱} - s_{۲n} \geqslant s - s_{۲n} \geqslant ۰, \quad ۰ \geqslant s - s_{۲n-۱} \geqslant s_{۲n} - s_{۲n-۱}.$$

اولین عبارت این نامساویها برابر $u_{۲n+۱}$ وآخـرین عبارت آنها برابر $-u_{۲n}$ است و عبارتهایی کـه بین دوعلامت قرار دارند بـاقیماندههای $R_{۲n}$ و $R_{۲n-۱}$ هستند. بنابراین می‌توان نامساویها را به‌صورت

$$u_{۲n-۱} \geqslant R_{۲n} \geqslant ۰, \quad ۰ \geqslant R_{۲n-۱} \geqslant -u_{۲n}$$

نوشت ومی‌بینیم که این نامساویها (۲) را نتیجه می‌دهند.

مسائل بخش ۴۰۱۵

دنباله‌های حقیقی زیرکراندارند یا نه؟ همگرا هستند یا نه؟ یکنوا هستند یا نه؟ نقاط حدی هردنباله را تعیین‌کنید.

۱. $۱, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \cdots$

۲. $۲, -\frac{۱}{۲}, ۳, -\frac{۱}{۳}, ۴, -\frac{۱}{۴}, \cdots$

۳. $۲, ۲^۲, ۲^۳, ۲^۴, \cdots$

۴. $۱, \sqrt{۲}, \sqrt[۳]{۳}, \sqrt[۴]{۴}, \cdots$

۵. $\frac{۷}{۶}, \frac{۱۱}{۶}, \frac{۸}{۷}, \frac{۱۳}{۷}, \frac{۹}{۸}, \frac{۱۵}{۸}, \cdots$

۶. $\ln ۱, \ln ۲, \ln ۳, \cdots$

۷. $۴/۱!, ۴^۲/۲!, ۴^۳/۳!, \cdots$

۸. $a, a^۲, a^۳, \cdots$

۹. $c, ۲c^۲, ۳c^۳, \cdots (|c| < ۱)$

۱۰. $c, ۲^۲c^۲, ۳^۲c^۳, ۴^۲c^۴, \cdots (|c| < ۱)$

سریهای زیرهمگرا هستند یا واگرا؟

۱۱. $۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۲۷} + - \cdots$

۱۲. $۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۴}} + - \cdots$

۱۳. $\frac{۳}{۲} - \frac{۴}{۳} + \frac{۵}{۴} - \frac{۶}{۵} + - \cdots$

۱۴. $\frac{۱}{\ln ۲} + \frac{۱}{\ln ۳} + \frac{۱}{\ln ۴} + \cdots$

نشان دهیدکه سریهای زیرهمگرا هستند. برای محاسبهٔ مجموع s باخطایی کمتر از ۰٫۰۱ چند جمله لازم است؟

۱۵. $s = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} - = \cdots$

۱۶. $s = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۴} - + \cdots$

۱۷. $s = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۲۷} + - \cdots$

۱۸. $s = ۱ - ۱ + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - + \cdots$

۱۹. $s = ۱ - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۵!} - \frac{۱}{۷!} + - \cdots$

۲۰. $s = ۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۶!} + - \cdots$

۵٫۱۵ آزمونهای همگرایی و واگرایی درمورد سریها

قبل ازآنکه یك سری نامتناهی را درمحاسبات یا برای مقاصد دیگر مورد استفاده قرار دهیم باید بدانیم‌که آن سری همگراست یا خیر. در ریاضیات مهندسی در اغلب موارد می‌توان بااستفاده ازیکی از آزمونهای‌گوناگونی که برای همگرایی و واگرایی وجود دارد به‌این سؤال جواب داد. به همین دلیل این آزمونها ازنظر عملی بسیار جالب توجه هستند.

یك آزمون سادهٔ همگرایی (قضیهٔ ۳ بخش ۲٫۱۵) وآزمون لایبنیتس درمورد سری حقیقی‌را قبلا شرح دادیم. قضیهٔ زیرمعیارهای مختلف همگرایی رانشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱ (آزمون مقایسه)

هرگاه سری $w_۱ + w_۲ + \cdots$ داده شده باشد و بتوانیم سری همگرای $b_۱ + b_۲ + \cdots$ را

که جملات آن حقیقی غیرمنفی هستند طوری بیابیم که

به ازای $n=1,2,\cdots$ $\quad |w_n|\leqslant b_n$ (۱)

در این صورت سری مفروض همگرای مطلق است.

اثبات. چون سری $b_1+b_2+\cdots$ همگراست، ازقضیهٔ ۳ بخش ۳.۱۵ نتیجه می‌شود که به ازای هر $\varepsilon>0$ می‌توان یك N پیدا کرد به طوری که

$$b_{n+1}\cdots+b_{n+p}<\varepsilon \qquad p=1,2,\ldots \text{ و } n>N \text{ به ازای هر}$$

از این رابطه و (۱) نتیجه می‌شود که به‌ازای همان n و p ها

$$|w_{n+1}|+\cdots+|w_{n+p}|\leqslant b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon$$

درنتیجه ازقضیهٔ ۳ بخش ۳.۱۵ نتیجه می‌شود که سری $|w_1|+|w_2|+\cdots$ همگراست و سری مفروض همگرای مطلق است. ▲

برای اینکه بتوانیم ازقضیهٔ ۱ دوآزمون مهم را نتیجه بگیریم ابتدا ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۲ (سری هندسی)

سری هندسی

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m=1+q+q^2+\cdots$$

همگراست و مجموع آن $1/(1-q)$ است وقتی که $|q|<1$، و واگراست وقتی که $|q|\geqslant 1$.

اثبات. وقتی که $|q|\geqslant 1$، درآن صورت $|q^n|\geqslant 1$ و واگرایی سری ازقضیهٔ ۳ بخش ۲.۱۵ نتیجه می‌شود. حال فرض کنید $|q|<1$. n امین مجموع جزئی عبارت است از

$$s_n=1+q+\cdots+q^n$$

و ازاین‌رو

$$qs_n=q+\cdots+q^n+q^{n+1}$$

ازتفریق دورابطه به‌دست می‌آوریم

$$s_n-qs_n=(1-q)s_n=1-q^{n+1}$$

بقیهٔ جملات دو به دو حذف می‌شوند. حال $1-q\neq 0$ زیرا $q\neq 1$ ومی‌توان از رابطهٔ فوق s_n را پیدا کرد:

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \qquad (2)$$

چون $|q| < 1$، وقتی $n \to \infty$ جملهٔ آخر به‌سمت صفرمیل می‌کند. از این‌روسری همگرا ومقدار آن $1/(1-q)$ است. ▲

اکنون از قضایای ۱ و ۲ دو آزمون مهم ، آزمون نسبت و آزمون ریشه ، را نتیجه بگیریم.

قضیهٔ ۳ (آزمون نسبت)

سری زیررا درنظر بگیرید:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

فرض‌کنیدکه به ازای $n = 1, 2, \ldots$ ، $w_n \neq 0$ و دنبالهٔ نسبتهای

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| \qquad n = 1, 2, \cdots$$

همگرا بوده حدش L باشد. دراین صورت سری داده شده

همگرای مطلق است اگر $L < 1$، و

واگراست اگر $L > 1$.

(اگر $L = 1$ ، این آزمون نتیجه‌ای ندارد).

اثبات. بنا به فرض

$$k_n = \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| \text{ که در آن } \lim_{n\to\infty} k_n = L$$

واضح‌است که k_n و L حقیقی هستند. بنا به‌تعریف حد، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض می‌توان یك N یافت طوری که هر k_n با $n > N$ بین $L - \varepsilon$ و $L + \varepsilon$ قرار گیرد، یعنی

$$k_n < L + \varepsilon \text{ (الف)} \qquad k_n > L - \varepsilon \text{ (ب)} \qquad (n > N). \qquad (3)$$

نخست حالت $L < 1$ را بررسی می‌کنیم. می‌نویسیم $L + \varepsilon = q$ و ε را $(1-L)/2$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت $\varepsilon > 0$ و (۳ الف) به صورت زیر در می‌آید:

$$k_n < q = L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2}$$

چون $L < 1$، داریم $q < 1$. حال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}&|w_{N+1}|+|w_{N+2}|+|w_{N+3}|+\cdots\\ &=|w_{N+1}|\left(1+\left|\frac{w_{N+2}}{w_{N+1}}\right|+\left|\frac{w_{N+3}}{w_{N+2}}\right|\left|\frac{w_{N+2}}{w_{N+1}}\right|+\cdots\right)\\ &=|w_{N+1}|(1+k_{N+1}+k_{N+2}k_{N+1}+k_{N+3}k_{N+2}k_{N+1}+\cdots\end{aligned} \qquad (4)$$

وچون $k_n < q < 1$، هرجملهٔ این سری ازجملهٔ متناظرش درسری هندسی

$$|w_{N+1}|(1+q+q^2+q^3+\cdots)$$

کوچکتراست. بنابه قضیهٔ ۲ این سری همگراست زیرا $q < 1$. ازقضیهٔ ۱ نتیجه‌می‌شود که سری (۴) همگراست. ازاین رو سری $|w_1|+|w_2|+\cdots$ همگراست‌ودرنتیجه‌سری $w_1+w_2+\cdots$ همگرای مطلق است.

حال مورد $L > 1$ را بررسی می‌کنیم. ε را برابر $(L-1)/2$ انتخاب‌می‌کنیم. واضح است که $\varepsilon > 0$ و (۳ ب) را می‌توان نوشت

$$k_n > L-\varepsilon=\frac{1+L}{2} > 1 \qquad (n > N)$$

یعنی،

$$|w_{n+1}| > |w_n| \quad \text{یا} \quad k_n=\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| > 1 \qquad (n > N).$$

آخرین‌نامساوی نشان می‌دهد جمله‌های سری صعودی‌است. ازاین نامساوی و قضیهٔ۳ بخش ۲.۱۵ واگرایی سری نتیجه می‌شود.

درمورد $L=1$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد درنتیجه این آزمون ناموفق است. برای روشن شدن این موضوع مثالهایی می‌آوریم. سری همساز (مثال ۱ بخش ۲.۱۵)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

واگراست و درآن

وقتی که $n\to\infty$، $L=1$ $\quad \dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{n}{n+1}$

درحالی که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots \qquad (5)$$

که همگراست و در آن

وقتی که $n \to \infty$، $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to L = 1$

همگرایی (۵) را می‌توان به ترتیب زیر نشان داد. nامین مجموع جزئی عبارت است از

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

بدیهی است $s_n > 0$ و (شکل ۳۲۳)

$$s_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n},$$

این نشان می‌دهد که دنبالهٔ مجموعهای جزئی کراندار است. چون جملات سری مثبت‌اند، دنباله صعودی یکنواست وهمگرایی ازقضیهٔ ۱ بخش قبل نتیجه می‌شود. ▲

آزمون زیر ازآزمون نسبت کلیتر است، اما دراغلب موارد استفاده از آن مشکلتر است.

قضیهٔ ۴ (آزمون ریشه)

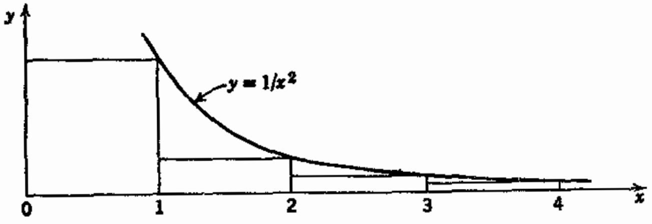
سری زیر را درنظر بگیرید:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

فرض کنید که دنبالهٔ ریشه‌های

$$\sqrt[n]{|w_n|} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

همگراست وحد آن L است. دراین صورت سری داده شده همگرای مطلق است، اگر $L < 1$ و



شکل ۳۲۳. همگرایی سری (۵)

واگراست، اگر $L > 1$.
(اگر $L = 1$، این آزمون نتیجه‌ای ندارد).

اثبات. اگر $L < 1$، دراین صورت، مانند اثبات آزمون نسبت، می‌توان qیی کوچکتر از ۱ انتخاب کرده N متناظر با آن را طوری پیدا کرد که

$$k_n^* \equiv \sqrt[n]{|w_n|} < q < 1 \qquad \text{به ازای هر } n > N$$

از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$|w_n| < q^n < 1 \qquad (n > N),$$

و از مقایسهٔ سری $|w_N| + |w_{N+1}| + \cdots$ با سری هندسی نتیجه می‌گیریم که این‌سری همگراست. بنابراین سری $w_1 + w_2 + \cdots$ همگرای مطلق است.

اگر $L > 1$، در این صورت به ازای همهٔ nهایی که به اندازهٔ کافی بزرگ هستند $\sqrt[n]{|w_n|} > 1$. پس به ازای چنین مقادیری از n، $|w_n| > 1$ و از قضیهٔ ۳ بخش ۲.۱۵ نتیجه می‌گیریم که سری واگراست.

اگر $L = 1$، آزمون بی‌نتیجه است. این حالت را با مطالعهٔ سری همساز توضیح می‌دهیم:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{e^{(1/n)\ln n}} \longrightarrow \frac{1}{e^0} = 1 \qquad (n \to \infty)$$

زیرا $(1/n)\ln n \to 0$، و سری (۵) که در آن

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{2/n}} = \frac{1}{e^{(2/n)\ln n}} \longrightarrow \frac{1}{e^0} = 1 \qquad (n \to \infty)$$

زیرا وقتی $n \to \infty$، $(2/n)\ln n \to 0$.

مثال ۱. کاربرد آزمون نسبت و ریشه

سری زیرا را بیابید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + 1 + \frac{25}{32} + \cdots$$

داریم

$$w_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad w_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (n \longrightarrow \infty),$$

و همگرایی ازآزمون نسبت نتیجه می‌شود. همچنین می‌توان آزمون ریشه را به‌کاربرد:

$$\sqrt[n]{\frac{n^{2}}{2^{n}}}=\frac{n^{2/n}}{2}=\frac{e^{(2/n)\ln n}}{2}\longrightarrow\frac{e^{0}}{2}=\frac{1}{2}\qquad(n\longrightarrow\infty)$$

و این نتیجهٔ قبلی را تأیید می‌کند.

مثال ۲. کاربردآزمون نسبت

سری زیرهمگراست یا واگرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-4i)^{n}}{n!}=1+(3-4i)+\frac{1}{2!}(3-4i)^{2}+\cdots$$

داریم

$$|w_n|=\frac{|3-4i|^{n}}{n!}=\frac{5^{n}}{n!},\quad |w_{n+1}|=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!},\quad \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|=\frac{5}{n+1}\longrightarrow 0$$

وقتی‌که $n\to\infty$، و همگرایی ازآزمون نسبت نتیجه می‌شود.

درخاتمه یادآوری می‌کنیم که هم‌آزمون نسبت و هم‌آزمون ریشه را می‌توان تعمیم داد تا به‌ترتیب حالتی‌راکه دنباله‌هایی‌که جملات‌آنها $|w_{n+1}/w_n|$ و $\sqrt[n]{|w_n|}$ که همگرا نیستند را نیزدربر گیرد.

قضیهٔ ۵ (آزمون نسبت)

سری

$$w_1+w_2+w_3+\cdots$$

را درنظربگیرید وفرض‌کنید $w_n\neq 0$ وقتی‌که $n=1,2,\ldots$. اگر به ازای هر n که بزرگتر از عددی مانند N است داشته باشیم

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|\leqslant q,\tag{6}$$

که درآن q عدد مشخصی‌کوچکتر از ۱ است، دراین صورت سری داده شده همگرای مطلق است. اگر

$$\text{به ازای هر } n>N\qquad \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|\geqslant 1\tag{7}$$

سری واگراست.

اثبات. درقسمت نخست اثبات قضیهٔ ۳ همگرایی را ازاینکه عددی مانند $q < 1$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $n > N$ (۶) صادق است نتیجه گرفتیم. درمورد قضیهٔ فعلی نیز بنا به‌همان استدلال همگرایی را نتیجه می گیریم. حکم آخر قضیه از این واقعیت که بنابه (۷) داریم $|w_{n+1}| \geqslant |w_n|$ واز قضیهٔ ۳ بخش ۲.۱۵ نتیجه می‌شود.

مثال ۳. کاربرد قضیهٔ ۵ ، ناموفق بودن قضیهٔ ۳

در سری

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}+\cdots$$

جملات فرد وجملات زوج هر کدام یك سری هندسی باقدر نسبت ۱/۸ تشکیل می‌دهند. از قضیهٔ ۵ همگرایی را نتیجه می گیریم زیرا نسبت جملات متوالی عبارتند از

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$$

می‌بینیم که دنبالهٔ این نسبتها همگرا نیست. ازاین رو قضیهٔ ۳ را نمی‌توان به‌کاربرد و این مثال نشان می‌دهد که قضیهٔ ۳ کلیتر است. ▲

قضیهٔ ۶ (آزمون ریشه)

سری زیر را درنظر بگیرید:

$$w_1+w_2+w_3+\cdots$$

اگر به‌ازای هر n ی که از عددی مانند N بزرگتر است داشته باشیم

$$\sqrt[n]{|w_n|} \leqslant q, \qquad (8)$$

که درآن q عدد مشخصی کوچکتر از ۱ است، دراین صورت سری داده شده همگرای مطلق است. اگر به‌ازای تعدادی نامتناهی n داشته باشیم

$$\sqrt[n]{|w_n|} \geqslant 1 \qquad (9)$$

دراین صورت سری واگراست.

اثبات. اگر (۸) صادق باشد، آنگاه

$$|w_n| \leqslant q^n < 1 \qquad (n > N)$$

و از مقایسه با سری هندسی نتیجه می‌شود که سری $|w_N|+|w_{N+1}|+\dots$ همگراست. ازاین‌رو سری $w_1+w_2+\dots$ همگرای مطلق است. اگر (۹) صادق باشد، دراین‌صورت به ازای تعدادی نامتناهی n، $|w_n|\geqslant 1$، و بنا به‌قضیهٔ ۳ بخش ۲.۱۵ سری واگراست. ▲

به ترتیب دردوقضیهٔ اخیر برای همگرایی لازم است که $|w_{n+1}/w_n|$ و $\sqrt[n]{|w_n|}$ نهایتاً کوچکتر یا مساوی عدد معین $q<1$ باشند. به هیچ‌وجه برای همگرایی کافی نیست که به ازای n به اندازهٔ کافی بزرگ داشته باشیم

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|<1 \qquad \text{یا} \qquad \sqrt[n]{|w_n|}<1$$

مثلاً، به ازای n به اندازهٔ کافی بزرگ درمورد سری همساز بخش ۲.۱۵ داریم

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{1/(n+1)}{1/n}=\frac{n}{n+1}<1 \qquad \text{و} \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n}}<1$$

اما سری واگراست.

مسائل بخش ۵.۱۵

سریهای زیر همگرا هستند یا واگرا؟

۱. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots$

۲. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots$

۳. $\frac{1}{\sqrt{1\times 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\times 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\times 4}}\dots$

۴. $1+10i+\frac{(10i)^2}{2!}+\frac{(10i)^3}{3!}+\dots$

۵. $1+\frac{i}{2}+\frac{i^2}{2^2}+\frac{i^3}{2^3}+\dots$

۶. $1+i+i^2+i^3+\dots$

سریهای زیر همگرا هستند یا واگرا؟

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ۸. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$ ۹. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10+5i)^n}{n!}$

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+i)^{2n}}{(2n)!}$ ۱۱. $\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{i}{2}\right)^n$ ۱۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+3i}{6}\right)^n$

۱۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3-4i}{4}\right)^n$ ۱۴. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(10i)^{2n}}{(2n)!}$ ۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n n}$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n}$ ۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

۱۹. معین کنید که برای محاسبهٔ مجموع s سری هندسی $1+q+q^2+\cdots$ با خطایی کمتر از ۰٫۰۱، وقتی که $q=0.25$، $q=0.5$، $q=0.9$، چند جمله لازم است.

۲۰. اگر $|w_{n+1}/w_n| \leqslant q < 1$ و در نتیجه بنا بـه آزمـون نسبت (قضیهٔ ۵) سری $w_1+w_2+\cdots$ همگرا باشد، نشان دهید که باقیماندهٔ $R_n = w_{n+1}+w_{n+2}+\cdots$ در $|R_n| \leqslant |w_{n+1}|/(1-q)$ صدق می کند. (راهنمایی. از این واقعیت استفاده کنید که آزمون نسبت مقایسه‌ای بین سری $w_1+w_2+\cdots$ و سری هندسی است.) با استفاده از این نتیجه تعداد جمله‌هایی را که برای محاسبه مجموع s سری مسئله ۱۶ بـا خطایی نه بیش از ۰٫۰۵ کفایت می کنند به‌دست آورید و s را باچنین دقتی محاسبه کنید.

۶.۱۵ اعمالی که روی سریها انجام می‌شود

حال اعمال ساده‌ای را که درکار با سریها معمول است بررسی می کنیم.

مطلب‌را باجمع سریها شروع می کنیم‌ونشان می‌دهیم که دوسری همگرا را می‌توان جمله به‌جمله با هم جمع کرد.

قضیهٔ ۱ (جمع و تفریق جمله به جمله)

اگر دو سری $w_1+w_2+\cdots$ و $z_1+z_2+\cdots$ همگرا بوده و مجموع آنها به ترتیب s و s^* باشند، دراین صورت سریهای

$$\sum_{n=1}^{\infty}(w_n+z_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(w_n-z_n) \qquad \text{و} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} k w_n \tag{1}$$

که k درآنها یك ثابت است همگرا هستند و مجموع آنها به‌ترتیب $s+s^*$، $s-s^*$ و ks است.

اثبات. مجموعهای جزئی دوسری داده شده عبارتند از

$$s_n=w_1+\cdots+w_n,\quad s_n^*=z_1+\cdots+z_n,$$

و بنا به‌تعریف همگرایی سری داریم

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s,\quad \lim_{n\to\infty} s_n^*=s^*$$

حال nامین مجموع جزئی سری اول (۱) عبارت است از

$$S_n=s_n+s_n^*=(w_1+z_1)+\cdots+(w_n+z_n)$$

از این رابطه به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(s_n+s_n^*)=\lim_{n\to\infty} s_n+\lim_{n\to\infty} s_n^*=s+s^*.$$

درنتیجه این سری همگراست و مجموع آن $s+s^*$ است. حکمهای دیگر را می‌توان با استدلالی مشابه ثابت کرد. ▲

عمل بعدی که باید بررسی شود واردکردن پرانتز در یك سری است. این عمل را **گروه‌بندی** نامند.

مثلا، با گروه‌بندی جملات سری $w_1+w_2+w_3+\cdots$ می‌توان سری

$$(w_1+w_2)+(w_3+w_4)+\cdots$$

را به‌دست آورد که جملاتش به‌صورت $W_n=w_{2n-1}+w_{2n}$، که در آن $n=1,2,\ldots$ هستند.

البته درموردسری متناهی (یعنی سری‌ای که فقط تعدادی متناهی جمله‌دارد) می‌توان پرانتزرا درسری‌واردکرد. بدون‌آنکه مجموع‌سری تغییرکند ثابت خواهیم کردکه درمورد سری نامتناهی همگرا هم می‌توان این‌کار راکرد. باید توجه‌کردکه در یك سری واگرا، گروه‌بندی ممکن است ایجاد همگرایی‌کند. به‌عنوان مثال، با گروه‌بندی سری واگرای

$$1-1+1-1+-\cdots$$

(ر. ك. مثال ۱ بخش ۲۰۱۵) سری همگرای

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots$$

را به‌دست می‌آوریم که مجموعش صفراست.

قضیهٔ ۲ (گروه‌بندی)

اگر یك سری همگرا باشد، در این صورت واردکردن پرانتز منجر به پیدایش سری جدیدی می‌شودکه همگراست و مجموعش همان مجموع سری اولی است.

اثبات. بدیهی‌است که مجموعهای جزئی سری جدید با حذف مجموعهای جزئی مشخصی از مجموعهای جزئی سری داده شده به‌دست می‌آید. مثلا مجموعهای جزئی سری

$$(w_1+w_2+w_3)+(w_4+w_5+w_6)+\cdots$$

عبارتند از مجموعهای جزئی $s_3,\ s_6,\ s_9,\ \ldots$ از سری $w_1+w_2+\cdots$. حال اگر مجموعهای جزئی s_n سری داده شده دنبالهٔ همگرایی تشکیل دهند که حدش s باشد، از تعریف همگرایی دنباله نتیجه می‌شود که دنبالهٔ جدید که ازحذف بعضی جمله‌های دنبالهٔ قبلی به‌دست می‌آید نیزهمگراست وحدش s است. ▲

مثال ۱. گروه‌بندی

آزمون لایبنیتس (ر. ک. بخش ۴.۱.۵) نشان می‌دهد که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots$$

همگراست. مجموع این سری را s فرض می‌کنیم. دراین صورت بنا به قضیهٔ ۲

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

(۲)

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)=s$$

و به‌همین ترتیب

$$\frac{1\times2+3\times4}{1\times2\times3\times4}+\frac{5\times6+7\times8}{5\times6\times7\times8}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

(۳)

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4m-3}-\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{4m}\right)=s.$$ ▲

آخرین عملی که باید دراین بخش بررسی شود تغییرترتیب جملات سری است.

واضح است که اگر یک‌سری متناهی باشد می‌توان ترتیب جملاتش را عوض کرد بدون آنکه مجموعش تغییر کند. همچنین می‌توان ترتیب تعداد متناهی ازجملات سری نامتناهی مفروض را عوض کرد: اگرسری داده شده واگراباشد، سری جدید نیزواگرا خواهد بود، واگر سری مفروض همگرا باشد، سری جدید نیزهمگرا بوده همان مجموع را خواهد داشت. این نتیجه از تعاریف همگرایی و واگرایی حاصل می‌شود.

حال ممکن است سؤال شود که اگر «ترتیب تعدادی نامتناهی از جملات سری را عوض کنیم» چه اتفاقی می‌افتد. البته ابتدا باید روشن شود کـه چگونه می‌توان ترتیب تعدادی نامتناهی ازجملات سری راعوض کرد. این عمل‌را می‌توان به‌ترتیب زیرانجام‌داد.
سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n^* = w_1^* + w_2^* + \cdots$$

را **بازآرایشی** از سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + \cdots$$

نامند هر گاه تناظری یك به‌یك بین شاخصهای n و m وجود داشته باشد به طوری که در مورد شاخصهای متناظر داشته باشیم $w_n^* = w_m$.
مثلا، سری

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\cdots$$

بازآرایشی ازسری همساز زیر است:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

مثال زیر روشن می‌کند که می‌توان با باز آرایی یك سری همگرا، سری همگرای دیگری به‌دست آورد که مجموعش با سری اصلی متفاوت باشد.

مثال ۲. بازآرایشی که مجموع را تغییر می‌دهد

سری همگرای

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-+\cdots$$

را بدین ترتیب باز می‌آراییم کـه اول دوجملهٔ مثبت، سپس یك جملهٔ منفی را می‌نویسیم، دوباره دومثبت و یك منفی را به ترتیب می‌نویسیم و به همین نحو ادامه می‌دهیم. درنتیجه به بازآرایش زیر می‌رسیم:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\cdots$$

می‌توان‌نشان داد که این سری‌همگراست (اثبات در[A۹] ،صفحهٔ **۱۲۵۵**، ر.ك. ضمیمهٔ ۱)، مجموع این سری را s^* می‌نـامیم. می‌خـواهیم نشان دهیم کـه s و s^* متفاوتند. بـا

قراردادن پرانتزهایی در بازآرایش داریم

$$s^*=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}\right).$$

از طرف دیگر باضرب سری (۲) در ۱/۲ وجمع جمله به جملهٔ حاصلضرب با سری (۳) (ر. ك. قضیهٔ ۱) داریم

$$\frac{3s}{2}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4m-3}-\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{4m}+\frac{1/2}{2m-1}-\frac{1/2}{2m}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}\right)=s^*.$$

از این رو $s^*=3s/2$.

یادآوری می‌کنیم سریی کــه دراین مثال بررسی شد همگرای مطلق نیست. اکنون ثابت می‌کنیم که سری همگرای مطلق را همیشه می‌توان باز آراست بدون آنکه‌مجموعش تغییر کند.

قضیهٔ ۳ (بازآرایش سری همگرای مطلق)

اگر یك سری همگرای مطلق باشد، دراین صورت هربازآرایش آن همگرای مطلق است و مجموعش با مجموع سری اصلی یکی است.

اثبات. فرض کنید $w_1^*+w_2^*+w_3^*+\cdots$ بــازآرایشی از سری همگــرای مطلق $w_1+w_2+w_3+\cdots$ باشد. دراین صورت، چون هر w_m^* برابریك w_n بــا n مناسب است و هیچ دو m ی بایك n متناظر نمی‌شوند؛ داریم

به‌ازای هر n
$$\sum_{m=1}^{n}|w_m^*|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|.$$

مجموع درسمت چپ m امین مجموع جزئی سری $|w_1^*|+|w_2^*|+\cdots$ است. چون این مجموعهای جزئی غیرمنفی هستند، برابری بالا نشان می‌دهد که آنها دنبالهٔ کرانداری را تشکیل می‌دهند. چون $0\leqslant|w_m^*|$، دنباله صعودی یکنواست، وبنابراین، همگراست (ر. ك. قضیهٔ ۱ بخش ۴.۱۵). از این رو بازآرایش $w_1^*+w_2^*+\cdots$ همگرای مطلق است. مجموع این بازآرایش را s^* و مجموع سری اصلی را s می‌نامیم. نشان می‌دهیم که $s^*=s$.

از تعریف همگرایی و از قضیهٔ ۳ بخش ۳.۱۵ هنگامی که در مورد سری $|w_1|+|w_2|+\cdots$ به کار رود نتیجه می گیریم که، وقتی یك $\varepsilon>0$ داده شده است، می‌توان N را به گونه‌ای یافت که به‌ازای هر $n>N$ و $p=1, 2, \ldots$ داشته باشیم

$$\text{(الف)} \quad |s_n-s|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(ب)} \quad |w_{n+1}|+\cdots+|w_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

در اینجا s_n عبارت است از nامین مجموع جزئی سری اصلی. حال به‌ازای m ی که به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، ${s_m}^*$ مجموع جزئی mام باز آرایش شامل تمام جملات $w_1, \ldots, w_n$ ($n>N$ ومشخص است) و شاید هم چند جملهٔ دیگر w_r $(r>n)$ از سری اصلی است. از این‌رو ${s_m}^*$ به صورت

$${s_m}^*=s_n+A_{mn} \qquad (5)$$

خواهد بود که در آن A_{mn} مجموع جملات اضافی است. فرض کنید $n+p$ بزرگترین شاخص زیرجملات A_{mn} باشد. دراین صورت بنابه (۴ ب)، چون $n>N$، داریم

$$|A_{mn}|\leqslant|w_{n+1}|+\cdots+|w_{n+p}|<\frac{\epsilon}{2}$$

ازاین رابطه و (۵) نتیجه می‌شود که

$$|{s_n}^*-s_n|=|A_{mn}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

بااستفاده از (۴ الف) و نامساوی مثلثی، به‌ازای هر m ی که به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، به دست می‌آوریم:

$$|{s_m}^*-s|=|({s_m}^*-s_m)+(s_n-s)|\leqslant|{s_m}^*-s_n|$$
$$+|s_n-s|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

از این‌رو دنبالهٔ $\ldots, {s_2}^*, {s_1}^*$ به s همگراست و بنابراین $s=s^*$. ▲

۱۶

سری توانی، سری تیلور، سری لوران

سری توانی (بخش ۱۰۱۶) مهمترین سری در آنـالیز مختلط است. دلیل این اهمیت آن است که هر سری توانی نمایش دهندهٔ یك تابع تحلیلی (قضیهٔ ۵ ، بخش ۲۰۱۶) است و بالعکس هر تابع تحلیلی یك نمایش سری توانی به نام سری تیلور دارد (بخشهای ۳۰۱۶ـ ۶۰۱۶) . این سری تیلور مشابه مختلط سری تیلور درحساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی است. در واقـع هر گاه درسری تیلورحقیقی متغیری مختلط را جایگزین متغیرحقیقی کنیم می‌توانیم توابع حقیقی را به حوزهٔ توابع مختلط «توسعه» یا «امتداد» دهیم.

قسمت آخر این فصل به‌نمایش توابع تحلیلی با سری‌لوران اختصاص دارد. سری لوران مشتمل برتوانهای صحیح مثبت ومنفی متغیرمستقل است. چنانچه درفصل بعدخواهیم دید این سری برای محاسبهٔ انتگرالهای حقیقی و مختلط نیزمفیداست.

پیشنیاز این فصل: فصلهای ۱۲، ۱۴، ۱۵.

بخشهایی که در دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۶۰۱۶، ۸۰۱۶.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت F.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱۰۱۶ سری توانی

دربخش ۲۰۱۵ درمورد سری باجمله‌های ثابت تعاریفی داشتیم. هرگاه جمله‌های یك‌سری متغیر باشند، یعنی تابع متغیری مانند z باشند، وقتی که z مقدار مشخصی به‌خود می گیرد، جملات سری نیز مقادیـر معینی احرازمی‌کنند. وبنابراین تمام تعاریف قبلی دراین حالت صادقند. آشکاراست که درمورد اینگونه سریها که جملاتشان توابعی‌از z هستندمجموعهای

جزئی، باقیمانده‌ها، ومجموع توابعی از z خواهند بود. معمولا چنین سریی به‌ازای بعضی مقادیر z، مثلا تمام z های درون یك ناحیه، همگرا و به‌ازای دیگرمقادیر z واگراست.

درآنالیزمختلط سری‌توانی مهمترین سری باجمله‌های متغیراست. یك **سری توانی**[1] برحسب توانهای $z-a$ یك سری نامتناهی به‌صورت

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \qquad (1)$$

است‌که درآن z متغیراست، $c_0, c_1, \ldots$ ثابتهایی هستندکه **ضریب** نامیده می‌شوند و a ثابتی است‌که **مرکز** سری نامیده می‌شود.

هرگاه $a=0$، حالت خاص سری توانی برحسب توانهای z به‌دست می‌آید:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (2)$$

همگرایی یك سری توانی را به‌طریقی بسیارساده می‌توان تشخیص داد. مطلب رابا سه مثال‌نمونه‌وار شروع می‌کنیم.

مثال ۱. همگرایی دریك قرص. سری هندسی

سری هندسی

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \cdots$$

به طورمطلق‌همگراست هرگاه $|z|<1$ و واگراست وقتی‌که $|z| \geqslant 1$ (ر.ك. قضیهٔ ۲، بخش ۱۵.۵).

مثال ۲. همگرایی درسراسرصفحهٔ متناهی

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

به‌ازای هر z (متناهی) به طور مطلق واگراست واین از آزمون نسبت نتیجه می‌شود. در واقع به‌ازای هر z مشخص،

---

۱. لازم به‌تأکید است‌که اصطلاح «سری‌توانی» وقتی به‌تنهایی مورد استفاده قرارگیرد معمولا به‌سریهایی‌که به‌شکل (۱) هستند اطلاق می‌شودکه باید توجه داشت‌که (۱) شامل حالت خاص (۲) نیزهست، اما سریهایی باتوانهای منفی z نظیر $\ldots + c_1z^{-1} + c_2z^{-2}$، یاسریهایی راکه شامل توانهای‌کسری z هستند شامل نمی‌شود.

$$n \to \infty \text{ وقتی که } \left|\frac{z^{n+۱}/(n+۱)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+۱} \to ۰$$

مثال ۳. همگرایی فقط درمرکز

سری توانی

$$\sum_{n=۰}^{\infty} n!\, z^n = ۱ + z + ۲z^۲ + ۶z^۳ + \cdots$$

فقط درمرکز $z=۰$ همگراست اما به‌ازای هر $z \neq ۰$ واگراست. در واقع، این نتیجه ازآزمون نسبت به دست می‌آید زیرا

$$\blacktriangle\ n \to \infty \text{ وقتی که } \left|\frac{(n+۱)!\, z^{n+۱}}{n!\, z^n}\right| = (n+۱)\,|z| \to \infty (z \neq ۰ \text{ و مشخص})$$

وقتی $z=a$، سری توانی (۱) همگراست زیرا درآن صورت $z-a=۰$ وسری به تك جملهٔ $c_۰$ تقلیل می‌یابد. مثال ۳ روشن می‌کندکه دربرخی ازحالات ممکن است این تنها مقداری از z باشدکه به ازای آن سری همگراست. هرچند، اگرسری (۱) به‌ازای یك $z_۰ \neq a$ همگرا باشد درآن صورت به‌ازای هر z هم که فاصله‌اش از مرکز کمتر از $z_۰$ باشد همگراست. در واقع قضیهٔ زیرصادق است.

قضیهٔ ۱. همگرایی سری توانی

اگر سری توانی (۱) درنقطهٔ $z=z_۰$ همگرا باشد این سری به ازای هر z ی که در رابطهٔ $|z-a| < |z_۰-a|$ صدق کند، یعنی به‌ازای هر z ی که درون دایرهٔ به‌مرکز a وبه شعاع $z_۰$ باشد به طور مطلق همگراست.

اثبات. چون سری (۱) به‌ازای $z_۰$ همگراست، قضیهٔ ۳ بخش ۲.۱۵ نشان می‌دهدکه

$$n \to \infty \text{ وقتی که } c_n(z_۰-a)^n \to ۰$$

بنابراین به‌ازای $z=z_۰$ جملات سری (۱) کراندارند، یعنی

$$n=۰,\ ۱,\ \ldots \text{ به‌ازای هر } |c_n(z_۰-a)^n| < M$$

ازاینجا به دست می‌آوریم

$$|c_n(z-a)^n| = \left|c_n(z_۰-a)^n + \left(\frac{z-a}{z_۰-a}\right)^n\right| < M\left|\frac{z-a}{z_۰-a}\right|^n$$

وبنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n| < \sum_{n=0}^{\infty} \left|M \frac{z-a}{z_0-a}\right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n \qquad (۳)$$

بنابه فرض $|z-a| < |z_0-a|$ ، نامساوی زیر را داریم:

$$\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < ۱,$$

وسری سمت راست (۳) یک سری هندسی همگراست. از این رو سری سمت چپ (۳) همگراست وسری (۱) وقتی که $|z-a| < |z_0-a|$ به طورمطلق همگراست. ▲

مثالهای ۲ و ۳ نشان می‌دهندکه سری توانی ممکن است به ازای تمام مقادیر z یا فقط به‌ازای $z=a$ همگرا باشد. تا مدتی این دوحالت راکنارمی گذاریم. حال، اگرسری توانی (۱) را داشته باشیم، می‌توانیم تمام نقاط z واقع درصفحهٔ مختلط راکه به ازای آنها سری همگراست درنظر بگیریم. فرض کنید R کوچکترین عدد حقیقی باشدکه حداکثر فاصلهٔ هریك ازنقاط مذکور از مرکز a را نشان می‌دهد. (مثلا، در مثال ۱ داریم $R=۱$.) دراین صورت ازقضیهٔ ۱ نتیجه می‌شودکه به‌ازای تمام zهای داخل دایرهٔ به شعاع R و به مرکز a یعنی به‌ازای تمام z هایی که در رابطهٔ

$$|z-a| < R \qquad (۴)$$

صدق کنند سری همگراست وبنابه تعریف R ، به‌ازای تمام z هایی که در رابطهٔ

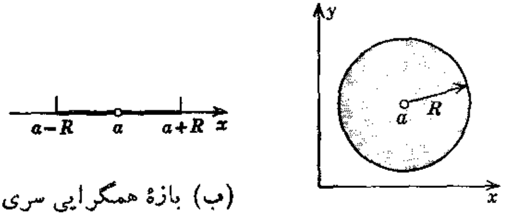
$$|z-a| > R$$

صدق می کنند سری واگراست. دایره

$$|z-a| = R$$

را **دایرهٔ همگرایی** وشعاع R آن را **شعاع همگرایی**(۱) می‌نامند. (ر.ك. شکل ۳۲۴ الف.)

درنقاطی که روی دایرهٔ همگرایی واقع‌اند ممکن‌است سری همگرا یا واگرا باشند. مثلا، درمثال ۱ داریم $R=۱$ ، وسری درهرنقطه از دایرهٔ همگرایی $|z|=۱$ واگراست.



(الف)دایرهٔ همگرایی

(ب) بازهٔ همگرایی سری توانی حقیقی

شکل ۳۲۴. دایرهٔ همگرایی و بازهٔ همگرایی

همان طور که از آزمون نسبت نتیجه می‌شود سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$$

به‌ازای $|z|<1$ همگرا و به‌ازای $|z|>1$ واگراست. از این‌رو $R=1$. در $z=1$ سری همساز و واگرا می‌شود، ودر $z=-1$ می‌شود

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-+\cdots$$

که همگراست (ر.ك. مثال ۲، بخش ۲.۱۵). این نشان می‌دهد که ممکن است یك سری در بعضی نقاط دایرهٔ همگرایی همگرا باشد درحالیکه درسایر نقاط آن واگراست.

بدیهی است که اگر(۱) را یك سری توانی حقیقی درنظربگیریم یعنی اگر $z=x$، مرکز و ضرایب حقیقی هستند، و دراین صورت (۴) نمایانگر بازه‌ای به طول $2R$ است که نقطهٔ میانی آن در a برروی محور xها قرار دارد. بازهٔ مزبور **بازهٔ همگرایی** نامیده می‌شود (شکل۳۲۴ ب).

اگرسری (۱) به‌ازای تمام zها همگرا باشد (مانند مثال ۲)، در این صورت قرار می‌دهیم

$$R=\infty \qquad \left(\frac{1}{R}=0\right);$$

اگرسری فقط درمرکز $z=a$ همگرا باشد (مانند مثال ۳) دراین صورت می‌نویسیم

$$R=0 \qquad \left(\frac{1}{R}=\infty\right);$$

با استفاده ازاین قراردادها، شعاع همگرایی R سری‌توانی (۱) را می‌توان از روی ضرایب سری به‌ترتیب زیر به‌دست آورد.

قضیهٔ ۲ (شعاع همگرایی)

اگر دنبالهٔ $\sqrt[n]{|c_n|}$، $n=1, 2, \cdots$ همگرا بوده حد آن L باشد، دراین صورت شعاع همگرایی R سری توانی (۱) عبارت است از

(فرمول کوشی ـ آدامار[۱]) $$R=\frac{1}{L}$$ (۵ الف)

۱. به‌نام ریاضیدانان فرانسوی ا. ل. کشی A. L. Cauchy (ر. ك. پانوشت بخش ۷.۲) و ژاك آدامار Jacques Hadamard (۱۸۶۵ـ۱۹۶۳).

که شامل $L=0$ نیز می‌شود که درآن $R=\infty$ و سری (۱) برای تمام zها همگراست.
اگر دنبالهٔ مزبور همگرا نباشد اما کراندار باشد، در آن صورت

$$R=\frac{1}{l} \tag{۵ ب}$$

که l بزرگترین نقطهٔ حدی دنباله است.
هرگاه دنبالهٔ مزبور کراندار نباشد، درآن صورت $R=0$، و سری فقط به‌ازای $z=a$ همگراست.

اثبات. اگر

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=L\neq 0,$$

در آن صورت

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}=|z-a|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=|z-a|L$$

چون جملات سری (۱) به شکل $w_n=c_n(z-a)^n$ هستند، آزمون ریشه (بخش ۵.۱۵) نشان می‌دهد که سری به‌طورمطلق همگراست اگر

$$|z-a|<\frac{1}{L}=R \quad \text{یا} \quad |z-a|L<1$$

و واگراست اگر

$$|z-a|>\frac{1}{L}=R \quad \text{یا} \quad |z-a|L>1$$

اگر

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=L=0,$$

از تعریف حد نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $\varepsilon>0$ مفروض، مثلا، به‌ازای $\varepsilon=1/(2|z_1-a|)$، که درآن z_1 یك مقدار مشخص دلخواه است، می‌توان عدد N را طوری یافت که

$$\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{1}{2|z_1-a|} \qquad \text{به‌ازای هر } n>N$$

از اینجا داریم

$$|c_n(z_1-a)^n|<\frac{1}{2^n} \quad \text{یا} \quad |c_n|<\frac{1}{(2|z_1-a|)^n}$$

حال، چون $\sum 2^{-n}$ همگراست، آزمون مقایسه (بخش ۵.۱۵) نشان می‌دهد که سری (۱)

به‌ازای $z=z_1$ به‌طورمطلق همگراست. چون z_1 دلخواه است، نتیجه می گیریم که سری مورد نظر به‌ازای هر z متناهی همگراست وبه‌این ترتیب اثبات حکم مربوط به (۵ الف) کامل می‌شود.

اینك حکـم مربوط به (۵ ب) را ثـابت می کنیم. وجـود l از قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس (بخش ۳.۱۵) نتیجه می‌شود و چـون $\sqrt[n]{|c_n|}\geqslant 0$ به‌وضوح داریم $l>0$. ازتعریف نقطهٔ حدی نتیجه می‌شودکه به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض،

$$\text{به‌ازای تعدادی نـامتناهی } n\text{،} \quad l-\varepsilon<\sqrt[n]{|c_n|}<l+\varepsilon$$

باضرب‌کردن این رابطه درکمیت مثبت $|z-a|$، نامساویهای

$$|z-a|(l-\varepsilon)<\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} \tag{۶}$$

و

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}<|z-a|(l+\varepsilon) \tag{۷}$$

را به‌دست می‌آوریم. نامساوی (۷) حتی برای nهای به‌اندازهٔکافی بزرگ، مثلاً، $n>N$ هم صادق است زیرا l بزرگترین نقطهٔ حدی است و بنابراین، حداکثر تعدادی متناهی از جملات می‌توانند بزرگتر از عبارت سمت راست باشند. ثابت می کنیم که درمورد

$$|z-a|<\frac{1}{l} \tag{۸}$$

همگرایی سری توانی (۱) از (۷) نتیجه می‌شود. در واقع هرگاه ε را

$$\varepsilon=\frac{1-l|z-a|}{2|z-a|}$$

انتخاب‌کنیم، دراین صورت بنابه (۸) داریم $\varepsilon>0$، و نامساوی (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}<\frac{1+l|z-a|}{2} \qquad (n>N).$$

از (۸) نتیجه می گیریم که عبارت سمت راست‌کمتر از ۱ است و همگرایی آزمون ریشه اثبات می‌شود (بخش ۵.۱۵، قضیهٔ ۶). ازطرفی، وقتی که

$$|z-a|>\frac{1}{l},$$

با انتخاب

$$\varepsilon=\frac{l|z-a|-1}{2|z-a|}$$

داریم $\varepsilon > 0$ و (۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > \frac{|z-a|l+1}{2} > 1.$$

از این‌رو، بنابه آزمون ریشه، سری به‌ازای آن zها واگراست. تا اینجا حکم مربوط به (۵ ب) اثبات شده است.

سرانجام هرگاه دنبالهٔ $\sqrt[n]{|c_n|}$ کراندارنباشد، درآن صورت، بنابه تعریف، به‌ازای هر K مفروض داریم

$$\sqrt[n]{|c_n|} > K \qquad \text{به‌ازای تعدادی نامتناهی } n$$

باانتخاب $K=1/|z-a|$، که درآن $z\neq a$، می‌بینیم که نامساوی به‌صورت

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)n^n|} > 1, \quad \text{یا} \quad \sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z-a|}$$

درمی‌آید وهمگرایی ازقضیهٔ ۶ بخش ۵.۱۵ نتیجه می‌شود و بدین ترتیب اثبات قضیهٔ ۲ کامل می‌شود. ▲

حال اعمال جمع و ضرب درمورد سریهای توانی را بررسی می‌کنیم.

دوسری توانی را می‌توان برای هر z ی که به ازای آن هر دوسری همگرا باشند جمله به‌جمله جمع نمود. این نتیجه ازقضیهٔ ۱ بخش ۶.۱۵ گرفته می‌شود.

ضرب جمله به‌جملهٔ دوسری توانی زیر را درنظرمی گیریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0+c_1z+\cdots \quad \text{و} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0+a_1z+\cdots \tag{۹}$$

هرگاه هرجمله ازسری اول را در هرجملهٔ سری دوم ضرب کنیم و حاصل ضربها را با هم جمع کرده برحسب z مرتب کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &a_0c_0+(a_0c_1+a_1c_0)z+(a_0c_2+a_1c_1+a_2c_0)z^2+\cdots \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0c_n+a_1c_{n-1}+\cdots+a_nc_0)z^n \end{aligned} \tag{۱۰}$$

این سری را **حاصل ضرب کشی** سریهای (۹) می‌نامند.

قضیهٔ ۳ (حاصل‌ضرب کوشی سریهای توانی)

حاصل ضرب کوشی دوسری توانی (۹) به ازای هر zی که داخل دایره‌های همگرایی هر دوسری (۹) باشد به طور مطلق همگراست. اگر مجموع سریها به‌ترتیب $g(z)$ و $h(z)$ باشد مجموع حاصل ضرب کوشی آنها برابر است با

$$s(z)=g(z)h(z) \tag{۱۱}$$

اثبات. جملهٔ عمومی سری حاصل ضرب (۱۰) عبارت است از

$$p_n=(a_0c_n+a_1c_{n-1}+\cdots+a_nc_0)z^n$$

حال بنا به تعمیم نامساوی مثلث (۱۱) بخش ۲.۱۲ به دست می‌آوریم

$$|p_0|+|p_1|=|a_0c_0|+|(a_0c_1+a_1c_0)z|\leqslant(|a_0|+|a_1z|)(|c_0|+|c_1z|),$$

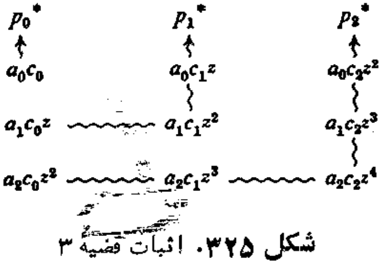
$$|p_0|+|p_1|+|p_2|\leqslant(|a_0|+|a_1z|+|a_2z^2|)(|c_0|+|c_1z|+|c_2z|),$$

واین را می‌توان با انجام دادن عمل ضرب درسمت راست تحقیق کرد، درحالت کلی داریم

$$|p_0|+|p_1|+\cdots+|p_n|$$
$$\leqslant(|a_0|+|a_1z|+\cdots+|a_nz^n|)(|c_0|+|c_1z|+\cdots+|c_nz^n|).$$

هر گاه z در داخل دایره‌های همگرایی سریهای (۹) قرار داشته باشد، دنبالهٔ عبارتهای سمت راست کراندار است و همینطور است دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری $|p_0|+|p_1|+\cdots$. چون $|p_n|\geqslant 0$، این دنباله صعودی یکنوا نیز هست و بنابراین همگراست. (ر. ك. بخش ۴.۱۵ قضیهٔ ۱.) از این‌رو سری اخیر همگراست و سری حاصل‌ضرب (۱۰) به طور مطلق همگراست.

حال رابطهٔ (۱۱) را ثابت می‌کنیم. از این واقعیت که هر بازآرایش (۱۰) دقیقاً به ازای همان zهایی که به‌ازایشان (۱۰) به‌طور مطلق همگرا بود به‌طور مطلق همگراست و همان مجموع (۱۰) را دارد. (ر. ك. بخش ۶.۱۵ قضیهٔ ۳). بازآرایش خاص $p_0{}^*+p_1{}^*+\cdots$ را درنظر می‌گیریم که درآن $p_n{}^*$ برابر است با (شکل ۳۲۵)



شکل ۳۲۵. اثبات قضیهٔ ۳

$$(a_nc_0+a_0c_n)z^n+(a_nc_1+a_1c_n)z^{n+1}+\dots+(a_nc_{n-1}+a_{n-1}c_n)z^{2n-1}+a_nc_nz^{2n}$$

بدیهی است که

$$a_0c_0=p_0^*,\ (a_0+a_1z)(c_0+c_1z)=p_0^*+p_1^*$$

و درحالت کلی

$$(a_0+a_1z+\dots+a_nz^n)(c_0+c_1z+\dots+c_nz^n)=p_0^*+p_1^*+\dots+p_n^*.$$

وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند (۱۱) به دست می‌آید و بدین ترتیب قضیهٔ ۳ ثابت می‌شود. ▲

مثال ۵. حاصل ضرب کشی

مجموع سری هندسی $1+z+z^2+\dots$، وقتی $|z|<1$، برابر $1/(1-z)$ است. (ر. ك. بخش ۵.۱۵.) بنابراین ازقضیهٔ ۳ به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^2=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}z^m=(1+z+z^2+\dots)(1+z+z^2+\dots)$$

$$=1+2z+3z^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \qquad (|z|<1).$$

مسائل بخش ۱۶.۱

۱. نشان دهید که هرگاه دنبالهٔ $|c_{n+1}/c_n|$، $n=1, 2, \dots$، همگرا بوده حد آن L باشد، درآن صورت شعاع همگرایی R سری توانی (۱) برابر است با $R=1/L$ وقتی که $L>0$ و $R=\infty$ وقتی که $L=0$.

۲. نشان دهید که اگر شعاع همگرایی (۲) برابر R (که متناهی فرض می‌شود) باشد در این صورت شعاع همگرایی $\sum c_mz^{2m}$ برابر است با $\sqrt{R}$.

۳. $\sum_{n=0}^{\infty}(z-2i)^n$

۴. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^n}$

۵. $\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{z}{3}\right)^n$

۶. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!}$

۷. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

۹. $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}z^n$

۱۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ ۱۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ ۱۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ۱۵. $\sum_{n=0}^{\infty} 6^n (z-i)^n$ ۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 z^n$

۱۷. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n} z^n$ ۱۸. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n z^n$

۱۹. هر گاه $\sum c_n z^n$ به‌ازای تمام مقادیرمتناهی z همگرا باشد، نشان دهید $\sqrt[n]{|c_n|} \to 0$ وقتی که $n \to \infty$. مثال بزنید.

۲۰. درنقاطی که روی دایرهٔ همگرایی قراردارند سری ممکن است همگرا یا واگراباشد. این موضوع را در مــورد سری هندسی و سریهایی که در مسائل ۸ و ۱۴ مطرح شد به‌ازای $z=1$ و $z=-1$ تشریح کنید.

۲.۱۶ توابعی که باسری توانی نمایش داده می‌شوند

دراین بخش هدف اصلی ما نشان دادن این مطلب است که سریهای توانی توابع تحلیلی را نمایش می‌دهند (قضیهٔ ۵، همین بخش). این واقعیت راکه، بر عکس، هر تابع تحلیلی را می‌توان بایك سری توانی (به نام سری تیلور) نمایش داد در بخش بعد ثابت می‌کنیم. این هردو نشان‌دهندهٔ اهمیت سری توانی در آنالیز مختلط هستند.

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ یك سری توانی دلخواه باشعاع همگرایی غیرصفر R باشد. آنگاه مجموع این سری تابعی مانند $f(z)$ از z است و می‌نویسیم

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (|z|<R) \tag{1}$$

پس می‌گوییم که $f(z)$ باسری توانی نمایش داده شده ویا به سری توانی بسط داده شده است. مثلا سری هندسی $f(z)=1/(1-z)$ را در داخل دایـرهٔ یکه $|z|=1$ نمایش می‌دهد. (ر. ك. بخش ۵.۱۵ قضیهٔ ۲.)

قضیهٔ ۱ (پیوستگی)

تابع $f(z)$ که با (۱) معرفی شد به‌ازای $R>0$ در $z=0$ پیوسته است.

اثبات. باید نشان دهیم که

$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = c_0 \tag{2}$$

عــدد مثبت دلخــواه $r < R$ را انتخاب می‌کنیم چون سری موجــود در (۱) درقــرص $|z| < R$ به طور مطلق همگراست نتیجه می‌شود که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \qquad (0 < r < R)$$

همگراست. فرض کنید مجموع سری K باشد، دراین صورت به‌دست می‌آوریم

$$|f(z) - c_0| = \left| z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} \right| \leqslant |z| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \, |z|^{n-1} \leqslant |z| K \ (0 < |z| \leqslant r).$$

اگر یك $\varepsilon > 0$ مفروض باشد به‌ازای تمام z هــایی که در شرط $|z| < \delta$ صدق می‌کنند (δ عدد حقیقی مثبتی است کوچکتر از r و ε/K) داریم $|f(z) - c_0| < \varepsilon$. ازتعریف حد نتیجه می‌شود که (۲) برقرار است. ▲

درمرحلهٔ بعد مسئلهٔ **یکتایی** را بررسی کرده نشان می‌دهیم که یك تابع $f(z)$ را نمی‌توان با دوسری توانی متفاوت که مرکزشان یکی است نمایش داد. اگر بشود $f(z)$ را به یك سری توانی با مرکز a بسط داد این بسط یکتاست. این قضیهٔ مهم غالباً درآنالیز حقیقی ومختلط به‌کارمی‌رود ومی‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد (بافرض $a = 0$، البته بدون از دست دادن عمومیت مسئله).

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ همانی سریهای توانی)

سریهای توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید به ازای $|z| < R$، که R مثبت است، همگرا بوده به ازای همهٔ مقادیر z ($|z| < R$) مجموعهای برابر داشته بــاشند. در این صورت سریهای مزبــور یکسانند، یعنی

$$a_n = b_n \qquad \text{به‌ازای } n = 0, 1, \ldots \tag{۳}$$

اثبات. روش استقرا را به‌کارمی‌بریم: بنابه فرض

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \quad (|z| < R). \tag{۴}$$

وقتی z به‌سمت صفرمیل می‌کند، بنابه قضیهٔ ۱ داریم $a_0 = b_0$. فرض می‌کنیم که به‌ازای $n = 0, 1, \ldots, m$ داشته‌باشیم $a_n = b_n$. دراین صورت باحذف اولین $m+1$ جمله از هردوطرف (۴) وتقسیم (۴) بر $z^{m+1} (\neq 0)$ به دست می‌آوریم

$$a_{m+1} z + a_{m+2} z + a_{m+3} z^2 + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \cdots$$

بنابه قضیهٔ ۱ هریك ازاین سریهای توانی تابعی را نمایش می‌دهدکه در $z=0$ پیوسته است. ازاین‌رو $a_{m+1}=b_{m+1}$ واثبات به پایان می‌رسد. ▲

حال مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به‌جمله از سری توانی را بررسی می‌کنیم. با مشتقگیری ازسری $c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$، سری زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\dots \tag{5}$$

این سری را سری مشتق سری توانی داده شده می گویند.

قضیهٔ ۳ (مشتقگیری جمله به جمله)

شعاع همگرایی سری مشتق یك سری توانی همان شعاع همگرایی سری اصلی است.

اثبات. فرض‌کنید $nc_n=c_n^*$. در این صورت $\sqrt[n]{|c_n^*|}=\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|}$. از اینکه وقتی $n\to\infty$ داریم $\sqrt[n]{n}\to 1$ نتیجه می‌شود دنباله‌های $\sqrt[n]{|c_n^*|}$ و $\sqrt[n]{|c_n|}$ یا هردو همگرایند و حدشان یکی است، یا هردو واگرا هستند. هرگاه دنباله‌های مزبور واگرا باشند، یا هردوبیکران هستند یا هردوکراندار، و درصورتی‌که‌کراندار باشند، بزرگترین نقطهٔ حدی آنها یکی است. ازاینجا و از قضیهٔ۲ بخش۱۰.۱۶حکم قضیهٔ فوق نتیجه‌می‌شود.

مثال ۱

شعاع همگرایی سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$$

$R=1$ است. این نتیجه از مشتقگیری سری هندسی و به‌کار بردن قضیهٔ ۳ به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۴ (انتگرالگیری جمله به جمله)

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}=c_0z+\frac{c_1}{2}z^2+\frac{c_2}{3}z^3+\dots$$

که ازانتگرالگیری جمله‌به‌جملهٔ $c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$ به‌دست می‌آید دارای همان‌شعاع همگرایی سری اصلی است.

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیهٔ ۳ است.

سریهای توانی توابع تحلیلی را نمایش می‌دهند و سریهای مشتق (که از مشتقگیری جمله به‌جمله به‌دست می‌آید) مشتقهای آن توابع را نمایش می‌دهند. به‌طور دقیقتر:

قضیهٔ ۵ (توابع تحلیلی. مشتقات توابع تحلیلی)

هرسری توانی باشعاع همگرایی غیرصفر R در داخل دایرهٔ همگرایی خود تابعی تحلیلی را نمایش می‌دهد. مشتقات این تابع بامشتقگیری جمله به‌جمله ازسری اصلی به‌دست‌می‌آید، بنابراین تمام سریهایی که بدین ترتیب به‌دست می‌آیند دارای همان شعاع همگرایی سری اصلی هستند.

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم‌که به‌ازای هرعدد صحیح $n \geqslant 2$،

$$\frac{b^n - a^n}{b-a} - na^{n-1} = (b-a)A_n \qquad \text{(۶ الف)}$$

که در آن

$$A_n = b^{n-2} + 2ab^{n-3} + 3a^2b^{n-4} + \dots + (n-1)a^{n-2}. \qquad \text{(۶ ب)}$$

روش‌استقرار رابه‌کارمی‌بریم. یك‌محاسبهٔ‌ساده نشان‌می‌دهد‌که(۶)به‌ازای $n=2$ صادق‌است. به‌فرض اینکه (۶) به‌ازای $n=k$ صادق است نشان می‌دهیم‌که به‌ازای $n=k+1$ نیز صادق است. داریم

$$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a} = \frac{b^{k+1}-ba^k+ba^k-a^{k+1}}{b-a} = b\frac{b^k-a^k}{b-a} + a^k.$$

بنابه فرض استقرا، سمت راست رابطه برابراست با

$$b[(b-a)A_k + ka^{k-1}] + a^k.$$

محاسبه نشان می‌دهد‌که این رابطه برابر است با

$$(b-a)\{bA_k + ka^{k-1}\} + ka^k + a^k.$$

بافرض $n=k$ از (۶ ب) نتیجه می‌گیریم‌که عبارت داخل آکولاد برابر است با

$$b^{k-1} + 2ab^{k-2} + \dots + (k-1)ba^{k-2} + ka^{k-1} = A_{k+1}.$$

ازاین رو نتیجه عبارت است از

$$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a} = (b-a)A_{k+1} + (k+1)a^k,$$

که همان (۶) است با $n=k+1$. بنابراین (۶) به‌ازای هر $n \geqslant 2$ ثابت می‌شود.

برای اثبات حکمهای قضیهٔ ۵ قرارمی‌دهیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

بافرض آنکه شعاع همگرایی R صفر نباشد، وثابت می کنیم که به‌ازای هر z مشخص که $|z|<R$ و $\Delta z \to 0$ خارج قسمت تفاضلی $[f(z+\Delta z)-f(z)]/\Delta z$ به‌سمت تابعی که باسری مشتق (۵) نمایش داده شده است وآن را با $f_1(z)$ نشان می‌دهیم میل می‌کند. نخست باجمع جمله به جمله داریم

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f_1(z)=\sum_{n=2}^{\infty} c_n\left[\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}-nz^{n-1}\right]$$

بافرض $b=z+\Delta z$، $a=z$ و $b-a=\Delta z$ از (۶) نتیجه می گیریم که سری سمت راست‌را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Delta z\sum_{n=2}^{\infty} c_n[(z+\Delta z)^{n-2}+2z(z+\Delta z)^{n-3}+\dots+(n-1)z^{n-2}],$$

و به‌ازای $|z|\leqslant R_0$ و $|z+\Delta z|\leqslant R_0$، $R_0<R$ قدر مطلق این عبارت نمی‌تواند بیشتر از

$$|\Delta z|\sum_{n=2}^{\infty}|c_n|n(n-1)R_0^{\,n-2} \tag{۷}$$

باشد، دراین رابطه $n-1$ بزرگترین ضریب دربین ضرایب $1, 2, \dots, n-1$ است و n تعداد جملات است. سری (۷) باسری مشتق دوم سری موردبحث که در R_0 محاسبه شده است ارتباط نزدیکی دارد. در واقع سری مشتق دارای ضرایب c_n[به‌جای $|c_n|$ در (۷)] است و بنابه قضیهٔ ۳ی این بخش وقضیهٔ ۱ بخش قبل در $R_0(<R)$ به‌طور مطلق همگراست. این امر ایجاب می کند که سری موجود (۷) در R_0 همگرا باشد، مقدارسری را $K(R_0)$ می گیریم. دراین صورت می‌توان نتیجه را به‌صورت زیر نوشت:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f_1(z)\right|\leqslant|\Delta z|K(R_0)$$

باقرار دادن $\Delta z \to 0$ وبا توجه به اینکه $R_0(<R)$ دلخواه است، نتیجه می گیریم که $f(z)$ در هرنقطه‌ای واقع در داخل دایرهٔ همگرایی تحلیلی است ومشتق آن باسری مشتق نشان داده می‌شود. همین حکم درمورد مشتقات بالاتر به‌روش استقرا ثابت می‌شود. ▲

ازقضیهٔ ۵ نتیجه می گیریم که $f^{(m)}(z)$ مشتق mام تابع $f(z)$ که با (۱) نمایش داده شده، عبارت است از

$$f^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)c_n z^{n-m} \quad (|z|<R). \tag{۸}$$

دربخش بعد خواهیم دید که هرتابع تحلیلی را می‌توان با سری توانی نمایش‌داد.

مسائل بخش ۲۰۱۶

۱. هر گاه در (۱) $f(z)$ زوج باشد، نشان دهید که به‌ازای همهٔ n های فرد داریم $C_n=0$ (از قضیهٔ ۲ استفاده کنید).

۲. هر گاه در (۱) $f(z)$ فرد باشد، نشان دهید که به‌ازای همه n های زوج داریم $c_n=0$ (مثال بزنید).

۳. با به کار بردن قضیهٔ ۲ در مورد $(1+z)^p(1+z)^q=(1+z)^{p+q}$ (p و q اعداد صحیح مثبت هستند) نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{r}\binom{p}{n}\binom{q}{r-n}=\binom{p+q}{r}$$

۴. صحت قضایای ۳ و ۴ را درمورد سری هندسی و سریهایی که درمثال ۲ بخش ۱۰۱۶ آمده‌اند تحقیق کنید.

با به‌کار بردن قضایای ۳ و ۴ را درمورد سری هندسی، شعاع همگرایی سریهای زیر را پیدا کنید

۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}(z-i)^n$ ۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{n}$ ۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}(z+2i)^n$

۸. $\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ ۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1}z^{n+k}$ ۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1}\left(\frac{z}{3}\right)^n$

۳۰۱۶ سری تیلور

درحساب دیفرانسیل وانتگرال‌حقیقی سری معروف تیلور ابزار مؤثری است. حال‌خواهیم دیدکه در آنالیز مختلط بسط تیلوری وجود داردکه تعمیمی ازسری تیلورحقیقی است و اهمیت آن حتی بیشتراست.

تابعی مانند $f(z)$ را درنظر بگیریدکه دریك همسایگی نقطهٔ $z=a$ تحلیلی‌است. فرض‌کنید C دایره‌ای باشدکه دراین همسایگی قرار دارد و مرکزش a است. دراین صورت می‌توانیم فرمول انتگرال کوشی (۱)، بخش ۵۰۱۴، را به‌کاربریم؛ وبا قرار دادن z و z^* به‌جای z_0 و z به‌دست آوریم

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z^*)}{z^*-z}\,dz^* \qquad (1)$$

در اینجا z نقطهٔ مشخص دلخواهی است در داخل C، و z^* متغیر مختلط انتگرالگیری است (ر. ك. شکل ۳۲۶). حال می‌توانیم دررابطهٔ (۱) عبارت $1/(z^*-z)$ را برحسب

توانهای $z-a$ بسط دهیم. نخست داریم

$$\frac{1}{z^*-z}=\frac{1}{z^*-a-(z-a)}=\frac{1}{(z^*-a)\left(1-\frac{z-a}{z^*-a}\right)} \cdot \qquad (۲)$$

برای استفاده‌های بعدی یادآوری می‌کنیم که چون z^* روی C قرار دارد، درحالی‌که z در داخل C است، داریم

$$\left|\frac{z-a}{z^*-a}\right|<1 \cdot \qquad (۳)$$

با استفاده از تصاعد هندسی

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (q\neq 1)$$

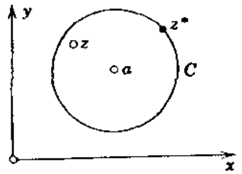
رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{1-q}=1+q+\cdots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q} \cdot$$

باقرار دادن $q=(z-a)/(z^*-a)$ می‌یابیم

$$\frac{1}{1-[(z-a)/(z^*-a)]}=1+\frac{z-a}{z^*-a}+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^2+\cdots$$
$$+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^n+\frac{[(z-a)/(z^*-a)]^{n+1}}{(z^*-z)/(z^*-a)} \cdot$$

این مقدار را در (۲) قرارمی‌دهیم وسپس (۲) را در (۱) می‌گذاریم. ازآنجا که z و a ثابت هستند می‌توانیم توانهای $z-a$ را از زیرعلامت انتگرال خارج کنیم و (۱) را به‌صورت



شکل ۳۲۶. نمایش (۱)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{z^*-a}dz^*+\frac{z-a}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^2}dz^*+\cdots$$

$$+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}dz^*+R_n(z) \qquad (۴)$$

درآوریم که جملهٔ آخر آن برابراست با

$$R_n(z)=\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}dz^* \cdot \qquad (۵)$$

بااستفاده از (۱)، بخش ۶.۱۴، می‌توانیم این بسط را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

$$+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(z).$$

این نمایش را **فرمول تیلور**[۱] می‌نامند. $R_n(z)$ باقیمانده نام دارد. چون تابع تحلیلی $f(z)$ مشتق ازتمام مراتب دارد می‌توان n را در (۶) به دلخواه بزرگ گرفت. اگر n به سمت بینهایت میل کند از (۶) سری توانی

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m. \qquad (۷)$$

به دست می‌آید. این‌سری را **سری تیلوری** $f(z)$ با مرکز a می‌نامند. حالت خاصی که‌در آن $a=0$، سری **مك لورن**[۲] $f(z)$ نامیده می‌شود.

بدیهی است سری (۷) همگرا بوده $f(z)$ را نمایش خواهد داد اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z)=0 \cdot \qquad (۸)$$

برای اثبات (۸) از (۵) استفاده می‌کنیم. چون z^* برروی C قرار دارد، درحالی که z در داخل C است داریم $|z^*-z|>0$. چون $f(z)$ در داخل C و روی C تحلیلی است نتیجه می‌شود که قدرمطلق $f(z^*)/(z^*-z)$ کراندار است، مثلا برای هر z^* روی C داریم

---

۱. بروك تیلور Brook Taylor (۱۶۸۵ ـ ۱۷۳۱)، ریاضیدان انگلیسی که فرمول بالا را برای توابع بایك متغیرحقیقی به‌کاربرد.

۲. کالین مك لورن Colin Maclaurin (۱۶۹۸ ـ ۱۷۴۶)، ریاضیدان اسکاتلندی.

$$\left|\frac{f(z^*)}{z^*-z}\right|<\widetilde{M}$$

فرض‌کنید r شعاع C باشد. دراین صورت برای هر z^*ی که روی C باشد داریم $|z^*-a|=r$ وطول C برابر $2\pi r$ است. به‌این ترتیب با به‌کاربردن (۴) بخش ۲۰۱۴ درمورد (۵) ازاین بخش به دست می‌آوریم

$$|R_n|=\frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\left|\int_C\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}\,dz^*\right|$$

$$<\frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\,\widetilde{M}\,\frac{1}{r^{n+1}}\,2\pi r=\widetilde{M}r\,\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1}$$

اگر n به سمت بینهایت میل کند، از (۳) نتیجه می‌شود که عبارت طرف راست به سمت صفرمیل می‌کند. بدین‌ترتیب برای هر zی که داخل C باشدکه رابطهٔ (۸) ثابت می‌شود. چون، بنا به قضیهٔ ۲ از بخش قبل، نمایش $f(z)$ به صورت (۷) یکتاست به این معنی که (۷) تنهاسری توانی به‌مرکز a است که تابع مفروض $f(z)$ را نمایش می‌دهد، می‌توانیم نتیجه را به‌صورت زیرجمعبندی کنیم:

قضیهٔ تیلور

فرض کنید $f(z)$ در یك حوزهٔ D تحلیلی باشد و $z=a$ را نقطه‌ای در D فرض‌کنید. در این صورت دقیقاً یك سری توانی به‌مرکز a وجود دارد که $f(z)$ را نمایش می‌دهد؛ این سری به‌صورت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n \tag{۹}$$

است که درآن

$$b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \qquad n=0,\ 1,\ \cdots;$$

این نمایش در بزرگترین قرص بازی که مرکز آن a است و در D واقع است اعتبار دارد. $R_n(z)$ ها، باقیمانده‌های (۹)، را می‌توان به صورت (۵) نمایش داد. ضرایب (۹) در نامساوی

$$|b_n|\leqslant\frac{M}{r^n} \tag{۱۰}$$

صدق می‌کند که درآن M بیشترین مقدار $|f(z)|$ روی دایرهٔ $|z-a|=r$ است. رابطهٔ (۱۰) از نامساوی کشی (۴)، بخش ۶۰۱۴، نتیجه می‌شود.

عملا معنی (۸) آن است که به‌ازای همهٔ zهایی که (۹) به‌ازای آنها همگرا باشد nامین مجموع جزئی (۹)، $f(z)$ را با هردقت دلخواهی تقریب خواهد زد؛ تنها کاری که ما باید بکنیم این است که n را به‌اندازه‌کافی بزرگ بگیریم.

باتوجه به‌قضیهٔ تیلورملاحظه می‌کنیم که‌شعاع همگرایی (۹) حداقل برابرکوتاهترین فاصلهٔ بین a وکرانهٔ D است. این شعاع می‌تواند بزرگتر هم باشد اما در این صورت سری ممکن است دیگر $f(z)$ را درتمام نقاط D که در داخل دایرهٔ همگرایی قرار دارد نمایش ندهد.

یك خاصیت جالب توابع تحلیلی مختلط این است که دارای مشتق از هرمرتبه‌ای هستند و در اینجا خاصیت جالب دیگری کشف کردیم، که این توابع را همیشه می‌توان به‌صورت سری توانی (۹) نمایش داد. درحالت کلی‌توابع حقیقی این خاصیت‌راندارند؛ توابعی حقیقی وجود دارندکه دارای مشتق از هرمرتبه‌ای هستند اما نمی‌توان آنها را با سری‌توانی‌نمایش داد (مثال: $f(x)=\exp(-1/x^{2})$ وقتی‌که $x\neq 0$ و $f(0)=0$. برای توضیحات بیشتر مرجع [A۲ ، صفحهٔ ۱۲۸] ضمیمهٔ ۱ را ببینید.)

قضیهٔ زیر ارتباطی بین این بحث و بحث بخش قبل که دربارهٔ سری توانی بود برقرار می‌سازد.

قضیهٔ ۲

هرسری توانی که شعاع همگرایی آن غیرصفر باشد سری تیلور تابعی است که با آن سری توانی نمایش داده می‌شود.

اثبات. فرض‌کنید سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

دارای شعاع همگرایی غیرصفر R باشد. دراین صورت این سری تابعی تحلیلی مانند $f(z)$ را درقرص $|z-a|<R$ نمایش می‌دهد، یعنی

$$f(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots$$

از قضیهٔ ۵، بخش ۲.۱۶، نتیجه می‌شودکه

$$f'(z)=b_1+2b_2(z-a)+\cdots$$

و کلیتر

$$f^{(n)}(z)=n!\,b_n+(n+1)n\cdots 3\times 2b_{n+1}(z-a)+\cdots;$$

تمام این سریها درقرص $|z-a|<R$ همگرا هستند وتوابع تحلیلی را نمایش‌می‌دهند. از این رو این توابع در $z=a$ پیوسته‌اند. باقراردادن $z=a$ به‌دست می‌آوریم

$$f(a)=b_0,\ f'(a)=b_1,\ \cdots,\ f^{(n)}(a)=n!\,b_n,\ \cdots.$$

چون این فرمولها همانند فرمولهای قضیهٔ تیلورند، اثبات کامل است. ▲

نقطه‌ای که در آن $f(z)$ خاصیت تحلیلی بودن خود را ازدست می‌دهد **نقطهٔ تکین** $f(z)$ نامیده می‌شود؛ همچنین می گوییم $f(z)$ درچنین نقطه‌ای **تکینی** دارد. به عبارت دقیقتر: نقطهٔ $z=z_0$ را نقطهٔ تکین $f(z)$ نامند، اگر $f(z)$ در z_0 مشتقپذیر نباشد اما هرهمسایگی z_0 شامل نقاطی باشد که $f(z)$ درآنها مشتقپذیر است.

با استفاده ازاین مفهوم می‌توان گفت که $f(z)$ حداقل یک نقطهٔ تکین روی دایرهٔ همگرایی[1] بسط (۹) دارد.

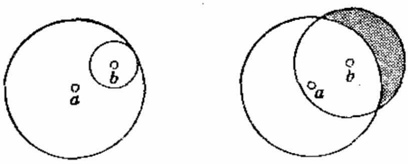
قبل ازآنکه مثالها و جنبه‌های عملی سری تیلور را مورد بحث قرار دهیم، مفاهیم **بسط حول مراکزمختلف** و **ادامهٔ تحلیلی** را ذکرمی کنیم. فرض کنید یك سری توانی‌از توانهای $z-a$ باشعاع همگرایی غیرصفر R ومجموع $f(z)$ دراختیار داديم؛ بنابراین

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n. \tag{۱۱}$$

ازقضیهٔ ۵، بخش ۲۰۱۶، می‌دانیم که $f(z)$ درقرص $|z-a|<R$ تحلیلی است.ازقضیهٔ ۲ی همین بخش نتیجه می گیریم که سری (۱۱) سری تیلور $f(z)$ با مرکز a است. حال می‌توانیم نقطهٔ دلخواهی مانند b درآن قرص انتخاب کنیم وبا استفاده از قضیه تیلور بسط زیر را به‌دست‌آوریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n; \tag{۱۲}$$

ضرایب این بسط از (۱۱) بامشتقگیری وقراردادن $z=b$ حاصل می‌شوند:



شکل ۳۲۷. بسط حول مراکز مختلف و ادامهٔ تحلیلی

---

۱. شعاع همگرایی (۹) درحالت کلی برابر است با فاصلهٔ a از نزدیکترین نقطهٔ تکین $f(z)$، اما ممکن است این شعاع بزرگتر باشد، مثلا، $\operatorname{Ln} z$ درطول محورحقیقی منفی تکین است، وفاصلهٔ $a=-1+i$ از آن محور برابر ۱ است درحالی که شعاع همگرایی سری تیلور $\operatorname{Ln} z$ بامرکز $a=-1+i$ برابر $\sqrt{2}$ است.

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(b) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{n}{k} a_k (b-a)^k.$$

این بسط حداقل درقرص $|z-b| < R-|b|$ کــه درشکل ۳۲۷ الف نشان داده شده صادق است. معذلك در موارد بسیاری شعاع همگرایی (۱۲) همچنانکه در شکل ۳۲۷ ب نشان داده شده بزرگتر از $R-|b|$ است،بنابراین (۱۲) به‌یك «توسعه» یا «ادامهٔ» $f(z)$ به‌نقاط خارج‌قرص $|z-a| < R$ (قسمتی که درشکل ۳۲۷ب سایه زده شده است) منجر می‌شود. فرآیند توسعهٔ یك تابع تحلیلی که با یك سری توانی درناحیهٔ همگرایی داده شده است به‌ناحیه‌ای خارج ازآن ناحیه **ادامهٔ تحلیلی** نامیده می‌شود.

۴.۱۶ سری تیلور توابع مقدماتی

مثال ۱. سری هندسی

هرگـاه داشته بـاشیم $f(z) = 1/(1-z)$ ، آنگاه داریم $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$، $f^{(n)}(0) = n!$ ، از این روبسط مك‌لورن $1/(1-z)$ عبارت است ازسری هندسی

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1). \tag{1}$$

$f(z)$ در $z = 1$ تکین است. این نقطه روی دایرهٔ همگرایی قرار دارد.

مثال ۲. تابع نمایی

می‌دانیم کــه تابع نمایی e^z (بخش ۷.۱۲) به‌ازای تمام zها تحلیلی است و $(e^z)' = e^z$ بنابراین از (۹)، بخش ۳.۱۶، با قرار دادن $a = 0$ سری مك‌لورن به‌دست می‌آید:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots. \tag{2}$$

همچنین می‌توان سری مزبور را باجایگزین‌کردن z به‌جای x درسری مك‌لورن e^x بــه دست آورد.

اکنون ببینیم چگونه فرمول ضرب

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{3}$$

با استفاده از (۲) اثبات می‌شود. داریم

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{z_1}^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{{z_2}^m}{m!}.$$

چون هردو سری به طورمطلق همگرا هستند می‌توان آنها را جمله به‌جمله درهم ضرب کرد

و مجموع حاصل ضربهایی که درمورد آنها داریم $k+m=n$، عبارت است از

$$\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!}+\dots+\frac{z_1}{1!}\frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{z_2^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{n!}\left[z_1^n+\binom{n}{1}z_1^{n-1}z_2+\binom{n}{2}z_1^{n-2}z_2^2+\dots+z_2^n\right]=\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

بنابراین حاصل ضرب دوسری را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2}$$

و (۳) ثابت می‌شود.

از این گذشته باقراردادن $z=iy$ در(۲)و به‌کاربردن قضیهٔ۱، بخش ۶.۱۵ به‌دست می‌آوریم

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ازآنجاکه سریهای سمت راست بسطهای مک‌لورن توابع حقیقی $\cos y$ و $\sin y$ هستند عبارت بالا بیان دیگری ازفرمول اویلر

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

است، ر.ک. (۸)، بخش ۷.۱۲ با ضرب کردن عبارت بالا در e^x و با استفاده از (۳)، فرمول (۴)، بخش ۷.۱۲ راکه برای تعریف e^z به‌کار برده بودیم به‌دست می‌آوریم. ملاحظات اخیر نشان می‌دهد که می‌توان(۲) را برای تعریف e^z به‌کاربرد و از آن تمام فرمولهای بخش ۷.۱۲ رانتیجه گرفت.

مثال ۳. توابع مثلثاتی و هیپربولیک

باقراردادن (۲) در (۱)، بخش ۸.۱۲، به‌دست می‌آوریم

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\dots$$

(۵)

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\dots$$

به‌ازای $z=x$ اینها سریهای مک لورن توابع حقیقی $\cos x$ و $\sin x$ هستند. به‌گونه‌ای

مشابه باقراردادن (۲) در (۱۱)، بخش ۸.۱۲، به‌دست می‌آوریم

$$(6)\qquad \cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$$

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots.$$

مثال ۴. لگاریتم

از (۹)، بخش ۳.۱۶، نتیجه می‌شود که

$$(7)\qquad \mathrm{Ln}(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-+\cdots\qquad (|z|<1).$$

باقراردادن $-z$ به‌جای z وضرب‌کردن دوطرف در -1 داریم

$$(8)\qquad -\mathrm{Ln}(1-z)=\mathrm{Ln}\frac{1}{1-z}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\qquad (|z|<1).$$

باجمع‌کردن دوسری به‌دست می‌آوریم

$$\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}=2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right)\qquad (|z|<1).$$

مسائل بخش ۴.۱۶

۱. بااستفاده از (۲) ثابت کنید $(e^z)'=e^z$.

۲. (۵) و (۶) را از (۲) نتیجه بگیرید. ازقضیهٔ تیلور، (۷) را به‌دست آورید.

۳. بااستفاده از (۵) نشان دهید که $\cos z$ زوج و $\sin z$ فرد است.

۴. بااستفاده از (۶) نشان دهید که به‌ازای هر $z=x$ حقیقی، $\cosh z\neq 0$.

سری تیلور توابع زیر را نسبت به‌نقطهٔ $z=a$ پیداکرده و شعاع همگرایی را معین کنید.

۵. $\cos 2z,\ a=0$ **۶.** $\sin z^2,\ a=0$ **۷.** $e^{-z},\ a=0$

۸. $e^z,\ a=1$ **۹.** $e^z,\ a=\pi i$ **۱۰.** $\sin z, a=\pi/2$

۱۱. $\cos z,\ a=-\pi/4$ **۱۲.** $1/(1-z), a=-1$ **۱۳.** $1/z,\ a=-1$

۱۴. $1/(1-z),\ a=i$ **۱۵.** $\cos^2 z,\ a=0$ **۱۶.** $\sin^2 z,\ a=0$

سه‌جملهٔ اول سری مك لورن توابع زیر را پیدا کنید.

۱۷. $\tan z$ ۱۸. $e^z \sin z$ ۱۹. $z \cot z$

سریهای مك لورن را بـا انتگرالگیری جمله به‌جمله ازانتگران پیدا کنید. ($\operatorname{erf} z$ را **تابع خطا** ، $\operatorname{Si}(z)$ را **انتگرال سینوسی** ، و $S(z)$ و $C(z)$ را **انتگرالهای فرنل** می‌نامند. ر. ك. بخش ۱۵.۱۹، ضمیمهٔ ۳.)

۲۰. $\int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt$ ۲۱. $\int_0^z \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ ۲۲. $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$

۲۳. $\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$ ۲۴. $S(z) = \int_0^z \sin t^2 \, dt$ ۲۵. $C(z) = \int_0^z \cos t^2 \, dt$

۵.۱۶ روشهای عملی برای به‌دست آوردن سری توانی

دربیشترمسائل عملی تعیین ضرایب سری تیلور به‌کمك فرمول قضیهٔ تیلورپیچیده و وقتگیر است. روشهای عملی ساده‌تری برای تعیین ضرایب سری تیلور وجود داردکه آنها را با مثالهای زیرتشریح می‌کنیم. یکتایی نمایشهایی که به‌این ترتیب حاصل می‌شونداز قضیهٔ ۲، بخش ۲.۱۶، نتیجه می‌شود.

مثال ۱. جاگذاری

سری مك‌لورن $f(z) = 1/(1+z^2)$ را بیابید. بـاقرار دادن $-z^2$ به‌جای z در (۱)، بخش ۴.۱۶، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \tag{1}$$

$$= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

مثال ۲. انتگرالگیری

فرض کنید $f(z) = \tan^{-1} z$. داریم $f'(z) = 1/(1+z^2)$. باانتگرالگیری جمله به‌جمله از (۱) وبا توجه به‌اینکه $f(0) = 0$، پیدا می‌کنیم

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots \quad (|z| < 1);$$

این سری مقدار اصلی $w = u + iv = \tan^{-1} z$ راکه به‌ازای آن داریم $|u| < \pi/2$،

نمایش می‌دهد.

مثال ۳. بسط توابع با استفاده ازسری هندسی

$1/(c-bz)$ را برحسب توانهای $z-a$ بسط دهید درصورتی که $c-ab\neq 0$ و $b\neq 0$.
بدیهی است که

$$\frac{1}{c-bz}=\frac{1}{c-ab-b(z-a)}=\frac{1}{(c-ab)\left[1-\frac{b(z-a)}{c-ab}\right]}$$

درمورد عبارت آخر، فرمول (۱) از بخش ۴.۱۶ راکه درآن به جای z قرار داده‌ایم $b(z-a)/(c-ab)$ به‌کار می‌بریم و می‌یابیم

$$\frac{1}{c-bz}=\frac{1}{c-ab}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{b(z-a)}{c-ab}\right]^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n}}{(c-ab)^{n+1}}(z-a)^{n}$$

$$=\frac{1}{c-ab}+\frac{b}{(c-ab)^{2}}(z-a)+\frac{b^{2}}{(c-ab)^{3}}(z-a)^{2}+\cdots.$$

این سری به‌ازای

$$\left|\frac{b(z-a)}{c-ab}\right|<1 \text{ ، یعنی } |z-a|<\left|\frac{c-ab}{a}\right|=\left|\frac{c}{b}-a\right|$$ همگراست.

مثال ۴. سری دوجمله‌ای، تحویل به‌کسرهای جزئی

سری تیلور تابع

$$f(z)=\frac{2z^{2}+9z+5}{z^{3}+z^{2}-8z-12}$$

را پیدا کنید؛ مرکزسری را $z=1$ بگیرید.

هرتابع گویای مفروض را می‌توان نخست به‌صورت مجموع کسرهای جزئی نمایش داد وسپس سری دوجمله‌ای

$$\frac{1}{(1+z)^{m}}=(1+z)^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}z^{n}$$

$$=1-mz+\frac{m(m+1)}{2!}z^{2}-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^{3}+\cdots \qquad (2)$$

را به‌کار برد. چون تـابع سمت چپ در $z=-۱$ تکین است، سری درقرص $|z|<۱$ همگراست. برای حالت موردنظر به‌دست می‌آوریم

$$f(z)=\frac{۱}{(z+۲)^۲}+\frac{۲}{z-۳}=\frac{۱}{[۳+(z-۱)]^۲}-\frac{۲}{۲-(z-۱)}\cdot$$

این را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$f(z)=\frac{۱}{۹}\left(\frac{۱}{[۱+\frac{۱}{۳}(z-۱)]^۲}\right)-\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}(z-۱)}\cdot$$

با استفاده ازسری دوجمله‌ای به‌دست می‌آوریم

$$f(z)=\frac{۱}{۹}\sum_{n=۰}^{\infty}\binom{-۲}{n}\left(\frac{z-۱}{۳}\right)^n-\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{z-۱}{۲}\right)^n\cdot$$

دوسری سمت راست را می‌توان جمله به‌جمله جمع کرد. چون ضریب دوجمله‌ای درسری اول برابر است بـا $(-۲)(-۳)\ldots(-[n+۱])/n!=(-۱)^n(n+۱)$، پیـدا می‌کنیم

$$f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty}\left[\frac{(-۱)^n(n+۱)}{۳^{n+۲}}-\frac{۱}{۲^n}\right](z-۱)^n$$

$$=-\frac{۸}{۹}-\frac{۳۱}{۵۴}(z-۱)-\frac{۲۳}{۱۰۸}(z-۱)^۲-\ \ldots\ .$$

چون $z=۳$ نزدیـکترین نقطهٔ تکین $f(z)$ بـه مـرکـز $z=۱$ است، سری درقـرص $|z-۱|<۲$ همگراست.

مثال ۵ . استفاده ازمعادلات دیفرانسیل

سری مك لورن $f(z)=\tan z$ را پیدا کنید. داریم $f'(z)=\sec^۲ z$، و بنابراین

$$f'(z)=۱+f^۲(z),\qquad f'(۰)=۱$$

با توجه به‌اینکه $f(۰)=۰$، با مشتقگیریهای پی‌درپی به‌دست می‌آوریم

$$f''=۲ff',\qquad f''(۰)=۰,$$

$$f'''=۲f'^۲+۲ff'',\qquad f'''(۰)=۲,\qquad f'''(۰)/۳!=۱/۳,$$

$$f^{(۴)}=۶f'f''+۲ff''',\qquad f^{(۴)}(۰)=۰,$$

$$f^{(۵)}=۶f''^۲+۸f'f'''+۲ff^{(۴)},\ f^{(۵)}(۰)=۱۶,\ f^{(۵)}(۰)/۵!=۲/۱۵,$$

وغیره. بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$(۳) \qquad \tan z = z + \frac{۱}{۳}z^{۳} + \frac{۲}{۱۵}z^{۵} + \frac{۱۷}{۳۱۵}z^{۷} + \cdots \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{۲}\right).$$

مثال ۶. ضرایب نامشخص

سری مك‌لورن $\tan z$ را با استفاده از سریهای مك‌لورن $\cos z$ و $\sin z$ (بخش ۴.۱۶) پیدا کنید. چون $\tan z$ فرد است، بسط مطلوب به‌صورت

$$\tan z = b_{۱}z + b_{۳}z^{۳} + b_{۵}z^{۵} + \cdots$$

خواهد بود. بااستفاده از $\sin z = \tan z \cos z$ به‌دست می‌آوریم

$$z - \frac{z^{۳}}{۳!} + \frac{z^{۵}}{۵!} - + \cdots = (b_{۱}z + b_{۳}z^{۳} + b_{۵}z^{۵} + \cdots)\left(۱ - \frac{z^{۲}}{۲!} + \frac{z^{۴}}{۴!} - + \cdots\right).$$

چون $\tan z$ درهمه جا تحلیلی است جز در $z = \pm\pi/۲, \pm ۳\pi/۲, \ldots$؛ سری مك لورن آن درقرص $|z| < \pi/۲$ همگراست، و به ازای این zها می‌توانیم دو سری سمت‌راست راجمله‌به‌جمله درهم‌ضرب کنیم وسری حاصل‌را برحسب توانهای z مرتب کنیم (ر. ك. قضیهٔ ۳ بخش ۱.۱۶). بنا به‌قضیهٔ ۲ بخش ۲.۱۶، ضریبهای هرتوان z در دوطرف با هم مساویند. بنابراین

$$۱ = b_{۱}, \quad -\frac{۱}{۳!} = -\frac{b_{۱}}{۲!} + b_{۳}, \quad \frac{۱}{۵!} = \frac{b_{۱}}{۴!} - \frac{b_{۳}}{۲!} + b_{۵}$$

و غیره. پس مانند سابق داریم $b_{۱} = ۱$، $b_{۳} = \frac{۱}{۳}$، $b_{۵} = \frac{۲}{۱۵}$ و غیره.

مسائل بخش ۵.۱۶

سری مك لورن توابع زیررا پیدا کنید.

۱. $\dfrac{۱}{۱ + z^{۴}}$ ۲. $\dfrac{۱}{۱ - z^{۳}}$ ۳. $\dfrac{۱}{۱ + z^{۳}}$

۴. $\dfrac{۱}{۱ - z^{۶}}$ ۵. $\dfrac{۱}{(۱ + z^{۲})^{۲}}$ ۶. $\dfrac{۴z^{۲} + ۳۰z + ۶۸}{(z + ۴)^{۲}(z - ۲)}$

۷. $\cos z^{۲}$ ۸. $e^{z^{۲} - z}$ ۹. $e^{z^{۴}}$

چند جملهٔ اول سری مك لورن توابع زیررا پیدا کنید.

۱۰. $\dfrac{\cos z}{1-z^2}$ ۱۱. $e^{z^2}\sin z^2$ ۱۲. $e^{z^2}/\cos z$

۱۳. $e^{1/(1-z)}$ ۱۴. $\cos\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$ ۱۵. $e^{(e^z)}$

سری تیلور توابع داده‌شده را حول نقطهٔ $z=a$ پیدا کنید.

۱۶. $\dfrac{1}{2z-i}$, $a=-1$ ۱۷. $\dfrac{1}{4-3z}$, $a=1+i$

۱۸. $\dfrac{2-3z}{2z^2-3z+1}$, $a=-1$ ۱۹. $\dfrac{1}{(1+z)^2}$, $a=-i$

۲۰. $\dfrac{1}{(2+3z^2)^2}$, $a=0$ ۲۱. $\tan z, a=\dfrac{\pi}{4}$

۲۲. با بسط $1/\sqrt{1-z^2}$ وانتگرالگیری، نشان دهید که

$$\sin^{-1}z=z+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3}+\left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)\frac{z^5}{5}+\left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)\frac{z^7}{7}+\cdots\ (|z|<1).$$

نشان دهید این سری مقداراصلی $\sin^{-1}z$ را نمایش می‌دهد (تعریف مقداراصلی درمسئلهٔ ۳۵ بخش ۹.۱۲ آمده‌است).

۲۳. **(اعداد اویلر)** سری مك لورن

$$\sec z=E_0-\frac{E_2}{2!}z^2+\frac{E_4}{4!}z^4-+\cdots \tag{4}$$

اعداد اویلر E_{2n} را تعریف می کند. نشان دهید که $E_0=1$، $E_2=-1$، $E_4=5$، $E_6=-61$.

۲۴. **(اعداد برنولی)** سری مك لورن

$$\frac{z}{e^z-1}=1+B_1z+\frac{B_2}{2!}z^2+\frac{B_3}{3!}z^3+\cdots \tag{5}$$

معرف اعداد برنولی B_n است. با استفاده ازروش ضرایب نامشخص نشان دهید[1]

---

۱. جداول مربوطه را می توانید درمرجع زیر پیدا کنید،
J. W. L. Glaisher, *Quarterly Journal Math.* 29. 1898, 1–188.

$$(\text{۶})\quad B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ \cdots$$

۲۵. با استفاده از (۱)، (۲)، بخش ۸.۱۲ و (۵) نشان دهید که

$$(\text{۷})\quad \tan z=\frac{2i}{e^{2iz}-1}-\frac{4i}{e^{4iz}-1}-i$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{2n}z^{2n-1}.$$

۶.۱۶ همگرایی یکنوا

فرض کنید می‌دانیم که یك سری مفروض درناحیهٔ مشخص R همگراست. سؤالی که باقی می‌ماند این است که آیا همگرایی درسراسر ناحیه به‌اندازهٔ کافی سریع هست و یا نقاطی یافت می‌شوند که در حوالی آنها همگرایی کم می‌شود. اهمیت عملی این سؤال در رابطه با محاسبات عددی واضح است اما چنانکه خواهیم دید جنبهٔ نظری سؤال حتی بهتراست. موضوع را با ذکر چند مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱

فرض کنید بخواهیم e^x را دربازهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$، مثلا به‌ازای $x=0,\ 0.1,\ 0.2,\ \ldots$، محاسبه کنیم و بخواهیم که قدرمطلق خطای هرمقدار کمتر ازعدد مفروض ε، مثلا کمتر از ۱/۲ واحد درششمین رقم اعشاری باشد. می‌توانیم مجموع جزئی مناسب

$$s_n=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

سری مك‌لورن‌را به‌کار بریم. دراین صورت قدرمطلق خطا برابراست با $|R_n|=|s-s_n|$ که درآن $s=e^x$ مجموع سری است، و باید n را طوری انتخاب کنیم که

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon(=5\times10^{-7}).$$

ازمسئلهٔ ۲۰ بخش ۵.۱۵ نتیجه می‌شود وقتی $x=1$، به‌ازای $n=10$ و بنابراین به‌ازای هر $n>N=9$ دقت لازم‌را خواهیم داشت. حال قدرمطلق باقیمانده با کم شدن $x(\geqslant 0)$ کم می‌شود و بنابراین

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon \quad \text{به‌ازای} \quad n>N(\varepsilon)(=9) \ \text{و هر}\ x.$$

توجه کنید که، البته، N به ε بستگی دارد و اگر مقادیر دقیقتری بخواهیم طوری که ε

کوچکترباشد آنگاه N بزرگترخواهد بود.

مثال ۲

درمورد سری هندسی $\dots + z^{۲} + z + ۱$ باقیمانده عبارت است از

$$R_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{m=n+۱}^{\infty} z^m = \frac{z^{n+۱}}{۱ - z};$$

این مقداربه‌ازای $z = x(< ۱)$ حقیقی که به‌اندازهٔکافی به ۱ نزدیك باشد بزرگ خواهد بود. از این‌رو وقتی خطای ماکزیمم ε از قبل معین شده باشد نمی‌توانیم عددی مانند N راکه فقط به ε بستگی دارد طوری بیابیم که به‌ازای $n > N$ وکلیهٔ xهای متعلق به بازهٔ $۰ \leqslant x < ۱$ بتوان نوشت $|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$. (همچنین ر.ك. مسئلهٔ ۱۹ آخربخش ۵.۱۵.) این نتیجه چندان‌هم غیرمنتظره‌نیست چراکه سری در $z = ۱$ واگراست. درمثال بعد یك مورد واقعاً شگفت‌آور را شرح می‌دهیم.

مثال ۳

سری زیر را درنظربگیرید:

$$x^{۲} + \frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}} + \frac{x^{۲}}{(۱ + x^{۲})^{۲}} + \frac{x^{۲}}{(۱ + x^{۲})^{۳}} + \dots .$$

دانشجو می‌تواند بااستفاده ازفرمول مجموع تصاعد هندسی نشان دهد که n امین مجموع جزئی برابراست با

$$s_n(x) = ۱ + x^{۲} - \frac{۱}{(۱ + x^{۲})^n}$$

(بعضی ازاین مجموعها درشکل ۳۲۸ نشان داده شده‌اند.) ازاین‌رو، اگر $x \neq ۰$، مجموع سری عبارت است از

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = ۱ + x^{۲}$$

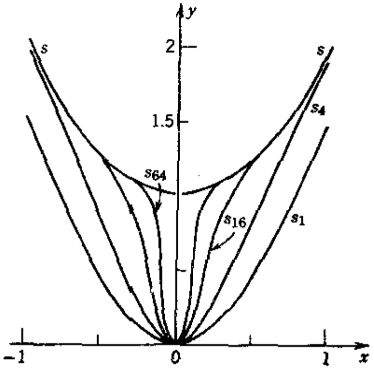
اگر $x = ۰$، دراین صورت به‌ازای تمام nها، $s_n = ۰$ وبنابراین

$$s(۰) = \lim_{n \to \infty} s_n(۰) = ۰;$$

پس سری به‌ازای تمام xها همگراست (حتی همگرای مطلق است). اما نتیجهٔ تعجب‌آور این است که هرچند تمام جملات سری توابع پیوسته‌اند مجموع (در $x = ۰$) ناپیوسته است. ازاین گذشته، وقتی $x \neq ۰$، قدرمطلق باقیمانده عبارت است از

$$|R_n(x)|=|s(x)-s_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

ومی‌بینیم که به‌ازای یك $\varepsilon(<1)$ مفروض نمی‌توانیم Nی پیدا کنیم که فقط به ε بستگی داشته و به ازای هر $n>N(\varepsilon)$ و هر x متعلق به بازهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ داشته باشیم $|R_n|<\varepsilon$. ▲



شکل ۳۲۸. مجموعهای جزئی مثال ۳

سریهایی که درمثالهای بالا مورد بحث قرار گرفتند صورت کلی زیر را دارند:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)=f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\cdots \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم (۱) به ازای تمام zها درناحیهٔ G همگرا باشد. فرض‌کنید $s(z)$ مجموع و $s_n(z)$، n امین مجموع جزئی (۱) باشد. می‌دانیم همگرایی (۱) درنقطهٔ z بدین معنی است که به‌ازای هر $\varepsilon>0$ مفروض می‌توان یك $N=N(\varepsilon, z)$ پیداکرد به طوری که

به ازای هر $n>N(\varepsilon, z)$ $\qquad |s(z)-s_n(z)|<\varepsilon$

N به ε بستگی دارد، و درحالت‌کلی، به نقطهٔ z انتخاب شده نیز بستگی خواهد داشت. حال، به‌ازای هر $\varepsilon>0$ مفروض، ممکن است بتوانیم عددی مانند $N(\varepsilon)$، مستقل از z، طوری پیدا کنیم که

به‌ازای هر $n>N(\varepsilon)$ **و تمام z های متعلق به** G داشته‌باشیم $\quad |s(z)-s_n(z)|<\varepsilon$

دراین صورت می گویندکه سری در G **همگرای یکنواخت** است

بنابراین یکنواخت بودن همگرایی خاصیتی است مربوط به‌مجموعه‌ای نامتناهی از

مقادیر z، درحالی‌که همگرایی سری را می‌توان به‌ازای مقادیرخاص مختلفی از z بدون درنظر گرفتن سایرمقادیر بررسی کرد.

سریی که درمثال ۱ دیدیم دربازهٔ $\circ \leqslant x \leqslant ۱$ (و در واقع، در هر بازهٔ کراندار) همگرای یکنواخت است. سریی که درمثال ۳ دیدیم در هربازه‌ای که شامل نقطهٔ ۰ باشد همگرای یکنواخت نیست. بنابراین ممکن است یك سری همگرای مطلق همگرای یکنواخت نباشد. همین طور، یك سری همگرای یکنواخت نیز ممکن است همگرای مطلق نباشد. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۴. سری همگرای مطلقی که همگرای یکنواخت نیست

سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+3}-+\cdots \qquad (x \text{ حقیقی است})$$

به‌ازای تمام xها همگرای یکنواخت است اما همگرای مطلق نیست (ر. ك. مسئلهٔ ۱۸).▲

مثال ۲ یك سری توانی نوعی است، مطالعهٔ چنین سریهایی بسیارساده‌است.

قضیهٔ ۱ (سری توانی)

سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{۲}$$

که شعاع همگرایی آن صفرنیست در هرقرص دایره‌ای $|z-a|\leqslant r$ به شعاع $r<R$ همگرای یکنواخت است.

اثبات. به‌ازای $|z-a|\leqslant r$ داریم

$$|c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots+c_{n+p}(z-a)^{n+p}|\leqslant |c_{n+1}|r^{n+1}+\cdots+|c_{n+p}|r^{n+p}. \tag{۳}$$

چون وقتی‌که $|z-a|=r<R$ درآن صورت (۲) همگرای مطلق است، از اصل همگرایی کوشی (بخش ۳.۱۵) نتیجه می‌شود که، به‌ازای یك $\varepsilon>\circ$ مفروض، می‌توان $N(\varepsilon)$ی یافت به‌طوری که

$$|c_{n+1}|r^{n+1}+\cdots+|c_{n+p}|r^{n+p}<\varepsilon \qquad \text{به‌ازای } n>N(\varepsilon) \text{ و } p=1,2,\ldots$$

از این رابطه و (۳) به‌دست می‌آوریم

$$|c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots+c_{n+p}(z-a)^{n+p}|<\varepsilon$$

که به‌ازای هر zی درقرص $|z-a|\leqslant r$، وهر $n>N(\varepsilon)$، وهر $p=1,2,\ldots$ برقرار

است. چون $N(\varepsilon)$ مستقل از z است همگرایی یکنواخت نتیجه می‌شود و قضیه به اثبات می‌رسد. ▲

درحالی‌که، البته، مجموع مقداری متناهی تابع پیوسته پیوسته‌است، مثال۳ نشان می‌دهد که مجموع یک سری متناهی از توابع پیوسته ممکن است ناپیوسته باشد، حتی اگر همگرای مطلق باشد. اما اگر سریی همگرای یکنواخت باشد چنین اتفاقی نمی‌افتد. در واقع قضیهٔ مهم زیر نتیجه می‌شود

قضیهٔ ۲ (پیوستگی)

فرض کنید سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

درناحیهٔ G همگرای یکنواخت بوده ومجموعش $F(z)$ باشد. دراین صورت، اگر هر جملهٔ $f_m(z)$ درنقطه‌ای مانند z_0 از G پیوسته باشد، تابع $F(z)$ در z_0 پیوسته‌است.

اثبات. nامین مجموع جزئی سری را $s_n(z)$ و باقیماندهٔ مربوط به آن را $R_n(z)$ فرض کنید:

$$s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \qquad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots$$

چون سری همگرای یکنواخت است به‌ازای یک $\varepsilon > 0$ مفروض می‌توانیم یک $n = N(\varepsilon)$ پیداکنیم به‌طوری که

$$|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{به‌ازای تمام } z\text{های متعلق به } G)$$

ازآنجاکه $s_N(z)$ مجموع تعدادی متناهی تابع است که همگی در z_0 پیوسته‌اند، این مجموع در z_0 پیوسته‌است. بنابراین می‌توانیم یک $\delta > 0$ پیداکنیم به طوری که

به‌ازای تمام zهای متعلق به G که در $|z - z_0| < \delta$ قراردارند $\quad s_N(z) - s_N(z_0) < \frac{\varepsilon}{3}$

بنابه نامساوی مثلثی (بخش ۲.۱۲) به‌ازای چنین zهایی به‌دست می‌آوریم

$$|F(z) - F(z_0)| = |s_N(z) + R_N(z) - [s_N(z_0) + R_N z_0)]|$$

$$\leqslant |s_N(z) - s_N(z_0)| + |R_N(z)| + |R_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

واین بدان معنی‌است که $F(z)$ در z_0 پیوسته است وقضیه ثابت می‌شود. ▲

یادآوری می‌کنیم که دراین قضیه همگرایی یکنواخت شرطی کافی‌است ونه لازم. این مطلب را می‌توان بامثال زیرتشریح کرد.

مثال ۵

فرض کنید

$$u_m(x)=\frac{mx}{1+m^2x^2}$$

و سری $\sum_{m=1}^{\infty} f_m\ (z)$ را درنظر بگیرید که درآن $f_m(x)=u_m(x)-u_{m-1}(x)$.

n امین مجموع جزئی عبارت است از

$$s_n=u_1-u_0+u_2-u_1+\cdots+u_n-u_{n-1}=u_n-u_0=u_n\ .$$

بنابراین مجموع سری عبارت است از

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x)=0,$$

که تابعی پیوسته است. با این همه سری دربازهٔ $0\leqslant x\leqslant a$ که درآن $a>0$ همگرای یکنوا نیست. درواقع ازرابطهٔ

$$|F(x)-s_n(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\varepsilon$$

به‌دست می‌آوریم

$$n^2x^2-\frac{nx}{\varepsilon}+1>0 \ \text{یا}\ \frac{nx}{\varepsilon}<1+n^2x^2$$

و از روی‌آن

$$n>\frac{1}{2x\varepsilon}\left(1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}\right).$$

به‌ازای یك ε مشخص، وقتی x به‌صفر میل‌کند سمت راست رابطهٔ بالا به‌بینهایت میل می‌کند واین نشان می‌دهد که سری دربازهٔ موردنظرهمگرای یکنواخت نیست. ▲

تحت چه شرایطی می‌توانیم از یك سری جمله به‌جمله انتگرال بگیریم؟
بحث خودرا بامثالی دنبال‌می‌کنیم که‌نشان دهندهٔاین‌واقعیت‌مهم‌است که‌انتگرالگیری جمله به‌جمله همیشه مجازنیست.

مثال ۶. سریی‌که انتگرالگیری جمله‌ای ازآن مجاز نیست

فرض کنید

$$u_m(x)=mxe^{-mx^2}$$

وسری زیررا دربازهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ درنظر بگیرید:

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \quad \text{که درآن} \quad f_m(x)=u_m(x)-u_{m-1}(x)$$

n امین مجموع جزئی عبارت است از

$$s_n=u_1-u_0+u_2-u_1+\cdots+u_n-u_{n-1}=u_n-u_0=n_n\,.$$

بنابراین مجموع سری عبارت‌است از

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x)=0 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

ازاینجا نتیجه می گیریم

$$\int_0^1 F(x)dx=0.$$

ازطرفی، باانتگرالگیری جمله به‌جمله داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 f_m(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\int_0^1 f_m(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx.$$

اما $s_n=u_n$ وعبارت سمت راست برابرمی‌شود با

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n})=\frac{1}{2},$$

و نه صفر . بنابراین ازسری فوق نمی‌توان از $x=0$ تا $x=1$ جمله به‌جمله انتگرال گرفت . ▲

سریی که درمثال ۶آوردیم دربازهٔ یاد شده همگرای یکنواخت نیست واکنون ثابت می کنیم که ازیك‌سری همگرای یکنواخت ازتوابع پیوسته می‌توانیم جمله به‌جمله‌انتگرال بگیریم .

قضیهٔ ۳ (انتگرالگیری جمله‌ای)

فرض‌کنید

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots$$

یك‌سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته درناحیهٔ G باشد. C را مسیری در G بگیرید. دراین صورت سری

$$(۴)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)dz=\int_C f_0(z)dz+\int_C f_1(z)dz+\cdots$$

همگرا است و مجموعش برابر است با $\int_C F(z)dz$.

اثبات. ازقضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که $F(z)$ پیوسته‌است. فرض کنید $s_n(z)$، n امین مجموع جزئی سری داده شده و $R_n(z)$ باقیماندهٔ‌آن باشد. دراین صورت $F=s_n+R_n$ و

$$\int_C F(z)dz=\int_C s_n(z)dz+\int_C R_n(z)dz.$$

طول C را l فرض کنید. چون سری داده شده همگرای یکنواخت است، به‌ازای هر $\varepsilon>0$ مفروض می‌توانیم عددی مانند N پیداکنیم طوری که

$$|R_n|(z)|<\frac{\varepsilon}{l}\qquad \text{به‌ازای هر } n>N \text{ و هر } z \text{ متعلق به } G$$

با استفاده از (۴)، بخش ۲.۱۴، به دست می‌آوریم

$$\left|\int_C R_n(z)dz\right|<\frac{\varepsilon}{l}\,l=\varepsilon\qquad \text{به‌ازای هر } n<N$$

چون $R_n=F-s_n$، بنابراین

$$\left|\int_C F(z)dz-\int_C S_n(z)\,dz\right|<\varepsilon\qquad \text{به‌ازای هر } n>N$$

ازاین‌رو، سری (۴) همگراست ومجموعی برابرآنچه درقضیه گفته شد دارد. ▲

قضایای ۲ و۳ مشخص کنندهٔ دوتاازمهمترین خاصیتهای سریهای همگرای یکنواخت هستند.

البته، چون مشتقگیری وانتگرالگیری فرآیندهایی معکوس یکدیگرند، ازقضیهٔ ۳ به سادگی نتیجه می‌شود که از یك سری همگرا می‌توان جمله به‌جمله مشتقگیری کرد به شرط آنکه جملات سری داده شده مشتقات پیوسته داشته‌باشند وسری حاصل همگرای یکنواخت باشد، به‌طوردقیقتر، قضیهٔ زیرصادق‌است.

قضیهٔ ۴ (مشتقگیری جمله‌ای)

فرض‌کنید سری $f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\cdots$ درناحیهٔ G همگرا بوده و $F(z)$ مجموع آن باشد. فرض‌کنیدکه سری $f_0'(z)+f_1'(z)+f_2'(z)+\cdots$ در G همگرای یکنواخت بوده وجملات‌آن $f_0'(z), f_1'(z),\ldots$ در G پیوسته باشند. در این‌صورت

به ازای هر z در G $\qquad F'(z)=f'_0(z)+f'_1(z)+f'_2(z)+\cdots$

اثبات قضیه ساده‌است و به‌خواننده واگذار می‌شود (مسئلهٔ ۱۰)

معمولاً همگرایی یکنواخت‌را ازآزمون مقایسه، که‌آزمون M وایرشتراس، نامیده می‌شود نتیجه می‌گیرند.

قضیهٔ ۵ (آزمون M وایرشتراس)

هرگاه در داخل ناحیهٔ G به ازای تمام مقادیر z قدرمطلقهای جملات سری مفروضی‌که به صورت (۱) است، به ترتیب ،کمتراز یا مساوی با جملات متناظر سری همگرای با جملات ثابت

$$M_0+M_1+M_2+\cdots, \tag{5}$$

باشد، آنگاه سری (۱) در G همگرای یکنواخت است.

اثبات قضیه ساده‌است و به‌دانشجویان واگذارمی‌شود (مسئلهٔ ۱۱).

مثال ۷. آزمون M وایرشتراس

سری

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m^2} \qquad (x \text{ حقیقی})$$

درهربازه‌ای همگرای یکنواخت‌است. این ازآزمون وایرشتراس نتیجه می‌شود زیرا به ازای xهای حقیقی

$$\left|\frac{\sin mx}{m^2}\right|\leqslant\frac{1}{m^2}$$

و $\sum m^{-2}$ همگراست (ر. ک. (۵) بخش ۵۰۱۵).

مسائل بخش ۶۰۱۶

ثابت کنیدکه سریهای زیردرنواحی داده شده همگرای یکنواخت هستند.

۱. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n,\quad |z|\leqslant 0.99$

۲. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad |z|\leqslant 10^{30}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n,\quad |z|\leqslant 3.9$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2},\quad |z|\leqslant 1$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n|z|}{2^n}$، تمام zها

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan h^n x}{n(n+1)}$، تمام xهای حقیقی

۷. تمام zها $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^n|z|}{n^2}$, **۸.** تمام zها $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z|+n^2}$,

۹. هرگاه سری (۱) درناحیهٔ G همگرای یکنواخت باشد، ثابت کنید که درهرقسمتی از G همگرای یکنواخت است.

۱۰. قضیهٔ ۴ را به کمك قضیهٔ ۳ ثابت کنید.

۱۱. آزمون M وایرشتراس (قضیهٔ ۵) را ثابت کنید.

۱۲. کوچکترین عدد صحیح n را تعیین کنید که به‌ازای آن درمثال ۲، وقتی

$$z=x=0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9$$

داشته باشیم $|R_n|<0.01$. ازنقطهٔ نظرمحاسبهٔ $1/(1-x)$ به کمك سری هندسی باخطای مطلقی کمتر از ۰٫۰۱ این نتیجه چه معنایی دارد؟

۱۳. سریی راکه n امین مجموع جزئـی آن $s_n(x)=nx/(nx+1)$ است پیدا کنید و نمودار $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$ و $s=\lim_{n\to\infty}s_n$ را به‌ازای $x\geqslant 0$ رسم کنید.

۱۴. ثابت کنید کـه سری مثال ۳ درهیچ بـازه‌ای کـه شامل نقطهٔ $x=0$ باشد همگرای یکنواخت نیست.

۱۵. نشان دهید کـه $x^2\sum_{n=1}^{\infty}(1+x^2)^{-n}$ برابر یك است وقتی که $x\neq 0$، وبرابر صفر است وقتی که $x=0$. سپس نموداری مشابه باشکل ۳۲۸ ازمجموعهای جزئی رسم کنید.

۱۶. ناحیهٔ همگرایی سری مثال ۳ را وقتی کـه جای x متغیرمختلط z قرارگیرد به طور دقیق پیدا کنید.

۱۷. نشان دهید که $1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$ دربازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ همگـرای یـکنواخت نیست. مجموعهای جزئی s_1، s_2، s_3، s_4، را رسم کنید.

۱۸. حکم مثال ۴ را ثابت کنید.

معادلهٔ گرما . نشان دهید که (۱۰)، بخش ۵.۱۱، باضرایب(۱۱)، به‌ازای $t>0$ جواب معادلهٔ گرما است، فرض کنید $f(x)$ دربـازهٔ $0\leqslant x\leqslant l$ پیوسته بوده و درتمام نقاط داخلی آن بازه ازیك طرف مشتق داشته باشد. به‌ترتیب زیر عمل کنید.

۱۹. نشان دهید کـه $|B_n|$ کراندار است یعنی بـه‌ازای تمام n ها، $|B_n|<K$. نتیجه

بگیرید که

$$t \geqslant t_\circ > \circ \quad \text{وقتی که} \quad |u_n| < Ke^{-\lambda_n^2 t_\circ}$$

و به‌کمک آزمون وایرشتراس، ثابت کنید سری (۱۰) نسبت به x و t وقتی که $\circ \leqslant x \leqslant l$ و $t \geqslant t_\circ$ همگرای یکنواخت است. با استفاده ازقضیهٔ ۲ نشان دهید که $u(x \text{ و } t)$، وقتی $t \geqslant t_\circ$، پیوسته است و بنابراین وقتی $t \geqslant t_\circ$، در شرایط مرزی (۲) صدق می‌کند.

۲۰. نشان‌دهید وقتی که $t \geqslant t_\circ$،داریم $|\partial u_n/\partial t| < \lambda_n^2 Ke^{-\lambda_n^2 t_\circ}$ وسری عبارات سمت راست، بنا به‌آزمون‌نسبت، همگراست. بااستفاده ازاین موضوع، وایرشتراس وقضیهٔ۴ نتیجه بگیرید که ازسری(۱۰)می‌توان جمله به‌جمله‌نسبت به t مشتق گرفت ومجموع‌سری حاصل برابر $\partial u/\partial t$ است. نشان دهید که از (۱۰) می‌توان دومرتبه نسبت به x مشتق‌گرفت ومجموع سری‌حاصل برابراست با $\partial^2 u/\partial x^2$. بااستفاده ازاین‌موضوع ونتیجهٔ مسئلهٔ ۱۹ نشان دهیدکه (۱۰) به ازای هر $t \geqslant t_\circ$ جوابی برای معادلهٔ گرما است. (اثبات این راکه (۱۰) درشرط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند می‌توان در مرجع $[D2]$ یافت.)

۷.۱۶ سری لوران

درکاربردهای مختلف لازم می‌شودکه تابع $f(z)$ حول نقاطی‌که تابع درآنها تکین است بسط داده شود. قضیهٔ تیلور را درچنین مواردی نمی‌توان به‌کاربرد، به‌این منظور از سری جدیدی به‌نام سری لوران استفاده می‌کنیم. نمایش به‌وسیلهٔ سری لوران درطوقی محصور به‌دو دایرهٔ متحدالمرکز C_1 و C_2 که $f(z)$ درتمام‌نقاط درونی ومرزی آن تحلیلی‌است اعتبار دارد (شکل۳۲۹). همانند حالت مربوط به‌سری تیلور، $f(z)$ ممکن است درنقاطی واقع درخارج C_1 تکین باشد، و ضرورتاً به‌عنوان خاصیتی جدید، ممکن است درنقاطی واقع در داخل C_2 نیز تکین باشد.

قضیهٔ لوران [1]

هرگاه $f(z)$ روی دو دایرهٔ متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز a و درطوق بین آنها تحلیلی باشد، دراین صورت $f(z)$ را می‌توان با سری لوران نمایش داد:

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} b_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} \qquad (1)$$

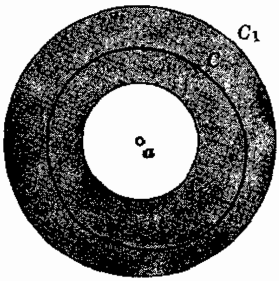
$$= b_\circ + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots$$

که درآن[1]

$$(۲)\quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,dz^*,\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C (z^*-a)^{n-1} f(z^*)dz^*,$$

هریك ازاین انتگرالها روی مسیر بستهٔ سادهای مانند C که درطوق قرار دارد و دایرهٔ داخلی را درمیان می‌گیرد درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته می‌شود (شکل ۳۲۹).

این سری همگراست و $f(z)$ را در طوقی باز نمایش می‌دهد که از طوق داده شده به‌دست می‌آید اگر دایرهٔ C_1 را آنقدر بزرگ کنیم و دایرهٔ C_2 را آنقدر کوچك کنیم که هریك از دو دایره به‌نقطه‌ای که درآن $f(z)$ تکین است برسند.



شکل ۳۲۹. قضیهٔ لوران

تبصره. بدیهی است که به‌جای (۱) و (۲) به‌سادگی می‌توانیم بنویسیم

$$(۱')\qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n$$

که در آن

$$(۲')\qquad A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,dz^*.$$

اثبات قضیهٔ لوران[2]. فرض کنید z نقطه‌ای درطوق‌داده شده باشد. دراین صورت ازفرمول انتگرال کوشی [ر. ك. (۳) بخش ۵.۱۴] نتیجه می‌شود

$$(۳)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,dz^*-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,dz^*.$$

---

۱. متغیر انتگرالگیری را با z^* نشان می‌دهیم چراکه z را در $f(z)$ به‌کار برده‌ایم.

۲. پیرآلفونس لوران Pierre Alphonse Laurent (۱۸۱۳ ـ ۱۸۵۴)، ریاضیدان فرانسوی.

که جهت انتگرالگیری عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. حال این انتگرالها را به روشی شبیه آنچه در بخش ۳.۱۶ دیدیم تبدیل می کنیم. چون z درداخل C_1 قرار می گیرد انتگـرال اول دقیقاً از همان نـوع انتگرال (۱)، بخش ۳.۱۶ است. با بسط دادن این انتگرال و تخمین زدن باقیماندهٔ آن به‌روشی که در بخش ۳.۱۶ داشتیم به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z^*)}{z^*-z}\,dz^* = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \tag{۴}$$

که ضرایب آن ازفرمول

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}dz^* \tag{۵}$$

تعیین می‌شوند و انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انجام می‌شود. چون نقطهٔ a متعلق به طوق نیست، توابع $f(z^*)/(z^*-a)^{n+1}$ درطوق تحلیلی هستند، از این‌رو به‌جای مسیر C (ر.ك. قضیه) می‌توانیم روی مسیر C_1 انتگرال بگیریم بدون آنکه لازم باشد مقدار b_n را تغییردهیم. بدینسان (۲) به‌ازای هر $n \geqslant 0$ ثابت می‌شود.

درمورد انتگرال آخر (۳) وضعیت متفاوت است، چراکه z درخارج C_2 قراردارد. به‌جای (۳)، بخش ۳.۱۶، داریم

$$\left|\frac{z^*-a}{z-a}\right|<1 \tag{۶}$$

یعنی، حالا باید $1/(z^*-z)$ را برحسب توانهای $(z^*-a)/(z-a)$ بسط دهیم تـا سری حاصل همگرا باشد. به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{z^*-z}=\frac{1}{z^*-a-(z-a)}=\frac{-1}{(z-a)\left(1-\dfrac{z^*-a}{z-a}\right)}.$$

با استفاده از فرمول مجموع تصاعد هندسی متناهی در مورد این عبارت به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{z^*-z}=-\frac{1}{z-a}\left\{1+\frac{z^*-a}{z-a}+\left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^2+\dots+\left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^n\right\}$$
$$-\frac{1}{z-z^*}\left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^{n+1}$$

برای آنکه آخرین انتگرال (۳) به دست آید این بسط را در $(-1/2\pi i)f(z^*)$ ضرب می کنیم وروی C_2 ازآن انتگرال می گیریم. به‌سادگی به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z^*)}{z^*-z}dz^*$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z-a}\int_{C_2}f(z^*)dz^*+\frac{1}{(z-a)^2}\int_{C_2}(z^*-a)f(z^*)dz^*+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int_{C_2}(z^*-a)^n f(z^*)dz^*\right\}+R_n^*(z);$$

دراین رابطه جملهٔ آخر به‌صورت زیر است:

$$R_n^*(z)=\frac{1}{2\pi i(z-a)^{n+1}}\int_{C_2}\frac{(z^*-a)^{n+1}}{z-z^*}f(z^*)dz^*. \tag{۷}$$

در انتگرالهای داخل آکولاد می‌توان به‌جای دایرهٔ C_2 مسیر C راکه قبلا شرح داده شد گذاشت بدون آنکه مقادیرشان تغییر کند. بدین طریق قضیهٔ لوران ثابت می‌شود مشروط بر آنکه

$$\lim_{n\to\infty} R_n^*(z)=0 \tag{۸}$$

حال (۸) راثابت می‌کنیم. چون $z-z^*\neq 0$ و $f(z)$ درطوق وروی C_2 تحلیلی است قدرمطلق عبارت $f(z^*)/(z-z^*)$ در (۷) کراندار است، مثلا،

$$\left|\frac{f(z^*)}{z-z^*}\right|<\widetilde{M} \qquad \text{به‌ازای هر } z^* \text{ روی } C_2$$

بااستفاده از (۴) بخش ۲۰۱۴ در (۷) ونمایش دادن طول C_2 با l به‌دست می‌آوریم

$$|R_n^*(z)|<\frac{1}{2\pi|z-a|^{n+1}}|z^*-a|^{n+1}\widetilde{M}l=\frac{2\pi}{lM}\left|\frac{z^*-a}{z-a}\right|^{n+1}.$$

از(۶) نتیجه می گیریم که عبارت سمت راست وقتی n به‌سمت بینهایت میل کند به سمت صفرمیل می کند. بدین ترتیب (۸) ثابت می‌شود. پس نمایش (۱) باضرایب (۲) درطوق داده شده صادق است.

سرانجام همگرایی (۱) را درطوق بازی که درآخـرقضیه مشخص شده‌است ثابت می کنیم.

مجموع دوسری موجـود در (۱) را به‌ترتیب با $g(z)$ و $h(z)$، وشعاعهای C_1 و C_2 را به‌ترتیب با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم، دراین صورت $f=g+h$. سری اول یك سری توانی‌است. ازآنجاکه این سری درطوق همگراست، باید درسراسر قرص محصور به C_1 همگرا بوده و g درآن قرص تحلیلی باشد.

باقرار دادن $Z=1/(z-a)$، سری آخر به یك سری توانی برحسب Z تبدیل می‌شود. دراین صورت طوق $r_2<|z-a|<r_1$ با طوق $1/r_1<|Z|<1/r_2$ متناظرشده سری‌جدید دراین طوق‌همگرامی‌شود، و بنابراین، درسراسر قرص $|Z|<1/r_2$ نیز همگرا می‌شود. چون این قرص بـا $|z-a|>r_2$، خارج C_2، متناظراست، سری داده شده به‌ازای تمام z های خـارج C_2 همگراست و h به‌ازای تمام این z ها تحلیلی است.

چون $f=g+h$، بنابراین درتمام نقاط خارج C_1 که f درآنها تکین است g باید تکین باشد و در تمام نقاط داخل C_2 که f درآنها تکین است h باید تکین باشد. درنتیجه اولین سری به‌ازای تمام z های درون دایره‌ای به‌مرکز a که شعاعش برابراست بافاصلهٔ نزدیکترین تکینی f به a درخارج از C_1، همگراست. به گونه‌ای مشابه سری دوم به‌ازای تمام z های خارج ازدایره‌ای به‌مرکز a که شعاعش برابراست بابزرگترین فاصلهٔ تکینی f درداخل C_2، همگراست. ناحیهٔ مشترك این دوناحیهٔ همگرایی طوق بازی است که درآخر قضیه مشخص شده است. ▲

نتیجه می‌شودکـه هرگاه $f(z)$ در داخـل C_2 تحلیلی باشد سری لوران به سری تیلور $f(z)$ که مرکزش a است تحویل می‌شود. در واقع بـا به‌کار بردن قضیهٔ انتگرال کشی (۲) می‌بینیم که دراین حالت تمام ضرایب توانهای منفی (۱) صفرند.

ازاین‌گذشته، اگر $z=a$ تنها نقطهٔ تکین $f(z)$ در C_2 باشد، دراین صورت‌بسط لـوران (۱) به ازای تمام z های C_1 جز $z=a$ همگراست. این حالت به‌کرات اتفاق می‌افتد، و بنابراین، ازاهمیت خاصی برخوردار است. ما بعداً به‌تفصیل دراین باره بحث خواهیم‌کرد.

سری‌لوران تابع‌تحلیلی مفروض $f(z)$ درطوق همگراییش یکتاست (ر.ك. مسئلهٔ ۱۰ همین بخش). هرچند $f(z)$ ممکن است در دو طوق هم مرکز سریهای لوران مختلف داشته باشد (ر. ك. مثال ۲ی همین بخش).

یکتایی مهم است، زیرا معمولا سری لوران، بااستفاده از (۲) برای تعیین ضرایب، به‌دست نمی‌آید بلکه از روشهای متعدد دیگـری نتیجه می‌شود. بعضی از این روشها در مثالهای زیرتشریح شده‌اند. سری لورانی کـه با چنین فرآیندی به‌دست می‌آید باید سری لوران تابع داده شده درطوق مفروضی باشد.

مثال ۱

سری لوران $z^2e^{1/z}$ به‌مرکز ۰ را می‌توان از (۲)ی بخش ۴.۱۶ به‌دست آورد. با قرار دادن $1/z$ به‌جای z درآن سری داریم

$$z^{۲}e^{۱/z}=z^{۲}\left(۱+\frac{۱}{۱!z}+\frac{۱}{۲!z^{۲}}+\cdots\right)$$

$$=z^{۲}+z+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳!z}+\frac{۱}{۴!z^{۲}}+\cdots \qquad (|z|>۰).$$

مثال ۲. بسط لوران درطوقهای مختلف

تمام سریهای لوران به مرکز $z=۱$ تابع $f(z)=۱/(۱-z^{۲})$ را بیابید. داریم $۱-z^{۲}=-(z-۱)(z+۱)$. با استفاده ازسری هندسی

$$\frac{۱}{۱-q}=\sum_{n=۰}^{\infty}q^{n} \qquad (|q|<۱),$$

خواهیم داشت

$$\frac{۱}{z+۱}=\frac{۱}{۲+(z-۱)}=\frac{۱}{۲}\frac{۱}{\left[۱-\left(-\frac{z-۱}{۲}\right)\right]}$$

(الف)

$$=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(-\frac{z-۱}{۲}\right)^{n}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}(z-۱)^{n}/۲^{n+۱}$$

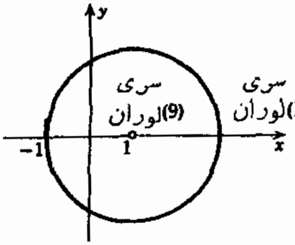
این سری در قرص $|(z-۱)/۲|<۱$ همگراست، یعنی $|z-۱|<۲$. ر. ك. شکل ۳۳۰. بههمین ترتیب

$$\frac{۱}{z+۱}=\frac{۱}{(z-۱)+۲}=\frac{۱}{(z-۱)}\frac{۱}{\left(۱+\frac{۲}{z-۱}\right)}$$

(ب)

$$=\frac{۱}{z-۱}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(-\frac{۲}{z-۱}\right)^{n}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۲)^{n}}{(z-۱)^{n+۱}};$$

این سری به ازای $|۲/(z-۱)|<۱$ همگـراست، یعنی $|z-۱|>۲$. ر. ك. شکل ۳۳۰. بنابراین از (الف) بهدست میآوریم



شکل ۳۳۰. مثال ۲

$$f(z)=\frac{-1}{(z-1)(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}$$

(۹)

$$=\frac{-1/2}{z-1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{1}{16}(z-1)^2-+\cdots;$$

این سری درناحیهٔ $0<|z-1|<2$ همگراست. همین طور از(ب) به‌دست می‌آوریم

(۱۰)
$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}=-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}-\frac{4}{(z-1)^4}+-\cdots+-\cdots.$$

این سری به‌ازای $|z-1|>2$ همگراست.

مثال ۳. $\cot z$

ازمسئلهٔ ۱۹ آخربخش ۴.۱۶ می‌توان به‌آسانی سری لوران زیررا به‌دست آورد:

$$\cot z=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-\frac{2}{945}z^5-\cdots \quad (0<|z|<\pi). \quad ▲$$

هرگاه $z=a$ تنها نقطهٔ تکین $f(z)$ در C_2 باشد (ر. ك. شکل ۳۲۹)، سری‌لوران (۱) درناحیه‌ای مانند

(۱۱)
$$0<|z-a|<R$$

همگراست. تکینی $f(z)$ در $z=a$ **قطب** یا **تکینی‌ضروری** نامیده می‌شود بسته به آنکه تعداد توانهای منفی این‌سری لوران (سریی که دریك همسایگی $z=a$ ، وجز در $z=a$، همگراست) متناهی باشد یـا نامتناهی، تابعی تحلیلی که تکینیهایش درصفحهٔ متناهی قطبها هستند **تابع برخه ریخت** نامیده می‌شود.

به عنوان مثال، برای تعیین نوع تکینی $1/(z^2-1)$ در $z=1$ (ر. ك. مثال۲) باید (۹) را به‌کار ببریم و نه (۱۰) را، زیرا این (۹) است که در ناحیه‌ای به‌صورت (۱۱)، با $a=1$، همگراست. چون (۹) یك‌توان منفی دارد تکینی آن قطب است ونه تکینی‌ضروری [این نتیجه را می‌شد از (۱۰) هم گرفت ولی این‌کار درست نبود].

بحث مشروح ومثالهای بیشتر دربخش بعد خواهد آمد.

مسائل بخش ۷.۱۶

توابع زیر را به سریهای لورانی که به‌ازای $0<|z|<R$ همگرا هستند بسط دهید و ناحیهٔ دقیق همگرایی را معین کنید.

۱. $\frac{e^{-z}}{z^{3}}$ ۲. $\frac{e^{1/z^{2}}}{z^{6}}$ ۳. $\frac{\cos 2z}{z^{2}}$

۴. $\frac{1}{z^{4}(1+z)}$ ۵. $\frac{1}{z^{2}(1-z^{2})}$ ۶. $\frac{1}{z^{2}(z-3)}$

۷. $\frac{\sinh 3z}{z^{3}}$ ۸. $\frac{1}{z^{8}+z^{4}}$ ۹. $\frac{1}{z^{2}(1+z)^{2}}$

۱۰. ثابت کنید بسط لوران یك تابع تحلیلی مفروض درطوقی مفروض یکتاست.

۱۱. آیا $\tan(1/z)$ سری لورانی داردکه درناحیهٔ $0 < |z| < R$ همگرا باشد؟

تمام سریهای تیلور و لوران به مرکز $z=a$ را بیابید و نواحی دقیق همگرایی را معین کنید.

۱۲. $\frac{1}{z^{2}+1},\ a=-i$ ۱۳. $\frac{1}{z^{4}},\ a=1$ ۱۴. $\frac{1}{z^{3}},\ a=i$

۱۵. $\frac{1}{z^{2}+1},\ a=i$ ۱۶. $\frac{1}{1-z^{4}},\ a=-1$ ۱۷. $\frac{4z-1}{z^{4}-1},\ a=0$

۱۸. $\frac{\sin z}{(z-\frac{1}{4}\pi)^{3}},\ a=\frac{\pi}{4}$ ۱۹. $\frac{e^{z}}{(z-1)^{2}},\ a=1$ ۲۰. $\frac{4z^{2}+2z-4}{z^{3}-4z},\ a=2$

۸.۱۶ تحلیلی بودن در بینهایت . صفرها و تکینیها

دراین بخش صفرها و تکینیهای توابع تحلیلی را بررسی می‌کنیم . خواهیم دیدکه انواع مختلفی از تکینیها وجود دارندکه با سری لوران مشخص می‌شوند .

ما این بررسی را در صفحهٔ مختلط توسعه یافته انجام می‌دهیم ، زیرا می‌خواهیم رفتار توابع $f(z)$ را وقتی $|z| \to \infty$ نیز مطالعه‌کنیم . بنابراین نخست ازبخش ۳.۱۳ یادآوری می کنیم که **صفحهٔ مختلط توسعه یافته** با ضمیمه‌کردن نقطهٔ ناسرهٔ ∞ (نقطه در بینهایت) به صفحهٔ مختلط به دست می‌آید. برای تمیز این دوصفحه ازهم صفحهٔ اخیر را صفحهٔ مختلط متناهی می‌نامند. دربخش ۳.۱۳ این فرایند را ازتبدیل $w=1/z$ به‌دست آوردیم؛ درآنجا $z=\infty$ دارای نقش $w=0$ بود (و $w=\infty$ نقش معکوس $z=0$ را داشت).

هرگاه بخواهیم تابع داده شدهٔ $f(z)$ را به‌ازای $|z|$ های بزرگ ، بررسی کنیم ، می‌توانیم قرار دهیم $z=1/w$ و $f(z)=f(1/w)\equiv g(w)$ را دریك همسایگی $w=0$ مطالعه کنیم. تعریف می کنیم:

$$g(0)=\lim_{w\to 0} g(w). \tag{1}$$

همچنین $f(z)$ را **تحلیلی یا تکین دربینهایت** تعریف می‌کنیم، بسته به اینکه $g(w)$ در $w=0$ به‌ترتیب تحلیلی یا تکین باشد. (مفهوم تکینی را دربخش ۳.۱۶ ببینید.)

مثال ۱. توابع تحلیلی یا تکین دربینهایت

تابع $f(z)=1/z^2$ دربینهایت تحلیلی است زیرا $g(w)=f(1/w)=w^2$ در $w=0$ تحلیلی است. تابع $f(z)=z^2$ دربینهایت تکین‌است زیرا $g(w)=f(1/w)=1/w^2$ در $w=0$ تکین است. *تابع نمایی* e^z دربینهایت تکین است چراکه $e^{1/w}$ در $w=0$ تکین است. به‌همین ترتیب، *توابع مثلثاتی* $\sin z$ و $\cos z$ بینهایت تکینند.

اگرتابع $f(z)$ دربینهایت تحلیلی باشد، می‌توان سری لوران متناظرش را به‌روش سادهٔ زیر به دست آورد. فرض‌کنید $f(z)$ درحوزهٔ $|z-a|>R$ (خارج دایره‌ای به شعاع R و به‌مرکز a) و دربینهایت تحلیلی باشد. قرار می‌دهیم

$$z=\frac{1}{w}+a \text{، دراین صورت } z-a=\frac{1}{w}$$

وتابع $h(w)$ که عبارت است از

$$h(w)=f\left(\frac{1}{w}+a\right)=f(z)$$

درقرص $|z-a|=|1/w|>R$ تحلیلی است، یعنی $|w|<1/R$. ازاین رو $h(w)$ دارای یك سری مك‌لورن است، مثلا

$$h(w)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n=c_0+c_1w+c_2w^2+\cdots \qquad \left(|w|<\frac{1}{R}\right)$$

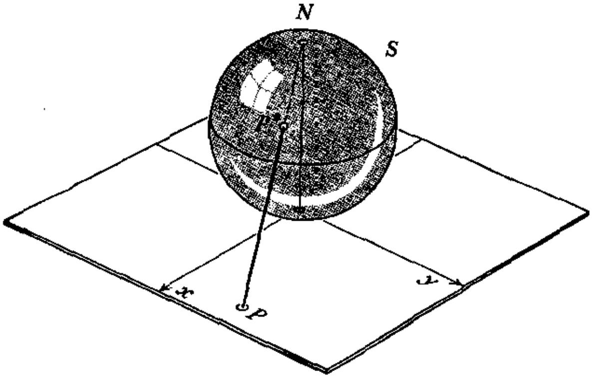
دراین صورت باقراردادن $w=1/(z-a)$، سری لوران زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}=c_0+\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{(z-a)^2}+\cdots \quad (|z-a|>R). \tag{2}$$

کرهٔ عددی ریمان

نمایش معمول اعداد مختلط z درصفحهٔ مختلط تا وقتی‌که قدرمطلق اعداد خیلی بزرگ نباشند به سادگی امکان پذیراست. برای $|z|$ های بزرگ این نمایش مناسب نیست و ما دراین حالت ترجیح می‌دهیم که اعداد مختلط‌را روی کره‌ای‌نمایش دهیم که به‌وسیلهٔ ریمان توصیه شد وبه‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید (شکل ۳۳۱ را ببینید).

فرض‌کنید S کره‌ای به‌قطر ۱ باشدکه درمبدأ برصفحهٔ مختلط z مماس است (شکل



شکل ۳۳۱. کرهٔ عددی ریمان

(۳۳۱). N را «قطب شمال» S (این نقطهٔ تماس بین کره و صفحه قـرار دارد) بگیرید. فرض کنید P نقطه‌ای درصفحهٔ مختلط متناهی باشد. دراین صورت پاره خط مستقیمی که‌دو سرش P و N هستند S را درنقطهٔ P^* قطع می‌کند. فرض می‌کنیم P و P^* متناظر هم باشند. بدین ترتیب تناظری بین نقاط صفحهٔ مختلط متناهی ونقاط S به‌دست می‌آوریم که P^* نقطهٔ نقش P نسبت به این نگاشت است. اعداد مختلط راکـه قبلا درصفحه نمایش داده می‌شدند حالا بـا نقاط روی S نمایش می‌دهیم. بـه هر z، نقطه‌ای روی S متناظر می‌شود. برعکس، هرنقطه‌ای روی S عدد مختلطی مانند z را نمایش می‌دهد جز نقطهٔ N که متناظر با هیچ نقطه‌ای از صفحهٔ مختلط نیست. اما اگـر نقطهٔ ناسره $z=\infty$ را معرفی کرده آن را متناظر با N درنظر بگیریم نگاشتی یك به‌یـك از صفحهٔ مختلط توسعه یافته برروی S خواهیم داشت. کرهٔ S **کرهٔ عددی ریمان** نام دارد. نگاشتی راکـه ما به‌کار بردیم **افکنش کنجنگاری** می‌نامند.

بدیهی است که دایرهٔ یکه روی «استوا»ی S نگاشته می‌شود. درون دایرهٔ یکه بـا «نیمکرهٔ جنوبی» متناظر است وبیرون آن با «نیمکرهٔ شمالی». اعداد zی که قدرمطلقشان بزرگ است نزدیك به قطب شمال N قرارمی‌گیرند. محورهای x و y (و به طورکلی تمام خطوط مستقیمی که ازمبدأمی گذرند) روی «نصف‌النهار»ها نگاشته می‌شوند، درحالی که دوایری که مرکزشان درمبدأ است روی «مدار» ها نگاشته می‌شوند. می‌توان نشان داد که هردایره یا خط مستقیمی در صفحهٔ z روی دایره‌ای بر S نگاشت می‌شود و به علاوه، این نگاشت کنجنگاری، همدیسی است.

صفرها

اگرتابع $f(z)$ درحوزهٔ D تحلیلی بوده و درنقطهٔ $z=a$ در D صفرباشد، گفته‌می‌شود که $f(z)$ یك صفر درنقطهٔ $z=a$ دارد. اگر نه‌فقط f بلکه مشتقات $f', \ldots, f^{(n-1)}$ آن نیز همگـی در $z=a$ صفر باشند و $f^{(n)}(a)\neq 0$، درآن صورت می گویند $f(z)$ صفری از مرتبهٔ n درنقطهٔ $z=a$ دارد.

گفته می‌شود $f(z)$ صفری از مرتبه n دربینهایت دارد اگر $f(1/z)$ چنین صفری در $z=0$ داشته باشد.

مثلا، هرگاه $f(a)=0$ ، $f'(a)\neq 0$ ، دراین صورت f صفری ازمرتبهٔ اول یا یك صفر ساده در $z=a$ دارد. اگر $f(a)=f'(a)=0$ و $f''(a)\neq 0$ ، آنگاه صفر f در $z=a$ از مرتبهٔ دو است، وغیره.

مثال ۲. صفرها

تابع $\sin z$ صفرهای ساده‌ای در $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ دارد. تابع $(z-a)^3$ صفری از مرتبهٔ سه در $z=a$ دارد. تابع $1-\cos z$ صفرهایی مرتبه دوم در $z=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ دارد. تابع $1/(1-z)$ صفری ساده دربینهایت دارد. ▲

واضح است که هرگاه $f(z)$ دریك همسایگی نقطهٔ $z=a$ تحلیلی بوده وصفری از مرتبهٔ n در a داشته باشد، از قضیهٔ تیلور، بخش ۳.۱۶، نتیجه می‌شود که ضرایب $b_0, \ldots, b_{n-1}$ سری تیلور چنین تابعی به‌مرکز $z=a$ صفرند و سری به‌صورت زیر است:

$$f(z)=b_n(z-a)^n+b_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots \qquad (b_n\neq 0). \tag{۳}$$
$$=(z-a)^n[b_n+b_{n+1}(z-a)+b_{n+2}(z-a)^2+\cdots$$

نقطه‌ای ازمجموعه‌نقاط S را **نقطهٔ‌تنهای** S نامند هرگاه‌آن نقطه همسایگیی‌داشته باشد که نقطهٔ دیگری از S را دربرنگیرد. نقطهٔ b را **نقطهٔ انباشتگی** S (یا **نقطهٔ حدی** S) نامند اگر هرهمسایگی b (صرف نظر ازکوچکیش) شامل حداقل یك نقطه (جز b) از S باشد (وبنابراین بینهایت نقطه‌از S را دربر گیرد). توجه داشته باشید b ممکن‌است، اما الزامی نیست، که نقطه‌ای از S باشد.

مثال ۳. نقاط تنها و غیر تنها. نقاط انباشتگی

مجموعه نقاط $z=n$ ، $(n=1, 2, \ldots)$، صرفاً ازنقاط تنهاتشکیل شده ودرصفحهٔ‌متناهی نقطهٔ انباشتگی ندارد.

مجموعه نقاط $z=i/n$ ، $(n=1, 2, \ldots)$ ، روی محور موهومی صرفاً از نقاط تنها تشکیل شده و در یك نقطه انباشتگی دارد، یعنی $z=0$ ، این نقطه به مجموعه تعلق ندارد.

مجموعهٔ تمام اعداد مختلط z که به‌ازای‌آنها $|z|<1$ نقطهٔ تنها ندارد. تمام‌نقاط مجموعه ونیز نقاط روی دایرهٔ یکه $|z|=1$ (که به مجموعه تعلق ندارد) نقاط انباشتگی مجموعه‌اند.

قضیهٔ ۱ (صفرها)

صفرهای تابع تحلیلی $(\neq \circ)$ $f(z)$ تنها هستند.

اثبات. (۳) را درنظر می‌گیریم. فرض کنید $g(z)$ تابع تحلیلی باشد که با سری درون کروشه نشان داده شده است. چون $b_n \neq \circ$، داریم $g(a) \neq \circ$. درنتیجه، چون $g(z)$ پیوسته است، دریکی ازهمسایگیهای $z=a$، صفرنیست. بنابراین $f(z)$ درآن همسایگی، صفرنیست. (مگردر $z=a$)، یعنی $z=a$ تنهاصفر $f(z)$ درآن همسایگی‌است، وبنابراین تنها است. ▲

تکینیها

تکینیهای توابع تحلیلی ممکن است ازچندنوع مختلف باشند.[1] نخست یادآوری می کنیم که نقطهٔ تکین یك تابع تحلیلی $f(z)$ نقطه‌ای است که درآن تحلیلی بودن $f(z)$ ازمیان می‌رود (ر. ك. بخش ۳.۱۶). همچنین می گوییم که $f(z)$ در آن نقطه تکین است، یا یك‌تکینی دارد. تابع $f(z)$ را تکین دربینهایت نامند، هر گاه $f(1/z)$ در $z=\circ$ تکین باشد.

اگر $f(z)$ درنقطه‌ای مانند $z=a$ تکینی تنهایی داشته باشد، می‌توانیم آن را با **سری لوران** (بخش ۷.۱۶)

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty} b_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} \qquad (۴)$$

که در سرتاسر یك همسایگی $z=a$ (جز در خود $z=a$) اعتبار دارد نمایش داد. سری دوم (۴) را **بخش اصلی** $f(z)$ درنزدیکی $z=a$ می‌نامند.

ممکن است از n ی به بعد تمام ضرایب c_n صفر باشند، مثلا داشته‌باشیم $c_m \neq \circ$ و $c_n=\circ$ به‌ازای هر $n>m$. در این صورت (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty} b_n(z-a)^n+\frac{c_1}{z-a}+\cdots+\frac{c_m}{(z-a)^m} \quad (c_m \neq \circ). \qquad (۵)$$

دراین حالت که بخش اصلی ازتعدادی متناهی جمله تشکیل شده است، تکینی f در $z=a$ را **قطب** و m را **مرتبهٔ** قطب می‌نامند. قطبهای مرتبهٔ اول را **قطبهای ساده** نیز می‌نامند.

هر گاه تابع تحلیلی f (که درصفحهٔ مختلط تك مقداری است) تکینیی غیرازقطب داشته باشد، این تکینی را **تکینی ضروری** f می‌نامند.

بنا به تعریف، قطبها تکینیهای تنهاهستند. تمام تکینیهایی که تنها نیستند (مثلا، تکینی $\tan(1/z)$ در $z=\circ$) تکینیهای ضروریند. تکینی ضروری ممکن‌است‌تنها باشد یانباشد.

---

۱. یادآوری می کنیم که بنا به‌تعریف، تابع رابطه‌ای تك مقداری است (ر. ك. بخش ۴.۱۲).

اگر(۴) بینهایت c_n غیرصفر داشته باشد، دراین صورت تکینی $f(z)$ در $z=a$ قطب نیست بلکه تکینی ضروری تنهاست.

مثال ۴. قطبها، تکینیهای ضروری

تابع

$$f(z)=\frac{۱}{z(z-۲)^{۵}}+\frac{۳}{(z-۲)^{۲}}$$

قطب ساده‌ای در $z=۰$ وقطبی مرتبه پنج در $z=۲$ دارد. توابع

$$e^{۱/z}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!z^{n}}=۱+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{۲!z^{۲}}+\cdots \qquad (۶)$$

و

$$\sin\frac{۱}{z}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{(۲n+۱)!z^{۲n+۱}}=\frac{۱}{z}-\frac{۱}{۳!z^{۳}}+\frac{۱}{۵!z^{۵}}-+\cdots \qquad (۷)$$

یك تکینی ضروری تنها در $z=۰$ دارند.

تابع $\tan(۱/z)$ قطبهایی در

$$z=\pm\frac{۲}{\pi},\ \pm\frac{۲}{۳\pi},\ \ldots \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{z}=\pm\frac{\pi}{۲},\ \pm\frac{۳\pi}{۲},\ \ldots$$

دارد. بنابراین نقطهٔ حدی این نقاط، $z=۰$، تکینی ضروری غیرتنهای $\tan(۱/z)$ است.

مثال ۵. تکینی دربینهایت

چندجمله‌ای $f(z)=۲z+۶z^{۳}$ قطبی مرتبه سه دربینهایت دارد، زیرا

$$f\left(\frac{۱}{z}\right)=\frac{۲}{z}+\frac{۶}{z^{۳}}$$

در $z=۰$ چنین قطبی دارد. به‌طور کلی، هر چندجمله‌ای درجه n، قطبی از مرتبهٔ n در بینهایت دارد.

تابعهای e^{z}، $\sin z$، $\cos z$ هرکدام یك تکینی ضروری تنها دربینهایت دارند، زیرا $e^{۱/z}$، $\sin(۱/z)$، و $\cos(۱/z)$ هرکدام یك تکینی ضروری تنها در $z=۰$ دارند. ▲

می‌گویند تابع $f(z)$ درنقطهٔ $z=a$ تکینی برداشتنی دارد اگر این تابع در $z=a$ تحلیلی نباشد ولی بتوان بانسبت دادن مقداری مشخص به‌آن دراین نقطه تحلیلیش کرد. این تکینیهامورد توجه نیستند زیرا قابل برداشتند.

تابعی راکه سرتاسر صفحهٔ متناهی تحلیلی باشد **تابع تام** می‌خوانند.

هر گاه چنین تابعی دربینهایت نیز تحلیلی باشد، به‌ازای تمام z ها کراندار است و ازقضیهٔ لیوویل (ر. ك. بخش ۶.۱۴) نتیجه می‌شود که باید یك مقدار ثابت باشد. بنابراین هر تابع تحلیلی غیرثابت باید در بینهایت تکین باشد، مثلا چند جمله‌ایهای (حداقل درجه اول)، e^z، $\sin z$، و $\cos z$ توابع تام هستند و دربینهایت تکینند.

هر تابع تحلیلی که تنها تکینیهایش درصفحهٔ متناهی قطبها باشند، **تابع برخه ریخت** نامیده می‌شود.

مثال ۶. توابع برخه ریخت

توابع گویایی که مخرج آنها صفرنیست و $\tan z$، $\cot z$، $\sec z$ و $\csc z$ توابع برخه ریخت هستند. ▲

تقسیمبندی تکینیها به قطب و تکینی ضروری صرفاً کاری صوری نیست، زیرا رفتار یك تابع تحلیلی درهمسایگی یك تکینی ضروری کاملاً با رفتار آن درهمسایگی یك قطب متفاوت است.

مثال ۷. رفتار درنزدیکی قطب

تابع $f(z)=1/z^2$ قطبی در $z=0$ دارد و $|f(z)| \to \infty$ هر گاه z از هرطریقی به صفر میل کند. ▲

این مثال نشان می‌دهد

قضیهٔ ۲ (قطبها)

هرگاه $f(z)$ تحلیلی بوده وقطبی در $z=a$ داشته باشد، درآن صورت هرگاه $z \to a$، خواهیم داشت $|f(z)| \to \infty$ (ر.ك. مسئلهٔ ۳۰).

مثال ۸. رفتار درنزدیکی تکینی ضروری

تابع $f(z)=e^{1/z}$ تکینی ضروریی در $z=0$ دارد. این تابع محدودیتی حول محور موهومی ندارد؛ وقتی z ازطریق مقادیرحقیقی مثبت به صفر میل می کند بینهایت می‌شود، اما وقتی از طریق مقادیر حقیقی منفی $z=0$، به سمت صفرمیل می کند. این تابع در یك همسایگی به‌دلخواه کوچك $z \to 0$ هرمقدار مفروضی مانند $c=c_0e^{i\alpha} \neq 0$ را به خود می گیرد. در واقع، پس از قراردادن $z=re^{i\theta}$، باید معادلهٔ

$$e^{1/z}=e^{(\cos\theta - i\sin\theta)/r}=c_0e^{i\alpha}$$

را برحسب r و θ حل کنیم. بامساوی‌قراردادن‌قدرمطلقها وآوندها داریم $e^{(\cos\theta)/r}=c_0$ یا

$$\sin\theta=-\alpha r \quad \text{و} \quad \cos\theta=r\ln c_0$$

از این دومعادله و $\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱$ به دست می‌آوریم

$$\tan\theta=-\frac{\alpha}{\ln c_۰} \text{ و } r^۲=\frac{۱}{(\ln c_۰)^۲+\alpha^۲}$$

از این رو r را می‌توان با اضافه کردن مضارب ۲π به α کوچک کرد، بدون آنکه c تغییر کند. ▲

از این مثال می‌توان به قضیهٔ مشهور زیر رسید.

قضیهٔ پیکار

هرگاه $f(z)$ تحلیلی بوده و درنقطهٔ a تکینی ضروری تنهایی داشته باشد، می‌تواند درهر همسایگی به‌دلخواه کوچک a هرمقداری، به‌جز حداکثر یک مقدار استثنایی را احراز کند.

درمثال ۸، این مقدار استثنایی $z=۰$ است. اثبات قضیهٔ پیکار نسبتاً پیچیده است؛ درمرجع [F۱۱] می‌توان این اثبات را یافت.

مسائل بخش ۸۰۱۶

آیا توابع زیر دربینهایت تحلیلیند؟

۱. $z^۲+z^{-۲}$ ۲. $z^{-۳}+z^{-۱}$ ۳. $e^z,\ e^{z^۲},\ e^{-z}$

۴. $e^{۱/z},\ e^{۱/z^۲}$ ۵. $\cos z,\ \sin z$ ۶. $\cosh z,\ \sinh z$

۷. $\tan z,\ \cot z$ ۸. $(z^۲+۱)/(z^۲-۱)$ ۹. $z^{-۱}\sin z,\ \csc z$

نقشهای نواحی زیر بر کرهٔ عددی ریمان راتوصیف و رسم کنید.

۱۰. $\operatorname{Im} z > ۰$ ۱۱. $|z|\geqslant ۵$ ۱۲. $|z|\leqslant ۲$

۱۳. $۱/۲\leqslant|z|\leqslant ۲$ ۱۴. $|z|<۳,\ |\arg z|<\frac{\pi}{۴}$ ۱۵. $-\pi\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant\pi$

۱۶. $|\arg z|\leqslant ۳\pi/۴$ ۱۷. $|z|>۱,\ |\arg z|<\frac{\pi}{۲}$ ۱۸. $-\frac{\pi}{۴}<\arg z<\frac{۳\pi}{۴}$

۱۹. موقعیت نسبی z ، $-z$ ، $\bar{z}$ ، $-\bar{z}$ را در صفحهٔ مختلط و روی کرهٔ ریمان توصیف کنید.

۲۰. بااستفاده ازروشی که در ارتباط با (۲) شرح داده شد، $۱/z^۴$ را به یك سری لوران ازتوانهای منفی $z-۱$ بسط دهید.

کمان وصفرهای توابع زیر را تعیین کنید.

۲۱. $z^{2}-1$ ۲۲. z^{3} ۲۳. $(z+i)^{3}$

۲۴. $\cos^{2} z$ ۲۵. $\sin^{3} \pi z$ ۲۶. $(\sin z-1)^{2}$

۲۷. $\cosh^{2} z$ ۲۸. $z^{2}e^{z}$ ۲۹. $e^{z}-e^{2z}$

۳۰. قضیهٔ ۲ را برای $f(z)=z^{-2}+z^{-1}$ تحقیق کنید. این قضیه را ثابت کنید.

۳۱. فرض کنید $f(z)$ دارای صفری با مرتبهٔ n در $z=a$ باشد. نشان دهید که دراین صورت، $f^{2}(z)$ دارای صفری ازمرتبهٔ $2n$ است، مشتق $f'(z)$ صفری ازمرتبهٔ $n-1$ (به‌شرط $n>1$) دارد و $1/f(z)$ دارای قطبی ازمرتبهٔ n درآن نقطه است. مثالهایی دراین مورد بیاورید.

کمان ونوع تکینیهای توابع زیررا تعیین کنید.

۳۲. $z+z^{-1}$ ۳۳. $1/(z+a)^{3}$ ۳۴. $\cosh z$

۳۵. $e^{z}+e^{1/z}$ ۳۶. $\tan \pi z$ ۳۷. $e^{1/z}/z^{5}$

۳۸. $(\cos z-\sin z)^{-1}$ ۳۹. $\sin(1/z^{2})$ ۴۰. $e^{1/z}/(z-1)$

۱۷

انتگرالگیری به روش مانده‌ها

ازآنجا که برای تعیین ضرایب سری لوران (۱)، بخش ۷.۱۶، بدون استفاده از فرمولهای انتگرال (۲)، بخش ۷.۱۶، روشهای گوناگونی موجود است، ازفرمول c_1 می‌توان برای محاسبهٔ انتگرالهای مختلط به‌نحو بسیار ساده وظریفی استفاده کرد. c_1 را ماندهٔ $f(z)$ در $z=a$ می‌نامند. همچنین ازاین روش کارآمد می‌توان برای محاسبهٔ انتگرالهای حقیقی معین، همان طور که دربخشهای ۳.۱۷ و ۴.۱۷ خواهیم دید، استفاده کرد.

پیشنیازهای این فصل: فصول ۱۲، ۱۴، ۱۶.
مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت F.
جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱.۱۷ مانده‌ها

هرگاه $f(z)$ دریك همسایگی نقطهٔ $z=a$ تحلیلی باشد، آنگاه، باتوجه به‌قضیهٔ انتگرال کشی برای هرمرزی که دراین همسایگی دارد می‌توان نوشت

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \qquad (1)$$

اگر $f(z)$ دارای تکینی تنها در $z=a$ بوده و a در داخل C قرار داشته باشد، آنگاه، درحالت کلی، انتگرال (۱) مخالف صفرخواهد بود. در این حالت $f(z)$ را می‌توان به صورت سری لوران زیرنمایش داد:

$$(۲) \qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots.$$

این سری درحوزهٔ $0<|z-a|<R$، که R فاصلهٔ a ازنزدیکترین نقطهٔ تکین $f(z)$ است، همگراست. از (۲) بخش ۷.۱۶ نتیجه می‌گیریم که ضریب c_1 جملهٔ $1/(z-a)$ این بسط عبارت است از

$$c_1=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

درنتیجه

$$(۳) \qquad \int_C f(z)\,dz=2\pi i c_1,$$

انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی مسیر بستهٔ سادهٔ C که درحوزهٔ $0<|z-a|<R$ قرار دارد ونقطهٔ $z=a$ نقطهٔ داخلی آن است صورت می‌گیرد. ضریب c_1 دربسط (۲) تابع $f(z)$ ماندهٔ $f(z)$ در $z=a$ نامیده می‌شود، و درمورد آن از نماد

$$(۴) \qquad c_1=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

استفاده می‌کنیم.

چنانچه دیدیم بسط لوران را می‌توان به‌روشهای گوناگون به دست‌آورد بدون‌آنکه لازم باشد برای تعیین ضرایب آن ازفرمولهای انتگرال استفاده‌کرد. درنتیجه می‌توان مانده را به یکی از این روشها تعیین کرد و سپس از فرمول (۳) برای محاسبهٔ انتگرالهای مرزی استفاده کرد.

مثال ۱. محاسبهٔ انتگرال به‌کمك مانده

از تابع $f(z)=z^{-4}\sin z$ روی دایرهٔیکهٔ C، درجهت عکس‌حرکت عقربه‌های ساعت، انتگرال بگیرید.

از (۵) بخش ۴.۱۶ سری لوران

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!z}+\frac{z}{5!}-\frac{z^3}{7!}+-\cdots$$

رابه‌دست می‌آوریم. مشاهده می‌کنیم که $f(z)$ در $z=0$ دارای‌یك‌قطب مرتبهٔ سوم‌است، ماندهٔ نظیر عبارت است از $c_1=-1/3!$، واز (۳) نتیجه می‌شود که

$$\int_C \frac{\sin z}{z^4}\,dz=2\pi i c_1=-\frac{\pi i}{3}. \qquad \blacktriangle$$

قبل از اینکه درمحاسبهٔ انتگرالها جلوتر برویم روش متعارف سادهای برای تعیین مانده درحالتیکه یك قطب داریم ارائه میدهیم.

اگر $f(z)$ دارای یك **قطب ساده** در نقطهٔ $z=a$ باشد، سری لوران نظیر بهصورت زیراست [ر. ك. (۳) بخش قبل]:

$$f(z)=\frac{c_1}{z-a}+b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots \qquad (0<|z-a|<R)$$

که درآن $c_1\neq 0$. طرفین رابطه را در $(z-a)$ ضرب میکنیم:

$$(z-a)f(z)=c_1+(z-a)[b_0+b_1(z-a)+\cdots]. \tag{۵}$$

وقتی z به سمت a میل کند، طرف راست بهسمت c_1 میل میکند، و بهدست میآوریم

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z_1=c_1=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{۶}$$

این اولین نتیجهاست، فرمولی برای مانده درحالتیکه یك قطب ساده داریم.

درمورد یك قطب ساده،فرمولمفید دیگری بهشرح زیر بهدست میآید. هرگاه $f(z)$ دارای قطبی ساده در $z=a$ باشد، میتوان نوشت

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$$

که درآن $p(z)$ و $q(z)$ در $z=a$ تحلیلی هستند و $p(a)\neq 0$ و $q(z)$ دارای یكصفر ساده در $z=a$ است. در نتیجه، $q(z)$ را میتوان بهیك سری تیلور بهصورت

$$q(z)=(z-a)q'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}q''(a)+\cdots$$

بسط داد. ازاینرو، بنابه (۶)،

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)p(z)}{(z-a)[q'(a)+(z-a)q''(a)/2+\cdots]};$$

یعنی، درمورد قطب ساده همچنین داریم

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(a)}{q'(a)} \tag{۷}$$

مثال ۲. مانده در قطبهای ساده

تابع $f(z)=(4-3z)/(z^2-z)$ در $z=0$ و $z=1$ دارای دو قطب ساده است. از (۷)

به‌دست می‌آوریم

$$\blacktriangle\ \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\left[\frac{4-3z}{2z-1}\right]_{z=0}=-4, \quad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\left[\frac{4-3z}{2z-1}\right]_{z=1}=1$$

اکنون به بررسی **قطبهای از مرتبهٔ بالا** می‌پردازیم. هرگاه $f(z)$ درنقطهٔ $z=a$ دارای قطبی ازمرتبهٔ $m>1$ باشد، بسط لوران نظیرعبارت است از

$$f(z)=\frac{c_m}{(z-a)^m}+\frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_2}{(z-a)^2}+\frac{c_1}{z-a}$$
$$+b_0+b_1(z-a)+\cdots$$

که درآن $c_m\neq 0$ و سری در یك همسایگی از $z=a$، جز در خود نقطهٔ a، همگراست. با ضرب طرفین در $(z-a)^m$ به‌دست می‌آوریم

$$(z-a)^m f(z)=c_m+c_{m-1}(z-a)+\cdots+c_2(z-a)^{m-2}+c_1(z-a)^{m-1}$$
$$+b_0(z-a)^m+b_1(z+a)^{m+1}+\cdots.$$

این نشان می‌دهد که c_1، ماندهٔ $f(z)$ در $z=a$، اکنون ضریب جملهٔ $(z-a)^{m-1}$ در بسط تیلور تابع $g(z)=(z-a)^m f(z)$ به‌مرکز $z=a$ است. از این‌رو، بنا به‌قضیهٔ تیلور (بخش ۳.۱۶)،

$$c_1=\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

درنتیجه هرگاه $f(z)$ دارای یك قطب مرتبهٔ m در $z=a$ باشد، مانده عبارت است از

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]\right\}. \qquad (8)$$

مثال ۳. مانده در یك قطب از مرتبهٔ بالا

تابع

$$f(z)=\frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}$$

دارای یك قطب مرتبهٔ دوم در $z=1$ است، از (۸) ماندهٔ مربوطه را به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2 f(z)]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{z+4}\right)=\frac{8}{25}.$$

البته، اگر $f(z)$ تابعی گویا باشد، مانده را ازنمایش $f(z)$ برحسب کسرهای جزئی نیزمی‌توان به‌دست آورد.

$$f(z)=\frac{7z^4-13z^3+z^2+4z-1}{(z^3+z^2)(z-1)^2}=\frac{3}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{4}{z+1}-\frac{1}{(z-1)^2}$$

مشاهده می‌کنیم که

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=3 \text{ ،} \quad \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=4 \text{ ،} \quad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=0$$

مسائل بخش ۱۰۱۷

مطلوب است ماندهٔ هریك از توابع زیر در نقاط تکین آنها.

۱. $\dfrac{1}{1-z}$ ۲. $\dfrac{z+3}{z+1}$ ۳. $\dfrac{1}{z^2}$

۴. $\dfrac{z}{1+z^2}$ ۵. $\dfrac{1}{z^2-1}$ ۶. $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$

۷. $\dfrac{z}{z^4-1}$ ۸. $\dfrac{1}{z^4-1}$ ۹. $\dfrac{1}{1-e^z}$

۱۰. $\sec z$ ۱۱. $\cot z$ ۱۲. $\tan z$

درهریك ازمسائل زیرمانده را درنقاط تکینی که درون دایرهٔ $|z|=1.5$ قرار دارند پیدا کنید.

۱۳. $\dfrac{3z^2}{1-z^4}$ ۱۴. $\dfrac{z-\frac{1}{4}}{z^2+3z+2}$ ۱۵. $\dfrac{6-4z}{z^3+3z^2}$

۱۶. $\dfrac{1}{(z^4-1)^2}$ ۱۷. $\dfrac{z+2}{(z+1)(z^2+16)}$ ۱۸. $\dfrac{4-3z}{z^3-3z^2+2z}$

انتگرالهای زیر را بااین فرض که C دایرهٔ یکه است (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) محاسبه کنید.

۱۹. $\displaystyle\int_C e^{1/z}\,dz$ ۲۰. $\displaystyle\int_C ze^{1/z}\,dz$ ۲۱. $\displaystyle\int_C \cot z\,dz$

۲۲. $\displaystyle\int_C \tan z\,dz$ ۲۳. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\sin z}$ ۲۴. $\displaystyle\int_C \frac{z}{2z+i}\,dz$

۲۵. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\cosh z}$ ۲۶. $\displaystyle\int \frac{z^2-4}{(z-2)^4}\,dz$ ۲۷. $\displaystyle\int_C \frac{z^2+1}{z^2-2z}\,dz$

۲۸. $\int_C \frac{\sin \pi z}{z^4} dz$ ۲۹. $\int_C \frac{dz}{1-e^z}$ ۳۰. $\int_C \frac{(z^2+1)}{e^z \sin z} dz$

۲.۱۷ قضیهٔ مانده

تا اینجا می‌توانیم آن دسته از انتگرالهای مرزی راکه انتگران آنها فقط دارای یك نقطهٔ تکین تنها در داخل مرز انتگرالگیری است محاسبه‌کنیم. اکنون خواهیم دیدکه روش سادهٔ مزبور را به‌سادگی می‌توان به‌حالتی که انتگران دارای چند نقطهٔ تکین تنها درداخل مرز است تعمیم داد.

قضیهٔ مانده

فرض می‌کنیم $f(z)$ تابعی است‌که در داخل‌مسیر بستهٔ سادهٔ C و روی آن، جزبه‌ازای‌تعدادی متناهی از نقاط منفرد a_1، a_2، . . . ، a_m واقع در داخل C، تحلیلی است. آنگاه

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z), \qquad (1)$$

انتگرال روی C، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، گرفته می‌شود.

اثبات. هریك ازنقاط‌تکین a_j را درون دایره‌ای مانند C_j قرارمی‌دهیم؛ شعاع این‌دایره‌ها را آنقدر کوچك اختیارمی‌کنیم‌که تمام m دایره و C از هم مجزا باشند (شکل ۳۳۲). آنگاه $f(z)$ درحوزهٔ همبند چندگانهٔ D که با C و C_1، . . . ، C_m محدود می‌شود و روی تمامی کرانهٔ D تحلیلی است. باتوجه به قضیهٔ انتگرال کشی داریم

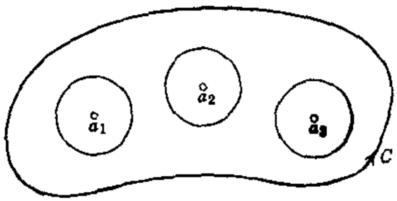
$$\int_C f(z)\, dz + \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz + \cdots + \int_{C_m} f(z)\, dz = 0, \qquad (2)$$

انتگرال روی C درجهت عکس عقربه‌های ساعت و سایر انتگرالها در جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌گرفته می‌شود (ر. ك. بخش ۳.۱۴). اکنون جهت انتگرالگیری روی C_1، . . . ، C_m را عوض می‌کنیم. در نتیجه علامت مقادیر این انتگرالها عوض می‌شود و از (۲) به دست می‌آوریم

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz + \cdots + \int_{C_m} f(z)\, dz \qquad (3)$$

حالا کلیهٔ انتگرالها درجهت عکس‌حرکت عقربه‌های‌ساعت گرفته می‌شوند. چون، بنابه(۳) از بخش قبل

$$\int_{C_j} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)$$



شکل ۳۳۲. قضیهٔ مانده

فرمول (۱) از (۳) نتیجه می‌شود و قضیه به‌اثبات می‌رسد. ▲

این قضیهٔ مهم در ارتباط با انتگرالهای موهومی و حقیقی کاربردهای گوناگونی دارد. نخست به‌بررسی چند انتگرال مختلط می‌پردازیم.

مثال ۱. انتگرالگیری به‌کمك قضیهٔ مانده

تابع $(4-3z)/(z^{2}-z)$، جز درنقاط ۰ و ۱ که دراین‌دونقطه دارای قطب ساده‌است، تحلیلی است؛ مانده‌ها به‌ترتیب برابرند با ۴ــ و ۱ (ر. ك. مثال۲، بخش قبل). بنابراین

$$\int_{C}\frac{4-3z}{z^{2}-z}\,dz=2\pi i\,(-4+1)=-6\pi i$$

برای هرمسیر بستهٔ سادهٔ C که نقاط $z=0$ و $z=1$ را دربرگرفته باشد و

$$\int_{C}\frac{4-3z}{z^{2}-z}\,dz=2\pi i(-4)=-8\pi i$$

برای هرمسیر بستهٔ سادهٔ C که $z=0$ داخل آن و $z=1$ خارج آن باشد، انتگرالها در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده‌اند.

مثال ۲. انتگرالی که دارای قطبهای ازمرتبهٔ بالا است

از $1/(z^{3}-1)^{2}$ درجهت عکس‌حرکت‌عقربه‌های ساعت روی‌دایرهٔ $|z-1|=1$ انتگرال بگیرید. تابع‌در $z=1$، $z=e^{2\pi i/3}$، و $z=e^{-2\pi i/3}$ دارای قطب مرتبهٔ‌دوم است. تنها قطب $z=1$ درون C قرار دارد. با استفاده از (۸)، بخش ۱.۱۷، به‌دست می‌آوریم

$$\int_{C}\frac{dz}{(z^{3}-1)^{2}}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z^{3}-1)^{2}}=2\pi i\Big(-\frac{2}{9}\Big)=-\frac{4\pi i}{9}$$

مثال ۳. تأیید نتیجه‌ای که قبلا به‌دست آمده است

از $1/(z-a)^{m}$ (m عددصحیح مثبت) درجهت عکس‌حرکت‌عقربه‌های ساعت روی‌مسیر بستهٔ سادهٔ دلخواه C که نقطهٔ $z=a$ را دربر دارد انتگرال بگیرید. داریم

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{1}{z-a}=1\ ,\qquad \operatorname*{Res}_{z=a}\frac{1}{(z-a)^{m}}=0\quad (m=2,\ 3,\ \dots)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} 2\pi i & (m=1) \\ 0 & (m=2,\ 3,\ \ldots), \end{cases}$$

که با نتیجهٔ مثال ۳، بخش ۱۰۱۴ مطابقت دارد.

مسائل بخش ۲۰۱۷

از $\frac{3z^3+2z-4}{z^2-4z}$ روی مسیرهای C، که در زیر داده شده‌اند، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید.

۱. $|z|=1$ ۲. $|z|=3$ ۳. $|z-4|=1$

از $\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}$ روی هریک از مسیرهای زیردر جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیرید.

۴. $|z-2|=\frac{1}{2}$ ۵. $|z|=\frac{3}{2}$ ۶. $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{4}$

هریک از انتگرالهای زیر را در حالتی‌که C دایرهٔ یکه است (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت) محاسبه کنید.

۷. $\int_C \frac{3z}{3z-1}dz$ ۸. $\int_C \frac{z}{4z^2-1}dz$ ۹. $\int_C \frac{dz}{z^2-2z}$

۱۰. $\int_C \frac{dz}{z^2+4}$ ۱۱. $\int_C \frac{z+1}{4z^3-z}dz$ ۱۲. $\int_C \frac{z^5-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)}dz$

۱۳. $\int_C \frac{z}{1+9z^2}dz$ ۱۴. $\int_C \frac{z+1}{z^4-2z^3}dz$ ۱۵. $\int_C \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2}dz$

۱۶. $\int_C \tan z\, dz$ ۱۷. $\int_C \tan \pi z\, dz$ ۱۸. $\int_C \frac{6z^2-4z+1}{(z-2)(1+4z^2)}dz$

۱۹. $\int_C \tan 2\pi z\, dz$ ۲۰. $\int_C \frac{\tan \pi z}{z^3}dz$ ۲۱. $\int_C \frac{e^z}{z^2-5z}dz$

۲۲. $\int_c \frac{e^z}{\sin z} dz$ ۲۳. $\int_c \frac{e^z}{\cos z} dz$ ۲۴. $\int_c \frac{e^z}{\cos \pi z} dz$

۲۵. $\int_c \frac{\cosh z}{z^2 - 3iz} dz$ ۲۶. $\int_c \coth z\, dz$ ۲۷. $\int_c \frac{\sinh z}{2\bar{z} - i} dz$

۲۸. $\int_c \cot z\, dz$ ۲۹. $\int_c \frac{\cot z}{z} dz$ ۳۰. $\int_c \frac{e^{z^2}}{\cos \pi z} dz$

۳.۱۷ محاسبهٔ انتگرالهای حقیقی

قضیهٔ مانده روشی ساده و بسیار ظریف برای محاسبهٔ دسته‌های معینی از انتگرالهای حقیقی پیچیده عرضه می‌کند، وچنانچه خواهیم دید دربسیاری موارد این روش انتگرالگیری را می‌توان به‌کاری سرراست تبدیل کرد.

انتگرال توابعی‌گویا از $\cos\theta$ و $\sin\theta$

نخست انتگرالهایی از نوع

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\ \sin\theta)\, d\theta \qquad (1)$$

را که در آن $R(\cos\theta,\ \sin\theta)$ یك تابع گویای حقیقی از $\cos\theta$ و $\sin\theta$ و برفاصلهٔ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ متناهی است، مورد بررسی قرارمی‌دهیم. باقراردادن $z = e^{i\theta}$، به دست می‌آوریم

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

ومشاهده می‌کنیم کــه انتگرال تابعی‌گویا، مثل $f(z)$، از z است. وقتی θ از 0 تا 2π تغییرمی‌کند، متغیر z یك‌بار دایرهٔ‌یکهٔ $|z| = 1$ رادرجهت عکس حرکت عقربه‌های‌ساعت دور می‌زند. نظر به‌اینکه $dz/d\theta = ie^{i\theta}$، داریم $d\theta = dz/iz$ و انتگرال موردنظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$I = \int_c f(z) \frac{dz}{iz} \qquad (2)$$

انتگرالگیری روی دایرهٔ یکه درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت صورت می‌گیرد.

مثال۱. انتگرالی از نوع (۱)

فرض می‌کنیم p عدد حقیقی ثابتی درفاصلهٔ $۱ > p > ۰$ باشد. انتگرال

$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{d\theta}{۱-۲p\cos\theta+p^{۲}} = \int_{C} \frac{dz/iz}{۱-۲p\frac{۱}{۲}\left(z+\frac{۱}{z}\right)+p^{۲}}$$

$$= \int_{C} \frac{dz}{i(۱-pz)(z-p)}$$

را درنظرمی‌گیریم. انتگران دارای دوقطب ساده در $z=۱/p > ۱$ و $z=p < ۱$ است. تنها قطب دوم درون دایرهٔ یکهٔ C قرار دارد، ومانده برابراست با

$$\operatorname*{Res}_{z=p} \frac{۱}{i(۱-pz)(z-p)} = \left[\frac{۱}{i(۱-pz)}\right]_{z=p} = \frac{۱}{i(۱-p^{۲})}$$

ازقضیهٔ مانده نتیجه می‌شود

$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{d\theta}{۱-۲p\cos\theta+p^{۲}} = ۲\pi i \frac{۱}{i(۱-p^{۲})} = \frac{۲\pi}{۱-p^{۲}} \quad (۰ < p < ۱). \qquad \blacktriangle$$

انتگرالهای ناسرهٔ توابع گویا

اکنون به‌بررسی انتگرالهای حقیقی ازنوع

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad (۳)$$

می‌پردازیم. چنین انتگرالی،که فاصلهٔ انتگرالگیری درآن متناهی نیست. **انتگرال ناسره** نامیده می‌شود وبه معنی زیراست:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{۰} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{۰}^{b} f(x)\,dx \qquad (۴')$$

هرگاه هردوحد موجود باشند، آنگاه می‌توان میل به $-\infty$ و ∞ را درهم ادغام کرده چنین نوشت.[۱]

---

۱. عبارت طرف راست (۴) را **مقدار اصلی کشی** انتگرال می‌نامند ؛ این مقدار ممکن است حتی درصورت عدم وجود حدودی که در(۴′) آمده‌اند موجود باشد. برای نمونه

$$\lim_{b\to\infty}\int_{۰}^{b} x\,dx = \infty \quad \text{ولی} \quad ، \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} x\,dx = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{r^{۲}}{۲}-\frac{r^{۲}}{۲}\right) = ۰$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx. \qquad (۴)$$

فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ که در (۳) آمده یك تابع گویای حقیقی باشد که مخرج آن به‌ازای هرمقدارحقیقی x مخالف صفر است ودرجهٔ آن لااقل دو درجه بیشتراز درجهٔ صورت است. دراین صورت حدودهایی که در (′۴) آمده‌اند وجود دارند، ومی‌توان انتگرالگیری را از (۴) شروع کرد. انتگرال مرزی متناظر، یعنی

$$\int_C f(z)\,dz \qquad (۴^*)$$

روی مسیر C، مطابق شکل ۳۳۳، را درنظر می‌گیریم. نظر به‌اینکه $f(x)$ گویا است، $f(z)$ دارای تعدادی متناهی‌قطب درنیم صفحهٔ فوقانی‌است، واگر r را به‌قدرکافی بزرگ اختیارکنیم، C همهٔ این قطبها را دربرمی گیرد. آنگاه بنابه قضیهٔ مانده به‌دست می‌آوریم

$$\int_C f(z)\,dz = \int_S f(z)\,dz + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = ۲\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

مجموع بالا تمام مانده‌های $f(z)$ را در نقاطی از نیم صفحهٔ فوقانی که درآنها $f(z)$ دارای قطب است دربرمی‌گیرد. ازاینجا نتیجه می گیریم

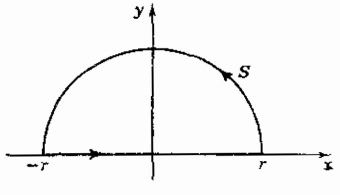
$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = ۲\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) - \int_S f(z)\,dz. \qquad (۵)$$

ثابت می‌کنیم که اگر $r\to\infty$، مقدار انتگرال روی نیمدایرهٔ S به‌سمت صفرمیل می‌کند. هرگاه قراردهیم $z=re^{i\theta}$، آنگاه S با ثابت $= r$ نمایش داده می‌شود، و هنگامی‌که z روی S حرکت می‌کند متغیر θ از ۰ تا π تغییرمی‌کند. چون درجهٔ مخرج $f(z)$ لااقل دو واحد از درجهٔ صورت بیشتراست، به‌ازای مقادیرثابت وبزرگ k و r_0 داریم

$$|f(z)| < \frac{k}{|z|^۲} \qquad (|z| = r > r_0).$$

با استفاده از (۴) بخش ۲.۱۴ به‌دست می‌آوریم

$$\left|\int_S f(z)\,dz\right| < \frac{k}{r^۲}\pi r = \frac{k\pi}{r} \qquad (r > r_0).$$



شکل ۳۳۳. مسیر انتگرال مرزی در (*۴)

درنتیجه، وقتی r به سمت بینهایت میل می‌کند، مقدار انتگرال روی S به سمت صفر میل می‌کند، و (۴) و (۵) نتیجه می‌دهند

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = ۲\pi i \sum \operatorname{Res} f(z), \qquad (۶)$$

مجموع بالا روی همهٔ مانده‌های $f(z)$ که با قطبهای $f(z)$ درنیم‌صفحهٔ فوقانی متناظرند محاسبه می‌شود.

مثال ۲. یك انتگرال ناسره از ۰ تا ∞

بااستفاده از (۶)، ثابت می‌کنیم

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{۱+x^{۴}} = \frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$$

درحقیقت $f(z) = ۱/(۱+z^{۴})$ دارای چهارقطب در نقاط

$$z_{۱} = e^{\frac{\pi i}{۴}}, \quad z_{۲} = e^{-\frac{۳\pi i}{۴}}, \quad z_{۳} = e^{-\frac{۳\pi i}{۴}}, \quad z_{۴} = e^{-\frac{\pi i}{۴}}$$

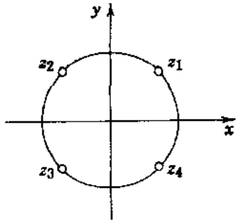
است. دوقطب اول درنیم صفحهٔ فوقانی قراردارند (شکل ۳۳۴). با توجه به (۷) از ۱۰۱۷ می‌یابیم

$$\operatorname*{Res}_{z=z_{۱}} f(z) = \left[\frac{۱}{(۱+z^{۴})'}\right]_{z=z_{۱}} = \left[\frac{۱}{۴z^{۳}}\right]_{z=z_{۱}} = \frac{۱}{۴} e^{-\frac{۳\pi i}{۴}} = -\frac{۱}{۴} e^{-\frac{\pi i}{۴}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_{۲}} f(z) = \left[\frac{۱}{(۱+z^{۴})'}\right]_{z=z_{۲}} = \left[\frac{۱}{۴z^{۳}}\right]_{z=z_{۲}} = \frac{۱}{۴} e^{-\frac{۹\pi i}{۴}} = \frac{۱}{۴} e^{-\frac{\pi i}{۴}}.$$

بنا به (۱) از بخش ۸۰۱۲ و (۶) از این بخش

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{۱+x^{۴}} = \frac{۲\pi i}{۴}\left(-e^{\frac{\pi i}{۴}} + e^{-\frac{\pi i}{۴}}\right) = \pi \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{\sqrt{۲}}. \qquad (۷)$$



شکل ۳۳۴. مثال ۲

چون $1/(1+x^4)$ تابعی زوج است،

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^4}.$$

از اینجا و (۷) می‌توان نتیجهٔ موردنظر را به‌دست آورد.

مسائل بخش ۳.۱۷

انتگرالهای زیر را که شامل کسینوس و سینوس هستند محاسبه کنید.

۱. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

۲. $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}$

۳. $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k+\cos\theta}\ (k>1)$

۴. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25-24\cos\theta}$

۵. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\cos\theta}d\theta$

۶. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{17-8\cos\theta}d\theta$

۷. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}d\theta$

۸. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}d\theta$

۹. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5/4-\sin d\theta}$

۱۰. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$

۱۱. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}d\theta$

۱۲. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}d\theta$

انتگرالهای نا‌سرهٔ زیر را محاسبه کنید.

۱۳. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

۱۴. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

۱۵. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^6}$

۱۶. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+16}$

۱۷. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}$

۱۸. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(4+x^2)^2}dx$

۱۹. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3}{1+x^8}dx$

۲۰. $\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

۲۱. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^۲+۱)(x^۲+۹)}$ ۲۲. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)^۲}$

۲۳. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{-۲x+۲}$ ۲۴. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)} dx$

۲۵. مسئلهٔ ۱۳ را بــه کمك روشهای مقدمــاتی حل کنید. جوابهای مسائـل ۱۸ و ۱۹ را بدون محاسبه به‌دست آورید.

۴۰۱۷ چند نوع دیگر از انتگرالهای حقیقی

دسته‌هــای دیگری ازانتگرالهای حقیقی‌وجــود دارندکه بــا اعمال قضیهٔ مانده درمــورد انتگرالهای مختلط مناسب می‌توان آنها را محاسبه کرد. درعمل چنین انتگرالهایی دررابطه با تبدیلات انتگرالی یا نمایش توابع خاص پدیدار می‌شوند. دراین بخش دودسته ازاین انتگرالها را بررسی خواهیم کرد. یکی ازاین دودسته درمسائلی که شامل نمایش انتگرال فوریه هستند، پیش می‌آید (بخش ۹۰۱۰). دستهٔ دیگرازانتــگرالهای حقیقی تشکیل شده است که انتگرال آنها درنقطه‌ای ازفاصلهٔ انتگرالگیری بینهایت است.

انتگرالهای فوریه

انتگرالهای حقیقی که به‌شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx \, dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx \, dx \qquad (\text{حقیقی } s) \qquad (۱)$$

هستند درارتباط باانتگرال فوریه پیش می‌آیند.

اگر $f(x)$ تابعی گویا باشدکه درمفروضاتی که دررابطه با (۳) بخش ۳۰۱۷ ذکر شده است صدق کند، آنگاه می‌تــوان انتگرالهای (۱) را بــا روشی شبیه به‌روش محاسبهٔ انتگرالهای (۳) بخش قبل حساب کرد. درواقع، می‌توان انتگرال متناظر، یعنی

$$\int_C f(z) e^{isz} \, dz \qquad (\text{حقیقی ومثبت } s)$$

را برمرز C ازشکل ۳۳۳ درنظر گرفت و به‌جای (۶)، بخش ۳۰۱۷، نتیجه گرفت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = ۲\pi i \sum \text{Res} \, [f(z) e^{isz}], \qquad (s > ۰) \qquad (۲)$$

دراینجا جمع روی مانده‌های $f(z)e^{isz}$ درقطبهای آن درنیم صفحهٔ فوقانی بسته شده است. بامساوی قراردادن قسمتهای حقیقی وموهومی در طرفین (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx = -۲\pi\sum \operatorname{Im}\operatorname{Res}[f(z)e^{isz}],$$
(۳) $\qquad\qquad (s>۰)$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx = ۲\pi\sum \operatorname{Re}\operatorname{Res}[f(z)e^{isz}].$$

یادآوری می‌کنیم که (۶) از ۳.۱۷ با اثبات اینکه مقدار انتگرال برروی نیمدایرهٔ S شکل ۳۳۳ وقتی $r \to \infty$ به‌سمت صفرمیل می‌کند، به‌دست آمده است. حال برای به‌دست آوردن (۲) باید همان مطلب را درمورد انتگرال مرزی حاضر اثبات کنیم. این کاررا می‌توان به شرح زیر انجام داد. چون S درنیم صفحهٔ فوقانی $y \geqslant ۰$ قرار داد و $s>۰$، نتیجه می‌گیریم

$$|e^{isz}| = |e^{isx}|\,|e^{-sy}| = e^{-sy} \leqslant ۱ \qquad (s>۰\ ,\ y\geqslant ۰).$$

از اینجا نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$|f(z)e^{isz}| = |f(z)|\,|e^{isz}| \leqslant |f(z)| \qquad (s>۰, y\geqslant ۰).$$

که مسئلهٔ حاضر را به همان مسئلهٔ بخش قبل تبدیل می‌کند و به‌همان نحو مشاهده می‌کنیم که مقدارانتگرال موردنظروقتی که r به‌سمت بینهایت میل می‌کند به‌سمت صفرمی‌گراید، و (۲) به‌اثبات می‌رسد.

مثال ۱. کاربردی از (۳)

می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^۲+x^۲}\,dx = ۰ \quad ، \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^۲+x^۲}\,dx = \frac{\pi}{k}e^{-ks} \quad (s>۰,\ k>۰).$$

درحقیقت $e^{isz}/(k^۲+z^۲)$ تنها یك قطب، درنیم صفحهٔ فوقانی دارد، ونقطه $z=ik$ یك قطب سادهٔ آن است؛ از (۷) بخش ۱.۱۷ به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^۲+z^۲} = \left[\frac{e^{isz}}{۲z}\right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{۲ik}.$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{k^۲+x^۲}\,dx = ۲\pi i\,\frac{e^{-ks}}{۲ik} = \frac{\pi}{k}e^{-ks}$$

ازاینجا حکم ثابت می‌شود [(۱۴) بخش ۹.۱۰ را نیز ببینید].

انواع دیگری از انتگرالهای ناسرهٔ حقیقی

نوع دیگری از انتگرال ناسره انتگرال معین

$$\int_A^B f(x)\,dx \tag{۴}$$

است که انتگران آن درنقطه‌ای مانند a ازفاصلهٔ انتگرالگیری بینهایت می‌شود، یعنی

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty$$

آنگاه انتگرال (۴) بدین معنی است که

$$\int_A^B f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_A^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{a+\eta}^{B} f(x)\,dx \tag{۵}$$

دراینجا هم ε وهم η به‌طورمستقل وبا مقادیرمثبت به سمت صفرمیل می کنند. امکان دارد وقتی که ε و η مستقلاً به‌سمت صفرمیل می‌کنند، هیچیك‌ازاین انتگرالها موجود نباشدولی

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_A^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{B} f(x)\,dx \right] \tag{۶}$$

وجود داشته باشد؛ این حد **مقداراصلی کشی** انتگرال نامیده می‌شود واغلب اوقات چنین نوشته می‌شود:

$$\text{pr.v.} \int_A^B f(x)\,dx$$

مثلاً

$$\text{pr.v.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^3} \right] = 0 ;$$

مقداراصلی وجود دارد، اگرچه خود انتگرال بی‌معنی است. کل مطلب کاملاً شبیه موضوعاتی است که درقسمت دوم بخش قبل موردبحث قرار گرفته است.

برای محاسبهٔ انتگرالهای ناسره‌ای که انتگران آنها قطبهایی روی محور حقیقی دارد، ازمسیری استفاده می کنیم که بانیمدایره‌های کوچکی به‌مرکز نقاط تکین تکینه‌ها را دورمی‌زند؛ این موضوع درمثال زیر تشریح شده است.

مثال ۲. انتگرانی که یك قطب روی محورحقیقی دارد. انتگرال سینوسی

نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(این حد انتگرال سینوسی $\mathrm{Si}(x)$ است وقتی که $x \to \infty$؛ ر.ك. بخش ۹.۱۰.) تابع $(\sin z)/z$ را مورد بررسی قرارنمی‌دهیم زیرا این تابع رفتارمناسبی دربینهایت ندارد. بدین جهت e^{iz}/z را، که قطب ساده‌ای در $z=0$ دارد بررسی می کنیم، و از آن روی مرزی که درشکل ۳۳۵ نشان داده شده است انتگرال می گیریم. چون e^{iz}/z در داخل و روی دایرهٔ C تحلیلی است، ازقضیهٔ انتگرال کشی نتیجه می‌شود

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0 \tag{۷}$$

نشان می‌دهیم که وقتی R به‌سمت بینهایت میل کند، مقدارانتگرال برروی نیمدایرهٔبزرگ C_1 به سمت صفر میل می‌کند. اگر بنویسم $z=Re^{i\theta}$ خواهیم داشت $dz=iRe^{i\theta}d\theta$، وبنابراین $dz/z=id\theta$

$$\left|\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| = \left|\int_0^\pi e^{iz} i\,d\theta\right| \leqslant \int_0^\pi |e^{iz}|\,d\theta \qquad (z=Re^{i\theta}).$$

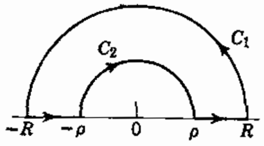
انتگران طرف راست را می‌توان چنین نوشت:

$$|e^{iz}| = |e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}| = |e^{iR\cos\theta}|\,|e^{-R\sin\theta}| = e^{-R\sin\theta}$$

از اینجا و بااستفاده از $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ به‌دست می‌آوریم

$$\int_0^\pi |e^{iz}|\,d\theta = \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\theta$$
$$= 2\left[\int_0^\varepsilon e^{-R\sin\theta}\,d\theta + \int_\varepsilon^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta\right]$$

دراینجا ε مقدار دلخواهی بین ۰ و $\pi/2$ است. حداکثر قدرمطلق انتگران درانتگرالهای اول ودوم طرف راست به‌ترتیب برابر ۱ و $e^{-R\sin\varepsilon}$ است، چراکه درفاصلهٔ انتگرالگیری انتگران یك تابع نزولی یکنوا از θ است. درنتیجه تمامی عبارت طرف راست کوچکتر است از



شکل ۳۳۵. مثال ۲

$$۲\left[\int_{۰}^{\varepsilon} d\theta+e^{-R\sin\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\pi/۲} d\theta\right]$$

$$=۲\left[\varepsilon+e^{-R\sin\varepsilon}\left(\frac{\pi}{۲}-\varepsilon\right)\right]<۲\varepsilon+\pi e^{-R\sin\varepsilon}$$

و درمجموع

$$\left|\int_{C_۱}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|<۲\varepsilon+\pi e^{-R\sin\varepsilon}$$

نخست ε را به‌اندازهٔ دلخواه کوچك می گیریم. آنگاه، می‌توانیم، درحالی‌که ε را ثابت نگه داشته‌ایم، باانتخاب R ی که به قدرکافی بزرگ است جملهٔ آخر رابه‌اندازهٔ دلخواه کوچك کنیم. به‌این ترتیب، وقتی‌که R به سمت بینهایت میل می کند مقدار انتگرال روی $C_۱$ به‌سمت صفرمیل می‌کند.

درمورد انتگرال برروی نیمدایرهٔ کوچك $C_۲$ درشکل ۳۳۵ داریم

$$\int_{C_۲}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{C_۲}\frac{dz}{z}+\int_{C_۲}\frac{e^{iz}-۱}{z}dz.$$

مقدار انتگرال اول طرف راست $-\pi i$ است. انتگران انتگرال دوم در $z=۰$ تحلیلی است ، و بنابراین وقتی‌که $\rho\to ۰$ قدرمطلق آن کراندار می‌ماند. ازاینجا واز (۴) بخش ۲.۱۴ نتیجه می‌گیریم که وقتی $\rho\to ۰$ مقدارانتگرال به‌صفرمیل می‌کند. باتوجه به(۷) به دست می‌آوریم

$$\text{pr. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=-\lim_{\rho\to ۰}\int_{C_۲}\frac{e^{iz}}{z}dz=+\pi i$$

قسمتهای موهومی در دوطرف باهم مساویند:

$$\text{pr. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi \qquad (۸)$$

انتگران (۸)در $x=۰$ تکین نیست. به‌علاوه چون به‌ازای xهای مثبت تابع $۱/x$ نزولی است ، مساحت زیرمنحنی انتگران بین دوصفر مثبت متوالی به طریقی یکنوا نزول می‌کند، یعنی قدرمطلقهای انتگرالهای

$$I_n=\int_{n\pi}^{n\pi+\pi}\frac{\sin x}{x}dx \qquad n=۰, ۱, \cdots$$

تشکیل دنبالهٔ نزولی یکنوای $|I_۱|$، $|I_۲|$، ...، را می‌دهد وقتی‌که $n\to\infty$، $I_n\to ۰$ چون این انتگرالها یــك درمیان مثبت و منفی هستند ، ازمحك لایبنیتس بخش ۴.۱۵ نتیجه

می‌شودکه سری نامتناهی $I_0+I_1+I_2+\dots$ همگراست. بدیهی است که مجموع سری برابر انتگرال زیراست:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx$$

وبنابراین وجود دارد. به‌همین نحو می‌توان نشان داد که انتگرال از ۰ تا $-\infty$ موجود است. ازاین رو لازم نیست که در (۸) مقدار اصلی را درنظربگیریم و

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \pi.$$

چون انتگران تابعی زوج است، نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود. ▲

مسائل بخش ۴۰۱۷

۱. (۳) را از (۲) به‌دست آورید.

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

۲. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}dx$

۳. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$

۴. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 3x}{1+x^4}dx$

۵. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos sx}{x^2+1}dx$

۶. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 2x}{x^2+x+1}dx$

۷. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^4+1}dx$

۸. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

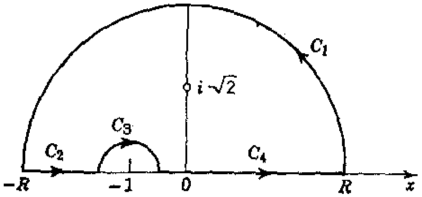
۹. باانتگرالگیری از e^{-z^2} روی کرانهٔ مستطیلی که رأسهای آن $-a$ ، a ، $a+ib$ ، $-a+ib$ است، وقتی $a\to\infty$ و با استفاده از

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ ،نشان‌دهید که $$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

۱۰. با انتگرالگیری روی مرزی که درشکل زیر دیده می‌شود

$$\text{pr. v.}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$$

را بیابید.



مسئلهٔ ۱۰

۱۸

توابع تحلیلی مختلط و نظریهٔ پتانسیل

معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ یکی از مهمترین معادلات بامشتق جزئی در ریاضیات مهندسی است، چراکه این معادله در مباحث مربوط به میدانهای گرانشی (بخش ۸.۸)، میدانهای الکترواستاتیك (بخش ۱۱.۱۱)، هدایت‌گرما درحالت پابرجا (بخش ۵.۱۳)، جریان‌سیال تراکم ناپذیر، و غیره ظاهر می‌شود. نظریهٔ جوابهای این معادله نظریهٔ پتانسیل نامیده می‌شود.

در «حالت دوبعدی» وقتی که u فقط به دومختص دکارتی x و y بستگی دارد، معادلهٔ لاپلاس چنین می‌شود:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

چنانکه می‌دانیم جوابهای این معادله رابطهٔ نزدیکی با توابع تحلیلی دارند (ر. ك. بخش ۵.۱۲).[1] حال این رابطه و نتایج آن را با تفصیل بیشتر مورد بررسی قرارمی‌دهیم و با مثالهای عملی مأخوذ از هیدرودینامیك و الکترواستاتیك موضوع را تشریح می‌کنیم. در بخش ۳.۱۸ مشاهده خواهیم کرد ازنتایجی که درقسمت توابع تحلیلی‌به دست آمده است می‌توان برای تحلیل خواص‌عمومی مختلف توابع همساز استفاده‌کرد.درپایان، فرمول کلی مهمی (فرمول انتگرال پواسن) برای حل مسائل با مقدارکرانه‌ای که شامل معادلهٔ لاپلاس هستند دریك قرص مستدیر به‌دست خواهیم آورد.

پیشنیاز این فصل: فصول ۱۲ تا ۱۵.
مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت F.

---

۱. درحالت سه بعدی چنین رابطهٔ نزدیکی وجود ندارد.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱۰۱۸ میدانهای الکترواستاتیک

نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعهٔ بین ذرات باردار ازقانون کولن پیروی می کند. این نیرو برابر گرادیان تابعی مانند u، موسوم به پتانسیل الکترواستاتیك است، و در نقاطی که بار وجود ندارد، u جواب معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^{2} u = 0$$

است. ر. ك. بخش ۱۱۰۱۱. سطوح ثابت $= u$ را **سطوح هم‌پتانسیل** می‌نامند. درهر نقطهٔ P، گـرادیان u به سطح ثابت $= u$ که از آن نقطه می گذرد عمود است، یعنی، نیروی الکتریکی امتدادی داردکه برسطح هم‌پتانسیل عمود است.

مثال ۱. پتانسیل بین دوصفحهٔ موازی

پتانسیل میدان بین دوصفحهٔ هادی موازی‌نامتناهی (شکل ۳۳۶) راکه‌به‌ترتیب درپتانسیلهای U_1 و U_2 قرارگرفته‌اند پیداکنید. ازشکل صفحات نتیجه می‌شودکه u تنها به x بستگی دارد ومعادلهٔ لاپلاس به‌صورت $u'' = 0$ درمی‌آید. بادوبار انتگرالگیری به‌دست‌می‌آوریم $u = ax + b$ که درآن ثابتهای a و b به‌کمك‌مقادیر کرانه‌ای u در روی صفحات‌مشخص می‌شوند. مثلا، هرگاه صفحات‌با $x = -1$ و $x = 1$ متناظر باشد، جواب عبارت است از

$$u(x) = \frac{1}{2}(U_2 - U_1)x + \frac{1}{2}(U_2 + U_1).$$

سطوح هم پتانسیل صفحات موازی هستند.

مثال ۲. پتانسیل استوانه‌های هم محور

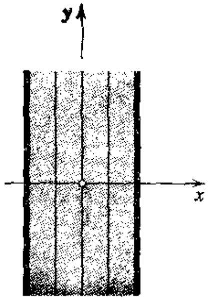
مطلوب است پتانسیل بین دواستوانهٔ هادی هم محورکه از دوطرف تابینهایت ادامه دارد (شکل ۳۳۷) وپتانسیلهای آنهابه‌ترتیب U_1 و U_2 است. دراینجا به‌دلیل تقارن، u فقط به $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ بستگی دارد ومعادلهٔ لاپلاس چنین می‌شود:

$$ru'' + u' = 0 \qquad \text{[ر. ك. (۴) بخش ۹۰۱۱]}$$

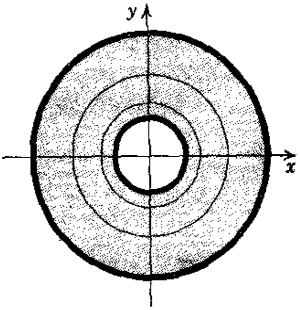
باتفکیك متغیرها وانتگرالگیری به‌دست می‌آوریم

$$u = a \ln r + b \text{ ،} u' = \frac{a}{r} \text{ ،} \ln u' = -\ln r + \tilde{a} \text{ ،} \frac{u''}{u'} = -\frac{1}{r}$$

a و b بامقادیر u برروی استوانه‌هامشخص می‌شوند. اگرچه هادی نامتناهی‌وجودندارد،



شکل ۳۳۶. پتانسیل مربوط به مثال۱



شکل ۳۳۷. پتانسیل مربوط به مثال۲

ولی میدان حاصل از یك هادی ایده‌آل که دراینجا مورد بحث قرار گرفت به طور تقریبی میدان حاصل ازیك هادی متناهی طولانی را درنقاطی که از دوانتهای استوانهٔ بسیار دور است به‌دست می‌دهد. ▲

هرگاه پتانسیل u فقط به مختصات دکارتی x و y بستگی داشته باشد، آنگاه‌معادلهٔ لاپلاس چنین می‌شود:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \,. \qquad (۱)$$

سطوح هم‌پتانسیل ثابت $= u$ به‌صورت خطوط هم پتانسیل درصفحهٔ xy ظاهرمی‌شوند.
فرض می‌کنیم‌که $u(x, y)$ همساز است، یعنی مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم آن پیوسته هستند. دراین صورت اگر $v(x, y)$ تابع همساز مزدوج $u(x, y)$ باشد (ر. ك. بخش ۵.۱۲)، تابع

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

تابعی تحلیلی‌از $z = x + iy$ خواهدبود. این‌تابع را **پتانسیل مختلط** نظیرپتانسیل‌حقیقی u می‌نامند. یادآوری می‌کنیم‌که مزدوج هرتابع مفروض u، صرفنظر ازیك مقدار ثابت به‌طوریکتا مشخص می‌شود.

چون خطوط ثابت $= v$ خطوط هم‌پتانسیل ثابت $= u$ را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند [جز درنقاطی‌که $F'(z)$ درآنها صفراست]، بامیدان الکتریکی هم‌جهت هستند و، بنابراین، **خطوط نیرو** نامیده می‌شوند.

مثال ۳. پتانسیل مختلط

درمثال ۱، $v = ay$ یك مزدوج مختلط u است. درنتیجه پتانسیل مختلط عبارت است از

$$F(z) = az + b = ax + b + iay,$$

وخطوط نیرو خطهای مستقیمی هستند که بامحور x موازیند.

مثال ۴. پتانسیل مختلط

درمثال ۲ داریم

$$u=a\ln r+b=a\ln|z|+b$$

که‌دارای مزدوج $v=a\arg z$ است. پتانسیل‌مختلط عبارت‌است‌از $F(z)=a\ln z+b$، وخطوط نیروخطهای مستقیمی هستند که از مبدأ می گذرند. همچنین می‌توان $F(z)$ را به پتانسیل مختلط یك خط منبع که نقطهٔ برخورد آن با صفحهٔ xy مبدأ است تعبیر کرد. ▲

اغلب اوقات می‌توان پتانسیلهای پیچیده‌تری را از ترکیب پتانسیلها به‌دست آورد. این موضوع درمثال زیرتشریح شده است.

مثال ۵. پتانسیل مختلط یك جفت خط منبع

پتانسیل مختلط یك جفت خط منبع هم قوه راکه بارشان با هم مخالف است و در نقاط $z=x_1$ و $z=x_2$ قرار دارند معین کنید. از مثالهای ۲ و ۴ نتیجه می‌شود که پتانسیل خطهای منبع به‌ترتیب عبارت است از

$$u_2=c\ln|z-x_2| \quad \text{و} \quad u_1=-c\ln|z-x_1|$$

اینها قسمتهای حقیقی پتانسیلهای مختلط

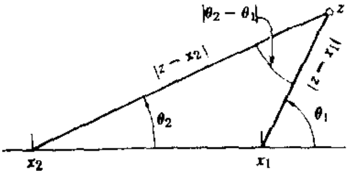
$$F_2(z)=c\ln(z-x_2) \quad \text{و} \quad F_1(z)=-c\ln(z-x_1)$$

هستند. درنتیجه، پتانسیل مختلط حاصل ازترکیب دو خط منبع عبارت است از

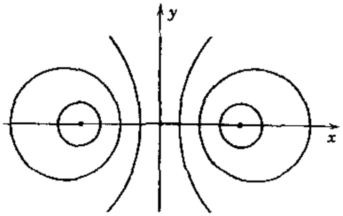
$$F(z)=F_1(z)+F_2(z)=c\ln\frac{z-x_2}{z-x_1} \tag{۲}$$

خطوط هم‌پتانسیل منحنیهای

$$u=\operatorname{Re}F(z)=c\ln\frac{|z-x_2|}{|z-x_1|}=\text{ثابت}$$



شکل ۳۳۸. مثال ۵



شکل ۳۳۹. میدان پتانسیل دوخط منبع هم قوه
که بار آنها باهم مخالف است

هستندکه خواننده با یك محاسبهٔ مستقیم می‌تواند نشان دهد این خطوط دایره هستند. خطوط نیرو

$$v = \operatorname{Im} F(z) = c \arg \frac{z - x_2}{z - x_1} = c[\arg(z - x_2) - \arg(z - x_1)] = \text{ثابت} ,$$

یعنی

$$v = c(\theta_2 - \theta_1) = \text{ثابت}$$

(ر. ك. شکل ۳۳۸). اکنون، $|\theta_2 - \theta_1|$ زاویهٔ بین خطوطی است‌که z را به x_1 و x_2 وصل می‌کنند. بنابراین، خطوط نیرومنحنیهایی هستندکه در طول هریك از آنها قطعه خط x_1x_2 بازاویهٔ ثابت دیده می‌شود، این منحنیها، همان طورکه درهندسهٔ مقدماتی آموختیم تمام قوسهای مستدیری هستندکه برروی x_1x_2 ساخته می‌شوند. تابع (۲) را می‌توان به پتانسیل‌مختلط خازنی مرکب ازدواستوانهٔ مستدیرکه دارای محورهای موازی ولی‌مختلف هستند نیز تعبیرکرد (شکل ۳۳۹).

مسائل بخش ۱۰۱۸

مطلوب است پتانسیل u بین دو استوانهٔ هم محور نسامتناهی‌که شعاعهای آنها r_1 و $r_2 (> r_1)$ است و به‌ترتیب درپتانسیلهای U_1 و U_2 قرارگرفته‌اند ؛ در حالیکه

۱. $r_1 = ۱$ ، $r_2 = ۵$ ، $U_1 = ۰$ ، $U_2 = ۱۰۰\,\mathrm{V}$

۲. $r_1 = ۰٫۵$ ، $r_2 = ۲$ ، $U_1 = -۱۱۰\,\mathrm{V}$ ، $U_2 = ۱۱۰\,\mathrm{V}$

۳. $r_1 = ۲$ ، $r_2 = ۲۰$ ، $U_1 = ۱۰۰\,\mathrm{V}$ ، $U_2 = ۲۰۰\,\mathrm{V}$

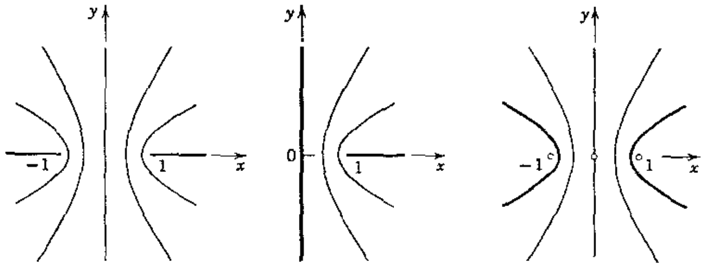
۴. $r_1 = ۳$ ، $r_2 = ۶$ ، $U_1 = ۱۰۰\,\mathrm{V}$ ، $U_2 = ۵۰\,\mathrm{V}$

۵. خطوط هم‌پتانسیل مختلط $F(z) = ۱/z$ را بیابید ونمودار این خطوط را رسم کنید.

۶. پتانسیل دوخط منبع را، که بارآنها باهم مخالف است، ودرنقاط $z=a$ و $z=-a$ قراردارند بیابید. نمودارخطوط هم پتانسیل را رسم کنید.

۷. مطلوب است پتانسیل دوخط منبع $z=a$ و $z=-a$ که بارشان یکسان است.

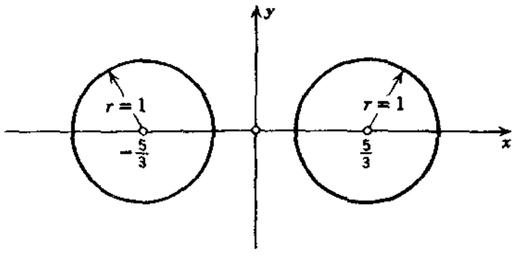
۸. نشان دهید کـه $F(z)=\cos^{-1}z$ را می‌توان به پتانسیل مختلط مربوط به هریك از شکلهای زیرتعبیر کرد.



مسئلهٔ ۸

۹. نشان دهید که $F(z)=\cosh^{-1}z$ رامی‌توان به‌پتانسیل مختلط بین‌دواستوانهٔ بیضوی هم‌کانون تعبیر کرد .

۱۰. پتانسیل بین استوانه‌های نامتناهی شکل زیر، u، را طوری بیابیدکـه روی استوانهٔ سمت چپ $u=-1$ و روی استوانهٔ سمت راست $u=1$ بـاشد . راهنمایـی . از پتانسیلی که درمسئلهٔ ۶ داشتیم استفاده کنید.



مسئلهٔ ۱۰

۱۸-۲ جریان سیال دوبعدی

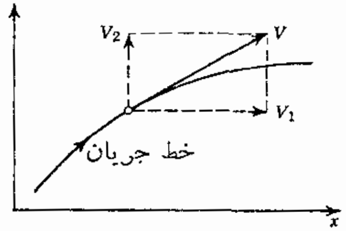
تـوابع همساز درهیدرودینامیك نقش مهمی دارند. برای تشریح این موضوع به بررسی حرکت پایرجای دوبعدی یك سیال غیرچسبنده می‌پردازیم. در اینجا منظور از «دوبعدی»

این است که حرکت سیال در تمام صفحات موازی با صفحهٔ xy یکسان است، سرعت موازی صفحه است. درنتیجه کافی است حرکت سیال درصفحهٔ xy را بررسی کنیم. «پابرجا» بدین معنی است که سرعت مستقل از زمان است.

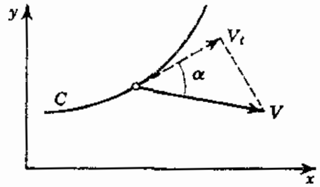
درهر نقطهٔ (x, y) جریان دارای سرعتی معین است که با اندازه و امتدادش مشخص می‌شود وبنا براین یك بردار است. چون درصفحهٔ مختلط هرعدد a یك بردار (برداری که مبدأ را به نقطهٔ نظیر a وصل می‌کند) را نمایش می‌دهد، می‌توان سرعت جریان را با یك متغیر مختلط، مثل

$$V = V_1 + iV_2, \tag{1}$$

نمایش داد. آنگاه V_1 و V_2 مؤلفه‌های سرعت درامتداد محورهای x و y هستند، و V مماس برمسیر حرکت ذرات سیال است. چنین مسیری **خط جریان** حرکت نامیده می‌شود. ر. ك. شکل ۳۴۰.



شکل ۳۴۰. سرعت



شکل ۳۴۱. مؤلفهٔ مماسی سرعت نسبت به منحنی C

اکنون منحنی هموار دلخواه C را درنظرمی گیریم، وفرض می‌کنیم متغیرحقیقی V_t مؤلفهٔ سرعت V در امتداد مماس بر C باشد (شکل ۳۴۱). اگر طول قوس C را با s نشان دهیم آنگاه مقدار انتگرال روی خط

$$\int_C V_t ds, \tag{2}$$

که درطول C و در جهت افزایش مقادیر s محاسبه می‌شود، **گردش** سیال درطول C نامیده می‌شود. ازتقسیم گردش برطول C، سرعت میانگین[1] جریان درطول منحنی C به

---

۱. تعاریف:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \quad a \leqslant x \leqslant b \text{ مقدارمیانگین } f \text{ درفاصلهٔ }$$

$$\frac{1}{l}\int_C f(s)ds = \quad C \text{ روی } f \text{ مقدار میانگین } \quad (l = C \text{ طول})$$

$$\frac{1}{A}\iint_D f(x, y)dx\,dy = \quad D \text{ روی } f \text{ مقدارمیانگین } (A = D \text{ مساحت})$$

دست می‌آید. اکنون

$$V_t = |V|\cos\alpha \qquad \text{(ر. ك. شكل ۳۴۱)}.$$

درنتیجه V_t برابرحاصل ضرب عـددی (بخش ۵.۶) V وبردار یکهٔ مماس بر C، یعنی (ر. ك. بخش ۲.۱۳)

$$\frac{dz}{ds}=\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}$$

است. دراینجا $z(s)=x(s)+iy(s)$ نمایشی‌از C است. بنابراین، حاصل ضرب $V_t ds$ را می‌توان چنین نوشت:

$$V_t\,ds = V\cdot dz = V_1\,dx + V_2\,dy \qquad (dz = dx + i\,dy)$$

(توجه کنیدکه این ضرب نقطه‌ای دوبردار است، نه‌ضرب مختلط.)

اکنون فرض می کنیم C یـك منحنی بسته باشد، در واقع فرض می کنیم C منحنی کرانهٔ یك‌حوزهٔ همبند سادهٔ D باشد. دراین صورت، اگر V درحوزه‌ای‌که شامل D و C است دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد، از قضیهٔ گرین (بخش ۴.۹) نتیجه می‌شودکـه گردش درطول C را می‌توان باانتگرال دوگانهٔ

$$\int_C (V_1\,dx + V_2\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (۳)$$

نمایش داد. تابع زیـرعلامت انتگرال طرف راست دارای تعبیر فیزیکی ساده‌ای به‌شرح زیراست. فـرض‌کنید C دایره‌ای به شعاع r باشد. حاصل تقسیم‌گردش بر $2\pi r$ سرعت میانگین سیال درطول C را نمایش می‌دهد، وسرعت زاویه‌ای میانگین ω_0ی سیال نسبت به محور دایره ازتقسیم سرعت میانگین برشعاع r به دست می‌آید؛ بنابراین

$$\omega_0 = \frac{1}{\pi r^2}\iint_D \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

عبارت طرف راست مقدارمیانگین[1] تابع

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right) \qquad (۴)$$

روی قرص D، قرصی‌کـه بادایرهٔ C محصورشده، است. تابع ω را **دوران** و 2ω را **چرخش** حرکت‌می‌نامند. هرگاه $r \to 0$، حد عبارت‌بالا برابرمقدار ω درمرکز C است.

---

۱. ر. ك. پانوشت قبل.

درنتیجه، $\omega(x, y)$ برابر سرعت زاویه‌ای حدی یك جزء دایره‌ای سیال است وقتی که دایره منقبض شده به‌نقطهٔ (x, y) بدل می‌شود. به‌زبان عادی، اگر یك جزء کروی ازسیال ناگهان منجمد شود وهمزمان سیالی که آن را احاطه‌کرده ازبین برود، آنگاه جزء کروی باسرعت زاویه‌ای ω دوران خواهدکرد (به‌بخش ۱۱.۸ نیز رجوع کنید).

ما فقط جریانهای بی‌تاو را بررسی می‌کنیم، یعنی جریانهایی راکه ωی آنها سرتاسر ناحیهٔ D، ازجریان، صفراست، دراین حالت

$$\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}=0, \tag{۵}$$

وجود وپیوستگی مشتقها را فرض گرفته‌ایم.

به علاوه فرض می‌کنیم که سیال تراکم ناپذیر است. آنگاه در هر ناحیه‌ای که شامل **چشمه یا چاهك**، یعنی نقاطی که ازآن نقاط سیال وارد یاخارج می‌شود، نباشد داریم

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}=0 \tag{۶}$$

[ر. ك. (۹)، بخش ۱۰.۸].

هرگاه D یك حوزهٔ همبند ساده بوده، درضمن جریان بی‌تاو باشد، ازقضیهٔ ۳ بخش ۱۲.۹ نتیجه می‌شودکه انتگرال روی خط

$$\int_C (V_1\,dx+V_2\,dy) \tag{۷}$$

در D مستقل ازمسیر است. هرگاه ازنقطهٔ ثابت (a, b) واقع‌در D تانقطهٔ (x, y) از D انتگرال بگیریم، انتگرال تابعی مانند $\Phi(x, y)$ از نقطهٔ (x, y) خواهد شد:

$$\Phi(x, y)=\int_{(a, b)}^{(x, y)} (V_1\,dx+V_2\,dy) \tag{۸}$$

تابع $\Phi(x, y)$ **پتانسیل سرعت**[1] حرکت نامیده می‌شود. چون انتگرال مستقل از مسیر است، $V_1\,dx+V_2\,dy$ دیفرانسیل‌کامل است (بخش ۱۲.۹)، در واقع دیفرانسیل تابع $\Phi(x, y)$ است، یعنی

$$V_1\,dx+V_2\,dy=\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy \tag{۹}$$

از اینجا نتیجه می‌شود

$$V_1=\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_2=\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{۱۰}$$

۱. بعضی مؤلفین (به‌جای Φ) از $-\Phi$ برای نشان دادن پتانسیل سرعت استفاده می‌کنند.

وهمانطورکه ملاحظه می‌شود بردار سرعت برابر گرادیان $\Phi(x, y)$ است:

$$V = V_۱ + iV_۲ = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad (۱۱)$$

(ر. ك. بخش ۸.۸)

منحنیهای ثابت $= \Phi(x, y)$ را **خطوط‌هم‌پتانسیل** می‌نامند. چون V گرادیان Φ است، درهرنقطه V برخط هم پتانسیلی‌کـه از آن نقطه می‌گذرد عمود است (مشروط بـر اینکه $V \neq ۰$).

به‌علاوه‌بادرج (۱۰) در (۶) مشاهده می‌کنیم که Φ در معادلهٔ لاپلاس صدق‌می‌کند:

$$\nabla^۲\Phi = \frac{\partial^۲\Phi}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\Phi}{\partial y^۲} = ۰$$

فرض می‌کنیم $\Psi(x, y)$ یك تابع همساز مزدوج $\Phi(x, y)$ باشد. آنگاه در هـر نقطه منحنیهای

$$\Psi(x, y) = \text{ثابت}$$

به‌خطوط هم‌پتانسیل ثابت $= \Phi(x, y)$ عمود[۱] هستند، و درنتیجه مماسهایشان هم راستا با سرعت سیال است. ازاین‌رو، منحنیهای، ثابت $= \Psi(x, y)$، **خطوط جریان سیال** هستند. تابع $\Psi(x, y)$ را **تابع جریان** این جریان می‌نامند.

فرض می‌کنیم‌که Φ و هم Ψ دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم‌پیوسته باشند. آنگاه تابع مختلط

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \qquad (۱۲)$$

درناحیهٔ جریان تحلیلی است. این تابع **پتانسیل مختلط** جریان نامیده می‌شود. کارکردن باپتانسیل مختلط آسانتر ازکارکردن با Φ و Ψ به‌طور جداگانه است.

سرعت جریان را می‌توان بامشتقگیری از (۱۲) واستفاده ازمعادلات کشی ـ ریمان به‌دست آورد؛ به‌این ترتیب خواهیم داشت

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_۱ - iV_۲.$$

از اینجا نتیجه می‌شود

$$V = V_۱ + iV_۲ = \overline{F'(z)}. \qquad (۱۳)$$

بدین طریق جـریانهای پابرجای بی‌تاو دوبعدی سیالهای تراکم ناپذیر را می‌توان برحسب توابع تحلیلی بیان کرد، و روشهای آنالیز مختلط، مانند نگاشت همدیسی، را در

---

۱. جز درنقاطی‌که درآنها $F'(z) = ۰$ [ر. ك. (۱۲)]

مورد آنها به‌کار گرفت.

تابع جریان Ψ در ارتباط با مسائل مقدار کرانه‌ای از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا کرانه‌ای که سیال نتواند از آن عبور کند یك خط جریان است. تحت نگاشت همدیسی، یك خط جریان به‌خط جریانی درصفحهٔ نقش تبدیل می‌شود. امکان دیگر برای به‌دست آوردن و بررسی جریانهای پیچیده ترکیب جریانهای ساده است. پتانسیل $F = F_1 + F_2$ که مجموع پتانسیلهای مختلط F_1 و F_2 مربوط به‌دوجریان است پتانسیل مختلط جریانی است که ازجمع برداری بردارهای سرعت دوجریان حاصل می‌شود. بدیهی است که چون معادلهٔ لاپلاس خطی و همگن است، مجموع دو تابع همساز تابعی همساز است.

توجه کنید درحالیکه کرانه‌های داده شده در الکترواستاتیك(صفحات هادی)خطوط هم‌پتانسیل هستند، در هیدرودینامیك کرانه‌ها خطوط جریان هستند و بنابراین برخطوط هم پتانسیل عمودند.

اکنون یك نمونه را موردبحث قرارمی‌دهیم. کاربردهای بیشترمطلب بالا درمجموعهٔ مسائل آمده‌اند.

مثال ۱. جریان درنزدیکی گوشه

پتانسیل مختلط

$$F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \tag{۱۴}$$

جریانی را نشان می‌دهد که خطوط هم پتانسیل آن هذلولیهای

$$\Phi = x^2 - y^2 = \text{ثابت}$$

وخطوط جریانش هذلولیهای

$$\Psi = 2xy = \text{ثابت}$$

هستند. از (۱۳) بردارسرعت را به‌دست می‌آوریم

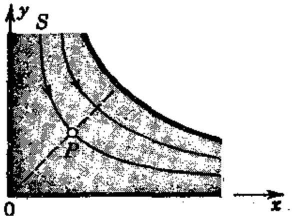
$V = 2\bar{z} = 2(x - iy)$، یعنی، $V_1 = 2x$، $V_2 = -2y$.

تندی (اندازهٔ سرعت) عبارت است از

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

این جریان را می‌توان به‌جریان درکانالی که به محورهای مختصات مثبت و یك هذلولی، مثلاً، هذلولی $xy = 1$ (شکل ۳۴۲) محدود شده تعبیر کرد. توجه کنید که درطول خط

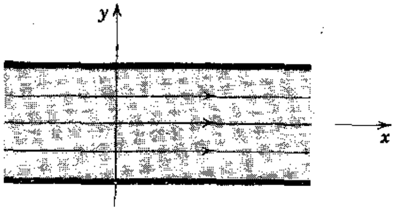
جریان S تندی درنقطهٔ P که در آن مقطع کانال بزرگ است دارای مقدار مینیمم است.



شکل ۳۴۲. جریان درنزدیکی گوشه

مسائل بخش ۲۰۱۸

۱. **(جریان موازی)** ثابت کنید $F(z)=Kz$ (K حقیقی ومثبت) بیانگر جریانی یکنواخت به‌طرف راست است، که می‌تواند به‌جریان یکنواختی بین دوخط موازی (بین دو صفحهٔ موازی درفضای سه‌بعدی) تعبیر شود، به‌شکل رجوع کنید. مطلوب است بردار سرعت، خطوط جریان، وخطوط هم پتانسیل.



مسئلهٔ ۱. جریان موازی

۲. نشان دهید $F(z)=iz^2$ بیانگر جریانی در نزدیکی گوشه است. خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل را پیداکرده وآنها را رسم کنید. بردار سرعت V را بیابید.

۳. جریان درمثال ۱ را به‌کمك مسئلهٔ ۱ از طریق نگاشت همدیسی از ربع اول برروی نیم صفحهٔ فوقانی به‌دست آورید.

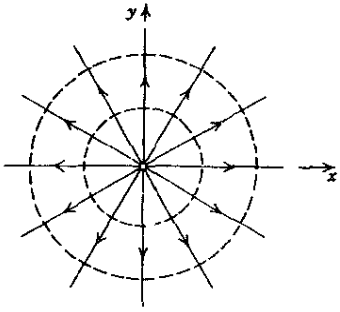
۴. خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل جریانی بـا پتانسیل مختلط $F(z)=z^2$ را رسم کنید. بردارسرعت V را بیابید وتمام نقاطی که درآنها بردار سرعت موازی‌محور x است معین کنید.

جریان متناظر باپتانسیل مختلط مفروض $F(z)$ را درنظرمی گیریم. خطوط جریان وخطوط هم پتانسیل را رسم کنید. بردارسرعت را بیابید، وهمهٔ نقاطی راکه درآنها بردار سرعت

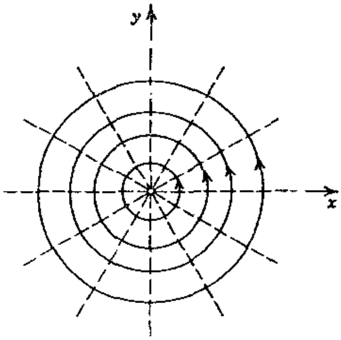
موازی بامحور x است تعیین کنید. (k را درمسئلهٔ ۶ عددی حقیقی بگیرید.)

۵. iz ۶. $-ikz$ ۷. $(1+i)z$ ۸. z^2+z ۹. iz^3

۱۰. **(چشمه و چاهك)** پتانسیل مختلط $F(z)=(c/2\pi)\ln z$ را که درآن c عددحقیقی مثبتی است درنظرمی گیریم. نشان دهید $V=(c/2\pi r^2)(x+iy)$، دراینجا r برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است، ازاین رابطه چنین برمی‌آیدکه جریان شعاعی، وجهت آن به‌طرف خارج است (شکل را ببینید)، چناتکه این پتانسیل متناظراست بایك **چشمهٔ نقطه‌ای** در $z=0$ (یعنی بایك **خط چشمهٔ** $x=0$، $y=0$ درفضا). (ثابت c **قدرت** یا **تخلیهٔ** چشمه نامیده می‌شود. هرگاه c حقیقی منفی باشد، گویند جریان در $z=0$ دارای یك **چاهك** است، این جریان شعاعی و به‌طرف داخل می‌باشد وسیال درنقطهٔ تکین $z=0$ ازپتانسیل مختلط ناپدید می‌شود.)



مسئلهٔ ۱۰. چشمهٔ نقطه‌ای



مسئلهٔ ۱۱. جریان گردابی

۱۱. **(خط گردابی)** نشان دهیدکه $F(z)=-(iK/2\pi)\ln z$، که درآن K عددحقیقی مثبتی است، بیانگرجریانی است که مبدأ را درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره‌هایی دورمی‌زند؛ به‌شکل قبل مراجعه کنید. (نقطهٔ $z=0$ را نقطهٔ گردابی می‌نامند؛ به ازای هربار گردش به دور نقطهٔ گردابی پتانسیل به اندازهٔ K افزایش می‌یابد.)

۱۲. مطلوب است پتانسیل مختلط جریانی که در $z=-a$ یك چشمهٔ نقطه‌ای به‌قدرت ۱ دارد.

۱۳. مطلوب است پتانسیل مختلط جریانی که در $z=a$ یك چاهك نقطه‌ای به‌قدرت ۱ دارد.

۱۴. نشان دهیدکه جمع برداری بردارهای سرعت دوجریان منجر به‌جریانی می‌شودکه

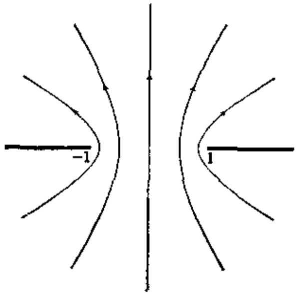
پتانسیل مختلط آن ازجمع پتانسیل مختلط مربوط به‌دوجریان حاصل می‌شود.

۱۵. پتانسیلهای مذکور در مسائل ۱۲ و ۱۳ را جمع و خطوط جریان پتانسیل حاصل را رسم کنید.

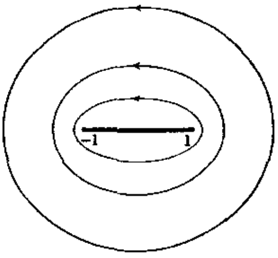
۱۶. مطلوب است خطوط جریان متناظر با جریان $F(z)=1/z$. نشان دهید که به ازای مقادیر کوچك $|a|$ خطوط جریان مسئلهٔ ۱۵ شبیه خطوط جریان این مسئله به نظر می‌آیند.

۱۷. نشان دهید که $F(z)=\cosh^{-1} z$ با جریانی که خطوط جریان آن هذلولیهای هم کانون باکانونهای $z=\pm 1$ هستند متناظراست، و جریان را می‌توان به‌جریانی تعبیر کرد که ازیك‌شکاف می‌گذرد (به‌شکل مراجعه کنید.)

۱۸. نشان دهید که $F(z)=\cos^{-1} z$ را می‌توان به‌پتانسیل‌مختلط جریانی که یك‌استوانهٔ بیضوی یا یك بشقاب (خط راستی که از $z=-1$ تا $z=1$ کشیده شده است) را دورمی‌زند تعبیر کرد. ثابت‌کنید خطوط جریان بیضیهای هم‌کانونی هستند که کانونهای آنها در $z=\pm 1$ است. (ر. ك. شکل.)



مسئلهٔ ۱۷. جریانی که از یك شکاف می‌گذرد



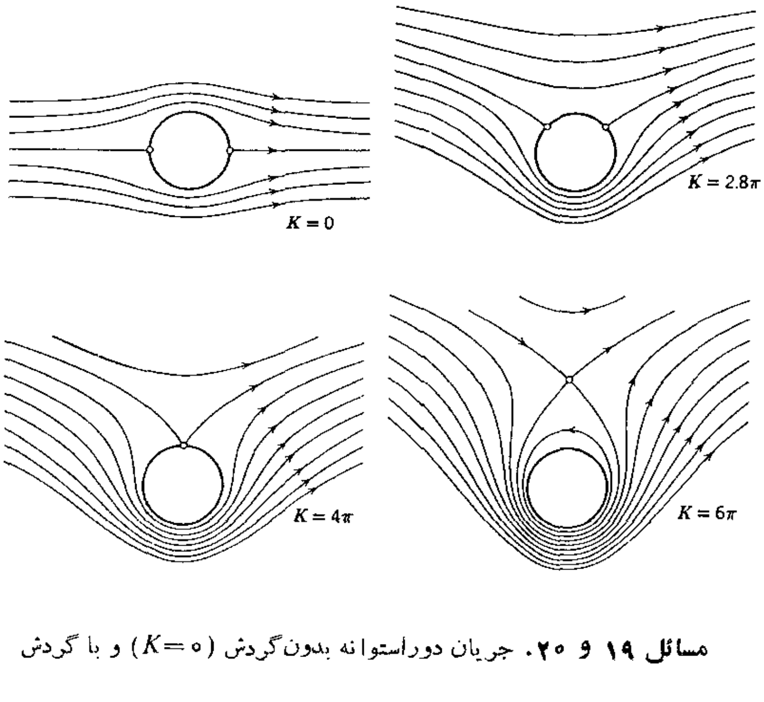
مسئلهٔ ۱۸. جریان دوریك بشقاب

۱۹. **(جریان دور یك استوانه)** $F(z)=z+z^{-1}$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنید $z=re^{i\theta}$ ونشان دهید که خطوط جریان خطهای $(r-r^{-1})\sin\theta=$ ثابت هستند، خط جریان $(r-r^{-1})\sin\theta=0$ مرکب است ازمحور x و دایرهٔ یکه، و به‌ازای مقادیر بزرگ $|z|$ جریان تقریباً یکنواخت وموازی است، طوری که می‌توان آن را به جریان درحول استوانهٔ مستدیر درازی که شعاعش یك است تعبیر کرد (شکل سمت چپ بالایی‌را ببینید). مطلوب است **نقاطرکود** جریان (نقاطی که سرعت درآنها صفر است).

۲۰. (جریان دوراستوانه باگردش). نشان دهید که از جمع پتانسیلهای مسائل ۱۱ و ۱۹ جریانی حاصل می‌شود که بدنهٔ استوانهٔ ۱ $= |z|$ خط جریانی از آن است. تندی را بیابید و نشان دهید که نقاط رکود عبارتند از

$$z = \frac{iK}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{-K^2}{16\pi^2} + 1};$$

وقتی K برابرصفر است این نقاط عبارتند از ۱ $\pm$، با افزایش K این نقاط روی دایرهٔ یکه حرکت می‌کنند تاآنکه در $z = i$ برهم منطبق می‌شوند ($K = 4\pi$، شکل را ببینید)، وقتی K بزرگتر از 4π باشد نقاط رکود روی محور موهومی قرار می‌گیرند (یکی ازنقاط درمیدان جریان قرارمی‌گیرد ونقطهٔ دیگرکه درون استوانه واقع می‌شود فاقد معنی فیزیکی است).



مسائل ۱۹ و ۲۰. جریان دوراستوانه بدون‌گردش ($K = 0$) و با گردش

۳.۱۸ خواص عمومی توابع همساز

دراین بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از قضایای مربوط به توابع تحلیلی مختلط برای به دست آوردن خواص عمومی توابع همساز استفاده کرد.

فرض می‌کنیم $u(x, y)$ تابعی باشد که در یك حوزهٔ همبند سادهٔ D همساز است. آنگاه می‌توان $v(x, y)$، تابع همساز مزدوجی از $u(x, y)$ را به‌کمك معادلات کشی-ریمان معین کرد، و بنابراین $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ تابعی‌تحلیلی در D خواهد بود. (د. ك. بخش ۵.۱۲؛ و ر. ك. پانوشت ۲، بخش ۲.۱۳). این رابطه‌ای است که می‌تواند برای به‌دست‌آوردن خواص توابع همساز از خواص توابع تحلیلی مورداستفاده قرارگیرد. ابتدا، نظر به‌اینکه توابع تحلیلی دارای مشتق از هرمرتبه‌ای هستند، به راحتی می‌توان ثابت کرد که

قضیهٔ ۱ (مشتقهای جزئی)

تابع $u(x, y)$ که درحوزهٔ همبند سادهٔ D همساز است در D دارای مشتقات جزئی ازتمام مرتبه‌ها است.

به‌علاوه اگر $f(z)$ درحوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، آنگاه بنا به‌فرمول انتگرال کشی (بخش ۵.۱۴) داریم

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \qquad (1^*)$$

که C یك‌مسیر بستهٔ ساده در D و z_0 نقطه‌ای درداخل C است. اگر C را دایره‌انتخاب کنیم، در D خواهیم داشت

$$z=z_0+re^{i\phi}$$

بنابراین

$$dz=ire^{i\phi}\,d\phi \quad ،z-z_0=re^{i\phi}$$

وفرمول انتگرال چنین می‌شود:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\phi})\,d\phi, \qquad (1)$$

طرف راست برابرمقدار میانگین f برروی دایره است (= مقدار انتگرال تقسیم‌برطول بازهٔ انتگرالگیری). بدین ترتیب قضیهٔ زیر به‌اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۲ (خاصیت مقدارمیانگین توابع تحلیلی)

فرض می‌کنیم $f(z)$ در یك حوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد. آنگاه مقدار $f(z)$ درنقطهٔ z_0 از D برابراست بامقدار میانگین $f(z)$ برروی هردایره‌ای که در D قرار دارد ومرکز آن z_0 است.

خاصیت مهم دیگر توابع تحلیلی درقضیهٔ زیرآمده است.

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ قدر مطلق ماکزیمم درمورد توابع تحلیلی)

فرض می‌کنیم D ناحیه‌ای محدود باشد وفرض می‌کنیم $f(z)$ درون D وبرکرانهٔ D تحلیلی و

غیرثابت باشد. دراین‌صورت قدرمطلق $|f(z)|$ نمی‌تواند دریك نقطهٔ داخلی D ماکزیممی داشته باشد. درنتیجه، ماکزیمم $|f(z)|$ به‌ازای نقطه‌ای واقع برکرانهٔ D به‌دست می‌آید، هرگاه‌در D $f(z) \neq 0$، آنگاه این ادعا درمورد مینیمم $|f(z)|$ نیز صحیح است.

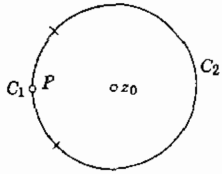
اثبات. فرض می‌کنیم $|f(z)|$ دریـك نقطهٔ داخلی z_0 از D دارای ماکزیممی باشد و نشان می‌دهیم که این فرض منجر به‌تناقض می‌شود. فرض می‌کنیم $M = |f(z_0)|$ مقدار ماکزیمم باشد. چون $f(z)$ ثابت نیست، $|f(z)|$ نیز ثابت نیست. درنتیجه، می‌تـوان دایره‌ای مانند C به شعاع r و مرکـز z_0 یافت به‌طوری کـه داخل C در D باشد و $|f(z)|$ درنقطه‌ای از C مانند P، از M کوچکتر باشد. چون $|f(z)|$ پیوسته است، روی قوسی مانند C_1 از C کـه شامل P است کوچکتر خواهد بود، مثلا به‌ازای هر z روی C_1 داریم $(\varepsilon > 0)$ $|f(z)| \leqslant M - \varepsilon$ (شکل ۳۴۳). اگـر طول C_1 برابر l_1 باشد، طول C_2، قوس مکمل C_1 برابر $2\pi r - l_1$ خواهد بود. با به‌کاربردن (۴)، بخش ۲.۱۴ درمورد (۱*) ازاین بخش، وبا توجه به‌آنکه $|z - z_0| = r$، به‌دست می‌آوریم

$$M = |f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}(M - \varepsilon)\frac{1}{r} l_1 + \frac{1}{2\pi} M \frac{1}{r}(2\pi r - l_1) = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi r} < M,$$

یعنی $M < M$، که غیرممکن است. بنابراین، فرض ما باطل است و حکم اول قضیه بـه اثبات می‌رسد.

حال به اثبات حکم آخـر قضیه می‌پردازیم. هـرگاه در D $f(z) \neq 0$، آنگاه $1/f(z)$ در D تحلیلی است. از آنچه هم اکنون ثابت شد نتیجه می‌شود کـه ماکزیمم $1/|f(z)|$ برکرانهٔ D قرار دارد. ولی این ماکزیمم با مینیممی از $|f(z)|$ مطابق است، و اثبات کامل می‌شود. ▲



شکل ۳۴۳. اثبات قضیهٔ ۳

اکنون نتایج متناظر با این قضایا را درمورد توابع همساز می‌نویسیم.

قضیهٔ ۴ (توابع همساز)

فرض می‌کنیم D یـك حوزهٔ محدود همبند ساده و C منحنی کرانه‌ای آن باشد. آنگاه اگر $u(x, y)$ درحوزه‌ای‌که شامل D و C است همساز باشد، دارای خواص زیراست.

I. مقدار $u(x, y)$ درنقطه‌ای مانند (x_0, y_0) از D با مقدار میانگین $u(x, y)$ روی هردایرهٔ درون D که مرکز آن (x_0, y_0) باشد برابر است.

II. مقدار $u(x, y)$ درنقطهٔ (x_0, y_0) از D بامقدار میانگین $u(x, y)$ در هرقرص مستدیری کـه در D قرار گرفته و مرکز آن (x_0, y_0) است برابر است. [ر.ک. پانوشت ۱، ص ۹۸۹ بخش ۱۸.۲.]

III. **(اصل ماکزیمم)** هرگاه $u(x, y)$ غیرثابت باشد، ماکزیمم و مینیممی در D ندارد. درنتیجه، ماکزیمم و مینیمم برروی کرانهٔ D است.

IV. هرگاه $u(x, y)$ بر C ثابت باشد، آنگاه $u(x, y)$ ثابت است.

V. هرگاه $h(x, y)$ در D و بر C همساز باشد و اگربر C، $h(x, y)=u(x, y)$، آنگاه در تمام نقاط D، $h(x, y)=u(x, y)$.

اثبات. حکم I ازمساوی قراردادن قسمتهای حقیقی طرفین (۱) نتیجه می‌شود، یعنی

$$u(x_0, y_0)=\operatorname{Re} f(x_0+iy_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\phi,\ y_0+r\sin\phi)\,d\phi.$$

اگرطرفین را در r ضرب کنیم ونسبت به r از 0 تا r_0 (که شعاع قرص مستدیری در D بامرکز (x_0, y_0) است) انتگرال بگیریم، آنگاه درطرف چپ خواهیم داشت $r_0^2 u(x_0, y_0)/2$ وبنا براین

$$u(x_0, y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\phi,\ y_0+r\sin\phi)\,r\,d\phi\,dr.$$

به‌این ترتیب حکم دوم به‌اثبات می‌رسد.

حکم III را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $v(x, y)$ یك تابع همساز مزدوج $u(x, y)$ در D باشد. آنگاه $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ و

$$F(z)=e^{f(z)}$$

در D تحلیلی هستند. قدرمطلق $F(z)$ عبارت است از

$$|F(z)|=e^{\operatorname{Re} f(z)}=e^{u(x, y)}$$

ازقضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود کـه $|F(z)|$ نمی‌تواند دارای ماکزیممی دریك نقطهٔ داخلی D باشد. چون e^u تابعی صعودی یکنوا ازمتغیرحقیقی u است، III درمورد ماکزیمم u ثابت می‌شود. باتوجه به این حکم مربوط به مینیمم ازجایگزین کردن $-u$ با u نتیجه می‌شود.

هرگاه u روی C ثابت باشد، مثلا $u=k$، آنگاه بنابه III ماکزیمم ومینیمم u برابرند. ازاینجا، حکم IV نتیجه می‌شود.

هرگاه h و u در داخل D وبرروی C همساز باشند، آنگاه $h-u$ نیز در داخل D وبرروی C همسازاست، وبنابه فرض، درتمام نقاط C، $h-u=0$. ازاین رو، بنابه

IV، درتمام نقاط D داریم $h-u=0$، وحکم V به‌اثبات می‌رسد. به‌این ترتیب‌قضیهٔ ۴ کامل می‌شود. ▲

حکم آخرقضیهٔ ۴ بسیارمهم است. بنابه این حکم هر تابع همساز به‌کمک مقادیرش برکرانهٔ D به‌طوریکتا معین می‌شود. معمولا، لازم است که $u(x, y)$ در D همساز و بر کرانهٔ D پیوسته[1] باشد. تحت این شرایط، هنوزهم می‌توان اصل ماکزیمم (قضیهٔ ۴، III)رابه‌کاربرد. مسئلهٔ‌تعیین $u(x, y)$ وقتی که مقادیرکرانه‌ای $u(x, y)$ داده شده‌باشند، **مسئلهٔ دیریکله** درمورد معادلهٔ لاپلاس دومتغیری نامیده می‌شود. ازقضیهٔ ۴، V داریم

قضیهٔ ۵ (مسئلهٔ دیریکله)

هرگاه به‌ازای حوزهٔ مفروض ومقادیر کرانه‌ای داده شده‌ای‌مسئلهٔ دیریکله درمورد معادلهٔ لاپلاس دومتغیری دارای جواب‌باشد، این جواب یکتا است.

مسائل بخش ۳.۱۸

۱. درستی قضیهٔ ۲ را درمورد $f(z)=(z+2)^2$، $z_0=1$ و دایره‌ای به شعاع ۱ وبه مرکز z_0 تحقیق کنید.

۲. درستی قضیهٔ۳ را درمورد $f(z)=z^2$ و مستطیل $-2<x<2$، $-1<y<1$ تحقیق کنید.

۳. درستی قضیهٔ ۳ را درمورد $f(z)=e^z$ ویك حوزهٔ محدود دلخواه تحقیق کنید.

۴. تابع $f(x)=\cos x$ در $x=0$ ماکزیمم است. بااستفاده از قضیهٔ ۳، نتیجه‌بگیرید کـه سطح قدر مطلقی $f(z)=\cos z$ (ر. ك. بخش ۸.۱۲) نمی‌تـواند در $z=0$ دارای نقطهٔ اوج باشد.

۵. هرگاه $f(z)$ درحوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی (غیرثابت) باشد، و اگر $|f(z)|=c$ (c عدد ثابت دلخواه) در D واقع بوده وبسته باشد، نشان دهید که درنقطه‌ای‌داخلی از منحنی $f(z)=0$. مثالهایی ارائه دهید.

۴.۱۸ فرمول انتگرال پواسن

مسئلهٔ دیریکله درمورد قرص مستدیر را می‌توان بااستفاده ازفرمولی موسوم به‌فرمول‌پواسن[2]

---

۱. یعنی $u(x_0, y_0)\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y)$، که درآن (x_0, y_0) برکرانه و (x, y) در D واقعند.

۲. سیمئون دونی‌پواسن Siméon Denis Poisson (۱۷۸۱ ـ ۱۸۴۰)، ریـاضیدان و فیزیکدان فرانسوی.

که تابع همساز را برحسب مقادیرآن برروی دایرهٔ کرانه‌ای قرص نمایش می‌دهدحل کرد.
برای به‌دست آوردن این فرمول ازفرمول انتگرال کشی شروع می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,dz^* ; \tag{1}$$

دراینجا C دایره‌ای است که با

$$z^*=Re^{i\phi} \qquad (0\leqslant \phi\leqslant 2\pi)$$

نمایش داده می‌شود وفرض می‌شود که تابع

$$f(z)=u(r,\ \theta)+iv(r,\ \theta) \qquad (z=re^{i\theta})$$

درناحیهٔ همبند ساده‌ای که C درون آن‌قرار دارد تحلیلی است.
چون $dz^*=iRe^{i\phi}\,d\phi=iz^*\,d\phi$، از(۱) به‌دست می‌آوریم

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{z^*}{z^*-z}\,d\phi \quad (z^*=Re^{i\phi},\ z=re^{i\theta}) \tag{2}$$

ازطرف دیگر، هرگاه نقطهٔ Z را خارج C، مثلا نقطهٔ $Z=z^*\bar z^*/\bar z$ (که قدرمطلق آن $R^2/r>R$ است)، را درنظر بگیریم، آنگاه انتگران (۱) درقرص $|z|\leqslant R$ تحلیلی است وانتگرال برابرصفر است:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z^*)}{z^*-Z}\,dz^*=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\,\frac{z^*}{z^*-Z}\,d\phi.$$

اگر قراردهیم $Z=z^*\bar z^*/\bar z$ وکسر را ساده کنیم خواهیم داشت

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(z^*)\,\frac{\bar z}{\bar z-\bar z^*}\,d\phi.$$

باکم کردن این رابطه از (۲) واستفاده از

$$\frac{z^*}{z^*-z}-\frac{\bar z}{\bar z-\bar z^*}=\frac{z^*\bar z^*-z\bar z}{(z^*-z)(\bar z^*-\bar z)} \tag{3}$$

به دست می‌آوریم

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\,\frac{z^*\bar z^*-z\bar z}{(z^*-z)(\bar z^*-\bar z)}\,d\phi. \tag{4}$$

باتوجه به‌نمایش قطبی z و z^* درمی‌یابیم که خارج‌قسمت موجود درانتگران برابر است با

$$\frac{R^2-r^2}{(Re^{i\phi}-re^{i\theta})(Re^{-i\phi}-re^{-i\theta})}=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}$$

درنتیجه، بامساوی قراردادن قسمتهای حقیقی دوطرف فرمول (۴) **فرمول انتگرال پواسن**

$$(۵)\qquad u(r,\ \theta)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}u(R,\ \phi)\,\frac{R^{۲}-r^{۲}}{R^{۲}-۲Rr\cos(\theta-\phi)+r^{۲}}\,d\phi$$

را به دست می‌آوریم، کـه نمایش تـابع همساز u در قرص $|z|\leqslant R$ برحسب مقادیر $u(R,\ \phi)$ برروی دایره‌ای است که قرص را محدود می‌کند.

ازنظر عملی توجه به این نکته جالب است کـه در (۵) می‌توان به جای $u(R,\ \phi)$ ازهرتابعی که برفاصلهٔ انتگرالگیری پیوستهٔ تکه‌ای‌باشد استفاده کرد. دراین صورت‌فرمول (۵) تابعی مانند $u(r,\ \theta)$ تعریف می‌کند کـه در قرص باز $|z|<R$ همساز و بردایره $|z|=R$ پیوسته است. براین دایره، جزدرنقاطی که $u(R,\ \phi)$ درآنهاناپیوسته است،تابع مذکور برابر $u(R,\ \phi)$ است. اثبات این موضوع را می‌توان درمرجع [F۱] یافت.

از (۵) می‌تـوان بسط مهمی از u به‌یك سری برحسب تـوابع همسازساده به‌دست آورد. یادآوری می‌کنیم که خارج قسمت موجود درانتگران (۵)از (۳) حاصل شده‌است و به راحتی می‌توان دیدکه طرف راست (۳) برابر قسمت حقیقی $(z^*+z)/(z^*-z)$ است. بااستفاده ازسری هندسی به‌دست می‌آوریم

$$(۶)\quad \frac{z^*+z}{z^*-z}=\frac{۱+(z/z^*)}{۱-(z/z^*)}=\left(۱+\frac{z}{z^*}\right)\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{z}{z^*}\right)^{n}=۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{z}{z^*}\right)^{n}.$$

چون $z=re^{i\theta}$ و $z^*=Re^{i\phi}$، داریم

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z^*}\right)^{n}=\operatorname{Re}\left[\frac{r^{n}}{R^{n}}e^{in\theta}e^{-in\phi}\right]=\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\cos(n\theta-n\phi)$$

$$(۷)\qquad =\left(\frac{r}{R}\right)^{n}(\cos n\theta\cos n\phi+\sin n\theta\sin n\phi).$$

از (۶) و (۷) به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname{Re}\frac{z^*+z}{z^*-z}=۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{r^{n}}{R^{n}}(\cos n\theta\cos n\phi+\sin n\theta\sin n\phi).$$

این عبارت، همان طور که قبلا متذکرشدیم، برابرخارج قسمت موجود در (۵) است، و باقراردادن این سری در (۵) وانتگرالگیری جمله به‌جمله خواهیم داشت

$$(۸)\qquad u(r,\ \theta)=a_{۰}+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}(a_{n}\cos n\theta+b_{n}\sin n\theta)$$

که درآن ضرایب عبارتند ازضرایب فوریهٔ $u(R,\ \phi)$:

$$a_{\circ}=\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi}u(R,\ \phi)\,d\phi,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}u(R,\ \phi)\cos n\phi\,d\phi,$$

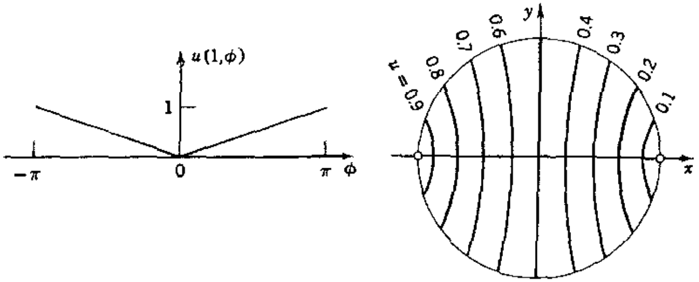
(۹)

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{2\pi}u(R,\ \phi)\sin n\phi\,d\phi,\qquad n=1,\ 2,\ \dots$$

توجه کنید که به ازای $r=R$ سری (۸) به سری فوریه $u(R,\ \phi)$ تبدیل می‌شود، و بنابراین نمایش (۸) وقتی که بتوان $u(R,\ \phi)$ را باسری فوریه نمایش داد معتبراست.

مثال ۱. مسئلهٔ دیریکله درمورد قرص یکه

پتانسیل $u(r,\ \theta)$ را درقرص یکهٔ $r<1$ بیابید درصورتی که مقادیر مرزی آن عبارت باشد از (شکل ۳۴۴)



شکل ۳۴۴. پتانسیل مثال ۱

$$u(1,\ \phi)=\begin{cases}-\dfrac{\phi}{\pi} & -\pi<\phi<\circ\\[2ex] \dfrac{\phi}{\pi} & \circ<\phi<\pi\end{cases}$$

نظر به‌اینکه $u(1,\ \phi)$ زوج است، $b_n=\circ$، واز (۹) به‌دست می‌آوریم $a_{\circ}=1/2$ و

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{\circ}\frac{\phi}{\pi}\cos n\phi\,d\phi+\int_{\circ}^{\pi}\frac{\phi}{\pi}\cos n\phi\,d\phi\right]=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1).$$

درنتیجه وقتی که n فردباشد $a_n=-4/n^2\pi^2$ ، و وقتی که $n=2,\ 4,\ \dots$ ، $a_n=\circ$ ، وپتانسیل عبارت است از

$$u(r,\ \theta)=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi^۲}\left[r\cos\theta+\frac{r^۳}{۳^۲}\cos ۳\theta+\frac{r^۵}{۵^۲}\cos ۵\theta+\cdots\right].$$

مسائل بخش ۴.۱۸

۱. برقراری (۳) را تحقیق کنید.

۲. نشان دهید که هرجملهٔ (۸) درقرص $r^۲ < R^۲$ تابعی همساز است.

با استفاده از (۸)، پتانسیل $u(r,\ \theta)$ در داخل قرص یکهٔ $r < ۱$ را طوری بیابید که دارای مقادیر کرانه‌ای مفروض $u(۱,\ \theta)$ باشد، با استفاده ازچند جملهٔ اول سری، بعضی مقادیر u را محاسبه کنید و نمودار خطوط هم‌پتانسیل را رسم کنید

۳. $u(۱,\ \theta)=\sin\theta$　　**۴.** $u(۱,\ \theta)=۱-\cos\theta$

۵. $u(۱,\ \theta)=\sin ۳\theta$　　**۶.** $u(۱,\ \theta)=\cos ۲\theta-\cos ۴\theta$

۷. $u(۱,\ \theta)=۴\sin^۳\theta$　　**۸.** $u(۱,\ \theta)=\theta$

۹. هرگاه $۰<\theta<\pi$، $u(۱,\ \theta)=۱$ و درغیر آن‌صورت $u(۱,\ \theta)=۰$.

۱۰. هرگاه $-\pi/۲<\theta<\pi/۲$، $u(۱,\ \theta)=\theta$ و هرگاه $\pi/۲<\theta<۳\pi/۲$، $u(۱,\ \theta)=\pi-\theta$.

۱۱. هرگاه $-\pi<\theta<-\pi/۲$، $u(۱,\ \theta)=-\pi/۲$، $-\pi/۲<\theta<\pi/۲$، $u(۱,\ \theta)=\theta$، و هرگاه $\pi/۲<\theta<\pi$، $u(۱,\ \theta)=\pi/۲$.

۱۲. هرگاه $۰<\theta<\pi/۲$، $u(۱,\ \theta)=۱$، $\pi/۲<\theta<\pi$، $u(۱,\ \theta)=-۱$ و درغیر آن صورت $u(۱,\ \theta)=۰$.

۱۳. با استفاده از(۹) بخش ۴.۱۶، نشان دهید که نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۲را می‌توان چنین‌نوشت:

$$u(r,\ \theta)=\frac{۱}{\pi}\operatorname{Im}\operatorname{Ln}\frac{(۱+iz)(۱+z^۲)}{(۱-iz)(۱-z^۲)}.$$

۱۴. نشان دهید که پتانسیل مسئلهٔ ۸ را می‌توان چنین نوشت:

$$u(r,\ \theta)=۲\operatorname{Im}\operatorname{Ln}(۱+z)$$

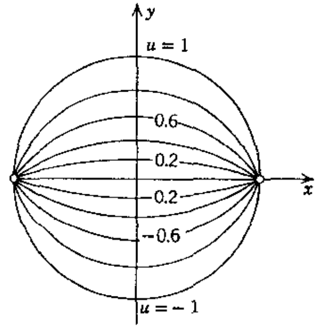
۱۵. با استفاده از (۸) نشان دهید که پتانسیل $u(r,\ \theta)$ در داخل قرص یکهٔ $r<۱$ با مقادیر کرانه‌ای

$$u(۱, \theta) \begin{cases} -۱ & -\pi < \theta < ۰ \\ ۱ & ۰ < \theta < \pi \end{cases}$$

ازسری زیر به‌دست می‌آید:

$$u(r, \theta) = \frac{۴}{\pi}\left(r \sin\theta + \frac{r^۳}{۳}\sin ۳\theta + \frac{r^۵}{۵}\sin ۵\theta + \cdots\right).$$

بعضی ازمقادیر u را بااستفاده ازچند جملهٔ اول این سری به‌دست آورید وچند خط هم‌پتانسیل را رسم کنید. نتیجه‌را باشکل مقایسه کنید. نمودار خطوط نیرو (مسیرهای متعامد) را رسم کنید.



مسئلهٔ ۱۵

۱۶. با استفاده از (۹)، بخش ۴.۱۶، نشان دهیدکه درمسئلهٔ ۱۵

$$u(r, \theta) = \frac{۲}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\,\frac{۱+z}{۱-z} = \frac{۲}{\pi}[\arg(۱+z) - \arg(۱-z)].$$

۱۷. با به‌کاربردن قضیهٔ معروفی از هندسهٔ مقدماتی درمورد نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۶ نشان دهیدکه منحنیهای ثابت $= u$ در مسئلهٔ ۱۵ قوسهای مستدیرهستند.

۱۸. نشان دهیدکه

$$H = ۱ + \frac{۲}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\,\frac{w+۱}{w-۱} \qquad (w = u+iv)$$

درنیم صفحهٔ فوقانی $v > ۰$ همساز است ومقدارآن به‌ازای $-۱ < u < ۱$ برابر -۱ و روی بقیهٔ قسمتهای محور u برابر $+۱$ است.

۱۹. نشان دهید که تبدیل کسری خطی‌ای که $w_1=-1$، $w_2=0$، $w_3=1$ را به‌ترتیب، بر $z_1=-1$، $z_2=-i$، $z_3=1$ می‌نگارد عبارت است از

$$z=\frac{w-i}{-iw+1}$$

تبدیل معکوس $w=w(z)$ رایافته، وباقراردادن آن در H،مسئلهٔ ۱۸، نشان دهیدکه تابع همسازحاصل همان است‌که درمسئلهٔ ۱۶ دیدیم.

۲۰. قضیه ۴، I بخش ۳.۱۸ را از (۵) نتیجه بگیرید.

۱۹

آنالیز عددی

ریاضیات مهندسی مآلاً به‌نتایج عددی منجرمی‌شود وبنابراین دانشجوی مهندسی باید بعضی **روشهای عددی** اساسی، یعنی روشهای به‌دست آوردن نتایج عددی از داده‌های مفروض را به‌عنوان قسمتی از ابزار ریاضی خود تاحدودی بداند. شاخه‌ای از ریاضیات راکه در مورداین روشها بحث می‌کند **آنالیزعددی** می‌نامند.

نیاز به چنین فرآیندهایی در به‌دست آوردن جوابهای عملی برای مسائل مفروض بدیهی‌است زیرا دربسیاری‌ازموارد ممکن است جوابهایی که‌ازنظریه‌به‌دست می‌آیندبرای مقاصد عددی بی‌فایده باشند. مثالهای نوعی عبارتند از فرمول انتگرال برای حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی‌مرتبهٔ اول (بخش ۷.۱) وقاعدهٔ‌کرامر برای حل دستگاههای معادلات خطی جبری برحسب‌دترمینان (بخشهای ۹.۷و۱۱.۷). درسایرموارد ممکن‌است‌نظریه صرفاً وجود جواب راتضمین کندبدون‌آنکه چگونگی به‌دست‌آوردن‌آن رانشان دهد. نحوهٔ رشدآنالیز عددی به‌شدت تحت تأثیر ظهورکامپیوترهای خودکار وکاربرد آنهاکه امروزه درکارهای ریاضی مهندسین اجتناب‌ناپذیر است قرار گرفته وحتی می‌توان گفت کامپیوترهای خودکار مسیر این رشد را معین کرده‌اند. پیشرفتهای آنالیز عددی مشتمل است برابداع روشهای نوین، اصلاح روشهای موجود به‌قسمی که در محاسبات خودکاربیشتر مؤثر باشند وتحلیل نظری و عملی الگوریتمها برای فرآیندهای محاسباتی استاندارد و به دست آوردن الگوریتمهایی که‌برای مواردمختلف مناسب‌باشند. تحلیل خطا قسمتی‌ازوظیفهٔ یك‌دست‌اندر کار آنالیز عددی است؛ او باید دامهای محاسباتی را که برسر راه هرمحاسبه‌کنندهٔ بی‌احتیاطی است مشخص‌کرده وآنها را حذف کند.

پیشنیاز این فصل: حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی؛ به‌اضافهٔ اصول معادلات دیفرانسیل برای بخشهای ۷.۱۹ و ۸.۱۹، و اصول جبر ماتریسی برای برخی عناوین بخشهای ۹.۱۹ تا ۱۴.۱۹.

مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت G.

جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱.۱۹ خطاها و اشتباهات کامپیوترهای خودکار

چون درمحاسبات عددی باتعدادی متناهی‌عددکار می‌کنیم وتعداد مراحل‌کار نیزمتناهی‌است روشهای آنالیز عددی یك سلسله **فرآیندهای متناهی** هستند، و جز درموارد نادری که جواب دقیق عددگویای نسبتاً ساده‌ای است وبا استفاده از روش عددی می‌توان آن را به دست آورد، نتیجهٔ عددی عموماً **مقدار تقریبی** ازنتیجهٔ دقیق (نامعلوم) را به‌دست‌می‌دهد.

اگر a^* مقدار تقریبی‌کمیتی باشدکه مقدار دقیق آن a است آنگاه تفاضل $\varepsilon = a^* - a$ را خطای مطلق a^* یا، به‌اختصار، **خطای** a^* نامند. بنابراین

$$a^* = a + \varepsilon \qquad \text{خطا} + \text{مقدار واقعی} = \text{تقریب}$$

خطای نسبی a^* که آن را با ε_r نمایش می‌دهیم با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خطا}}{\text{مقدار واقعی}} \qquad (a \neq 0).$$

بدیهی است وقتی $|\varepsilon|$ خیلی‌کوچکتر از $|a^*|$ باشدخواهیم داشت $\varepsilon_r \approx \varepsilon / a^*$. همچنین می‌توان‌کمیت $\gamma = a - a^* = -\varepsilon$ راکه تصحیح نامیده می‌شود به‌کاربرد. بنابراین[1]

$$a = a^* + \gamma \qquad \text{تصحیح} + \text{تقریب} = \text{مقدار واقعی}$$

وبالاخره **کران خطای** a^* عددی مانند β است، به طوری‌که

$$|a^* - a| \leqslant \beta \quad ، \quad |\varepsilon| \leqslant \beta.$$

خطاها را می‌توان، برحسب منشأ، به‌خطای‌آزمایشی، خطای قطع وخطای گردکردن تقسیم‌کرد. **خطای آزمایشی** خطای موجود در داده‌هاست (که احتمالاً ناشی از اندازه‌گیری است). **خطای قطع** خطای ناشی از قطع نابهنگام دنبالهٔ (متناهی یا نامتناهی) مراحل محاسباتی است‌که برای رسیدن به‌نتیجهٔ دقیق لازمند. این خطا به روش محاسباتی

---

۱. بعضی اوقات $\gamma = -\varepsilon$ را خطا می‌نامند؛ باآنکه این تمایزتاحدی‌خارج ازبحث است باید به‌آن توجه داشت.

بستگـی دارد و درمورد هر روش به‌طور مجزا تشریح می‌شود. **خطای گرد کردن** خطایی است که دراثر گرد کردن اعداد درحین محاسبه به‌وجود می‌آید وما اکنون دربارهٔ این خطا بحث می‌کنیم.

درنماد اعشاری هرعدد حقیقی را با دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از ارقام اعشاری نمایش می‌دهند. درمحاسبات ماشینی باید به جای عدد مورد نظر عددی بـا ارقام متناهی قرار داد. درکامپیوترهـای رقمی خودکار دو روش برای ضبط اعداد به‌کار می‌رود. این دو روش را شرح می‌دهیم. در دستگاه **ممیز ثابت** اعداد را با تعداد ثابتی از رقـم اعشاری نمایش‌می‌دهند، مانند ۶۲٫۳۵۸، ۰٫۰۱۳، ۱٫۰۰۰. در دستگاه **ممیز شناور** اعداد را با تعداد ثابتی رقم معنی‌دار نمایش می‌دهند. مثلاً $۰٫۶۲۳۶ \times ۱۰^{۲}$، $۰٫۱۷۱۴ \times ۱۰^{-۳}$ ، $-۰٫۲۰۰۰ \times ۱۰^{۱}$. **رقم معنی‌دار** عدد c هررقم از c است غیرازصفرهایی که امکان دارد برای تثبیت محل صفرسمت چپ اولین رقـم غیرصفر گذاشته شوند. (بنابـراین بقیهٔ صفرهارقم معنی‌دار هستند.)مثلاً هریك ازاعداد ۱۳۶۰، ۱٫۳۶۰، ۰٫۰۰۱۳۶۰ چهاررقم معنی‌دار دارند.[1]

حال می‌توان **قاعدهٔ گردکردن** عددی تا k اعشاری را بیان کرد. (قاعدهٔ گرد کردن تا k رقم معنی‌دار نیز همین است، و کافی است «اعشار» را با «رقم معنی‌دار» جایگزین کنند.)

($k+۱$) امین رقم اعشاری وتمام ارقام بعد ازآن را حذف کنید. اگرعددی که به این ترتیب حذف شده کمتر از نصف واحد رقم k ام باشد k امین رقم اعشاری را تغییر ندهید («گردکردن نقصانی»). هرگاه عـدد حذف شده بیش ازنصف واحد رقم k ام‌باشد به‌رقم k ام یکی اضافه کنید («گردکردن اضافی»). اگرعدد حذف شده درست نصف‌واحد باشد، عدد اصلی را به‌نزدیکترین عدد اعشاری زوج تبدیل کنید. (مثال: گرد شدهٔ اعـداد ۳٫۴۵ و ۳٫۵۵ «تایك اعشار» به‌ترتیب عبارتند از ۳٫۴ و ۳٫۶.)

قسمت آخر قاعده برای اطمینان ازاین امر است که هنگام صرف نظر کردن ازنصف واحد، گرد کردن اضافی و گرد کردن نقصانی بااحتمال یکسان اتفاق افتد.

با گردکردن عدد ۱٫۲۵۳۵ تا ۳، ۲، ۱ اعشار به ترتیب خواهیم داشت ۱٫۲۵۴، ۱٫۲۵، ۱٫۳، اما اگر ۱٫۲۵ را تا ۱ اعشار گرد کنیم بدون اینکه از عدد اصلی اطلاعی داشته باشیم به عدد ۱٫۲ می‌رسیم.

---

۱. درجدولهایی که درآنها توابعی با k رقم معنی‌دار نشان داده شده‌اند، قرارداد می‌شود کـه مقدار داده شدهٔ a^* ازمقدار دقیق متناظرش a، حداکثر به‌اندازهٔ $\pm ۰٫۵$ واحد آخرین رقم سمت راست اختلاف دارد، مگر آنکه خلاف این قرارداد صریحاً ذکـرشده باشد؛ مثلا، اگر $a=۱٫۱۹۹۶$، آنگاه جدولی با۴ رقم معنی‌دارباید $a^*=۱٫۲۰۰$ را نشان دهد. همچنین اگر عدد ۱۲۰۰۰ تنها تا سه‌رقم، درست باشد بهتراست آن را با ۱۲۰×۱۰^{۲} نشان دهیم و بـه همین ترتیب. علامت اختصاری برای «اعشار» D وبرای «رقم معنی‌دار» S است. مثلا $5D$ به معنی ۵ رقم اعشار و $8S$ به‌معنی ۸ رقم معنی‌دار است.

خطاهای گرد کردن ممکن است محاسبات را کاملاً ضایع کنند. درحالت کلی با زیاد شدن تعداد مراحل محاسباتی خطر این نوع خطا بیشتر می‌شود. بنا بر این اهمیت دارد که برنامه‌های محاسباتی را به‌منظور پیش‌بینی این نوع خطاها تحلیل کرده ترتیبی درمحاسبات اتخاذ کنیم که اثر خطای گرد کردن حتی‌الامکان *ناچیز باشد.*

ارقام محافظ ارقام اضافی هستند (یك، دو یا بیشتر) که درمراحل میانی محاسبات دستی به قصد حذف خطاهای ناشی از قطع به‌کارمی‌روند. با **نسبت دادن مقیاس** به متغیرها می‌توان تعداد رقمهای بعد از ممیز را در محاسبات کاهش داد. به عنوان مثال $0.002 \div 900 = 0.0000022222$ و دراین مورد برای آنکه ۴ رقم‌معنی‌دار داشته‌باشیم به ۹ «مکان اعشار» نیاز داریم، اما اگر بتوانیم متغیرها را طوری مقیاس گذاری کنیم که محاسبه به $2 \div 9 = 0.2222$ بینجامد، تنها ۴ اعشار لازم داریم.

تأکید می‌کنیم که اهمیت انتخاب مؤثرترین روش ممکن برای محاسبات خودکار کمتر ازاهمیت آن درمحاسبه باحسابگرهای رومیزی نیست واین صرفاً به‌خاطرصرفه‌جویی در وقت وهزینه نیست بلکه برای آن است که خطا را نیز به حداقل برسانیم. حتی برای مسائل ساده هم ممکن است راههای متعددی باکارآییهای مختلف وجود داشته باشد. این مطلب را با ذکرمثالی روشن می‌کنیم.

مثال ۱. معادلهٔ درجه دوم

ریشه‌های هریك ازمعادلات

$$\text{(الف)}\quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \text{و} \quad \text{(ب)}\quad x^2 - 40x + 2 = 0 \qquad (1)$$

را با به‌کاربردن ۴ رقم معنی‌دار درمحاسبات بیابید.

ریشه‌های x_1 و x_2 ی معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ عبارتند از

$$x_1 = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \qquad (2)$$

وچون $x_1 x_2 = c/a$، اگر x_1 را ازفرمول بالا بیابیم می‌توانیم بنویسیم

$$x_2 = \frac{c}{a x_1}. \qquad (3)$$

ازفرمولهای (۲) درمورد (۱ الف) خواهیم‌داشت $x = 2 \pm \sqrt{2} = 2.000 \pm 1.414$، $x_1 = 3.414$، $x_2 = 0.586$، اما (۳) نتیجه می‌دهد

$$x_1 = 3.414, \quad x_2 = 2.000/3.414 = 0.5858$$

با خطایی کمتر از ۱ واحد درآخرین رقم معنی‌دار (ر. ك. مسئلهٔ ۶). درمورد (۱ ب) از فرمولهای (۲) نتیجه‌می‌شود $x = 20 \pm \sqrt{398} = 20.00 \pm 19.95$، $x_1 = 39.95$،

$x_2 = 0.05$ ، که نتیجهٔ ضعیفی است درحالی که (۳) می‌دهد

$$x_1 = 39.95 \text{ ،} \quad x_2 = 2.000/39.95 = 0.050006$$

باخطایی کمتر از ۱ واحد درآخرین رقم معنی‌دار (ر. ك. مسئلهٔ ۷). ▲

درمحاسبات دستی ممکن است درنتایج میانی تعداد ارقام اعشاری را تغییردهیم تا جواب را بادقت لازم ولی باحداقل کار به دست آوریم. درمحاسبات خودکار می‌توان از بیشترین تعداد ارقام ممکن (که خود به‌نوع و طرح ماشین بستگی دارد) استفاده‌کرد و نیازی به‌کوشش برای رسیدن به‌جوابی که دقت آن ازپیش تعیین شده نیست.

ممکن است محاسبات ، علاوه برخطاها ، با **اشتباهاتی** نیز همراه باشندکه از کار برنامه‌نویس،اپراتور دستگاه یااستفاده کننده‌ازحسابگر رومیزی و یاوسایل‌مکانیکی‌والکتریکی مورد استفاده در محاسبه ناشی می‌شوند ؛ ازاین اشتباهات علی‌الاصول می‌توان جلوگیری کرد درحالی‌که خطا اجتناب ناپذیراست. **کنترل** نتایج عددی بسیارمهم است ودرهرروش عددی باید بازبینی نتایج نهایی (ومیانی) را درنظر داشت.

برای احتراز از اشتباه در **محاسبات دستی** باید محاسبه رابه‌صورت منظم جدولی انجام داد. نباید ازکاغذهای باطله استفاده‌کرد بلکه نتایج به‌دست آمده درحین محاسبه را باید در اوراق مخصوصی (ورقه‌های خط‌کشی شده) ثبت‌کرد و اعداد را مرتب و تمیز نوشت. از پرداختن به‌مراحل مختلف درآن واحد باید پرهیز کرد. برای تصحیح اشتباه باید روی عدد غلط خط‌کشیده و مقدار تصحیح شده را بالای آن نوشت. هرکدام از صفحات مزبور باید شامل توضیحاتی باشدکه روش محاسبه را درمراجعات آتی قابل فهم کند.

در **محاسبات خودکار** وضع اجمالاً به‌قرار زیر است. کامپیوتر خودکار قادر است عملیات جمع، تفریق، ضرب وتقسیم را انجام دهد: مراحل لازم برای حل مسئله باید با جزئیات به‌کامپیوتر گفته شود. این‌کار را می‌توان‌باخوراندن **برنامه‌ای** ،که روی **کارتهایی منگنه شده** ، به‌دستگاه انجام داد ؛ کارتهاکه‌کارت منگنه نام دارند حاوی داده‌های لازم و دنباله‌ای از **دستورالعملها** هستندکه باید با ترتیب معین توسط‌کامپیوتر انجام شوند. کامپیوتر نیز پس از دریافت برنامه و اجرای مراحل محاسباتی جواب را روی صفحه کاغذی چاپ می‌کند. اجزای اصلی کامپیوتر به‌قرار زیرند:

(I) **ورودی** برای دریافت کارتهای منگنه شده وانتقال اطلاعات روی‌کارتها به حافظه ؛

(II) **حافظه** یا **مخزن** برای ذخیره‌کردن دستورات و داده‌ها ؛ به هریك از دستورالعملها بعد از ضبط درحافظه آدرسی (موقعیت در حافظه) نسبت داده می‌شود و درصورت نیاز به‌کمك آدرس ازمخزن فراخوانده می‌شود؛

(III) **واحدکنترل** برای سازمان دادن به‌محاسبات، یعنی نظم وترتیب دادن به‌امر

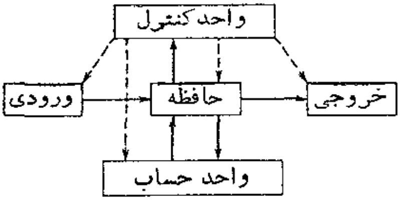
دریافت اطلاعات، اجرای عملیات حسابی به‌ترتیبی که در برنامه مشخص‌شده است وبالاخره بیرون دادن اطلاعات؛

(IV) **واحد حساب** برای انجام دادن‌چهارعمل اصلی؛ و

(V) **خروجی** برای انتقال اطلاعات از حافظه برروی‌کاغذهای دستگاه چاپ.

شکل ۳۴۵ کارهایی راکه دستگاه می‌تواند انجام دهدبه‌صورت یك نمودار کننده‌ای نشان می‌دهد.

نخست محاسبه‌ای را باتمام جزئیاتش طرحریزی می‌کنیم. سپس‌آن را بایك **«زبان مسئله‌ای»** *نظیر* **فرترن** (FOR mula TRAN slation) یا **آلگول** (ALGO rithmic Language) بیان می‌کنیم و بعد آن را روی‌کارتها برده به‌کامپیوتر می‌خورانیم. کامپیوتر با استفاده از **همگردان** برنامهٔ ما را **با** اجرای **ترجمهٔ خودکار** به‌یك **برنامه به زبان دستگاه** تبدیل‌کرده وآن را به‌مرحلهٔ اجرا درمی‌آورد وبه‌این‌ترتیب محاسبات طرح شده انجام می‌شوند. (معمولاً برنامهٔ تبدیل شده به‌زبان دستگاه دراختیار ما قرار ندارد مگراینکه بخواهیم مجدداً آن را مورد استفاده قراردهیم که دراین صورت‌کامپیوتر آن‌را روی دسته‌کارتی منگنه‌کرده و به ما تحویل می‌دهد.)



شکل ۳۴۵. اجزای یك کامپیوتر و کارهای اصلیی‌که دستگاه می‌تواند انجام دهد. پیکانهای‌کامل نمایش دهندهٔ جریان داده‌ها یا دستورالعملها و پیکانهای خط چین نشان‌دهندهٔ جریان علایم کنترلند.

تجربه نشان می‌دهد نمی‌توان از اشتباهاتی که درحین برنامه نویسی روی می‌دهد صرف‌نظرکرد. فرآیند ترجمه معمولا جستجو برای یافتن اشتباهات نوشتاری را نیز دربرمی‌گیرد؛ این اشتباهات به‌وسیلهٔ کامپیوتر مشخص وتصحیح می‌شود و برنامهٔ تصحیح‌شده مجدداً به‌کامپیوتر داده می‌شود. بااین همه، حتی‌الامکان باید برنامه‌ها را قبل‌ازشروع کارکامپیوتر با منتهای دقت‌آماده وکنترل‌کرد. پیداکردن اشتباهات دراین مرحلهٔ مقدماتی ساده‌تر ازیافتن آن توسط خود دستگاه است. به علاوه، نباید تصور کردکه یك‌برنامه‌صرفاً به دلیل قابلیت ترجمه و اجرای آن صحیح است،بلکه همیشه باید برنامهٔ جدید را برای

تکرار محاسبات برنامهٔ راهنمایی که قبلاً به دقت کنترل شده‌است به‌کار برد.

مسائل بخش ۱۰۱۹

۱. **(ممیز شناور)** نمایش ممیز شناور به‌صورت $x \times 10^{y}$ است. درعمل، برای احتراز ازنمای منفی می‌توان عدد ۵۰ را به‌نما اضافه‌کرد، یعنی، مثلاً $0{,}13 \times 10^{-8}$ را به صورت $0{,}13 \times 10^{42}$ نوشت. ۳۸۱٫۷۹۲۰۶ را با به‌کار بردن ۴رقم معنی‌دار به صورت فوق بنویسید.

۲. هرگاه β_1 کران خطای a_1^* و β_2 کران خطای a_2^* باشد، نشان دهید که $\beta = \beta_1 + \beta_2$ کران خطای مجموع $s^* = a_1^* + a_2^*$ است.

۳. نشان دهید که درمسئلهٔ ۲، β کران خطایی برای تفاضل $d^* = a_1^* - a_2^*$ است، و با مثالی روشن کنید که به‌جای β نمی‌توان عدد کوچکتری قرارداد.

۴. نشان دهید که درمورد خطاهای نسبی کوچك، خطای نسبی خارج‌قسمت تقریباً برابر است بامجموع خطاهای نسبی عوامل. مثال عددی ساده‌ای بزنید.

۵. نشان دهید که در مورد خطاهای نسبی کوچك، خطای نسبی خارج‌قسمت تقریباً برابر است با تفاضل خطاهای نسبی عوامل.

۶. با استفاده ازمسئلهٔ ۵، نشان دهید که درمثال ۱، قدرمطلق خطای

$$x_2 = 2{,}000/3{,}414 = 0{,}5858$$

کمتر از ۰٫۰۰۰۱ است.

۷. با استفاده ازمسئلهٔ ۵، نشان دهید که درمثال ۱، قدرمطلق خطای

$$x_2 = 2{,}000/39{,}95 = 0{,}05006$$

کمتراز ۰٫۰۰۰۰۱ است.

۸. مثال ساده‌ای برای تشریح ارقام محافظ بزنید.

۹. جدولی دواعشاری[1] برای $f(x) = x/16$، $x = 0(1)20$ محاسبه‌کنید و چگونگی توزیع خطای گردکردن را بیابید.

۱۰. جدولی سه اعشاری برای $f(x) = x/3$ ، $x = 0(1)100$ محاسبه‌کنید و نحوهٔ توزیع خطای گردکردن را بیابید.

۱۱. دشواریهای به‌دست آوردن جدول چهار ـ مکانی، باگردکردن (الف) درجدول پنج ـ مکانی، (ب) درجدول شش ـ مکانی، را تشریح کنید.

---

۱. معنی $x = a(h)b$ آن است که مقادیر تابع به‌ازای $x = a, a+2h, \ldots, b$ داده شده است.

۱۲. با مثالی نشان دهید در محاسباتی که با تعداد ثابتی ارقام معنی‌دار انجام می‌گیرند، حاصل‌جمع اعداد به‌ترتیب جمع کردن آنها بستگی ندارد.

۱۳. فرض کنید ۲٫۳۱۸۲ و ۰٫۴۴۳ درست گرد شده باشند. مشخص کنید کوچکترین فاصله‌ای را که $s = ۲٫۳۱۸۲ + ۰٫۴۴۳$ در آن قرار می‌گیرد، وقتی به‌جای مقادیر گردشده ازمقادیر واقعی کمیتها استفاده شود.

۱۴. n عدد $a_1, \ldots, a_n$ که a_j به طورصحیح به D_j اعشار گردشده است مفروضند.در محاسبهٔ مجموع $a_1 + \cdots + a_n$، با درنظر گرفتن $D = \min_j D_j$ اعشار، آیا لازم است که نخست جمع کنیم و سپس نتیجه را گرد کنیم یا اینکه نخست هرعدد را به D اعشار گرد کرده وسپس جمع کنیم؟

۱۵. فرض کنید a و b به طور صحیح و به‌ترتیب به $2D$ و D اعشار گردشده‌اند، وفرض کنید $1 < |b| < |a|$. اگر بخواهیم a/b را به‌عنوان یک‌خارج قسمت Dاعشاری محاسبه کنیم، نشان دهید بهتر است نخست تقسیم وسپس گرد کنیم. مثالی بزنید.

۲.۱۹ حل معادلات با تکرار

بسیاراتفاق می‌افتد که در ریاضیات مهندسی به **پیدا**کردن **جوابهای** معادلاتی به‌صورت

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

نیازداشته باشیم، یعنی لازم باشد مقادیر X_0 را بیابیم به طوری‌که $f(X_0)$ برابرصفر باشد؛ دراینجا f تابع داده شده‌ای است. می‌توان $x^2 - 3x + 2 = 0$ ، $x^3 + x = 1$ ، $\sin x = 0.5x$ ، $\tan x = x$ ، $\cosh x = \sec x$ ، $\cosh x \cos x = -1$ را مثال آورد که همگی قابل تبدیل به صورت (۱) هستند. دومعادلهٔ اول **معادلات جبری** هستند زیرا f متناظر به آنها چندجمله‌ای است و در این مورد جوابها را **ریشه‌های** معادله می‌نامند. سایر معادلات **معادلات غیرجبری** هستند زیرا شامل توابع غیرجبری هستند. فرمولهایی که مقادیرعددی دقیق جوابها را بدهند فقط درموارد بسیار ساده وجود دارند. دراغلب موارد مجبوریم روشهای تقریبی، به‌ویژه، روشهای تکراری را به‌کارببریم.

روش تکرار عددی روشی است که در آن x_0 دلخواهی انتخاب کرده و دنبالهٔ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ را از رابطهٔ

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (n = 0, 1, \cdots) \qquad (2)$$

به طور بازگشتی محاسبه می‌کنیم؛ g درفاصله‌ای شامل x_0 تعریف شده است ودامنهٔ g در آن فاصله‌قراردارد. بنابراین بایدمتوالیاً $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $x_3 = g(x_2)$ ، ... را محاسبه کرد.

دراین بخش، هم دامنه و هم‌برد $g(x)$ روی خط حقیقی قراردارند. درمسائل کلیتر x یا g یا هردوممکن است متغیر برداری باشند.

خاطرنشان می‌کنیم که روش تکرار درمسائل مختلف آنالیزعددی ازاهمیت زیادی برخوردار است.

چندین راه برای به دست آوردن روشهای تکرار برای حل (۱) وجود دارد، وما سه روش راکه اهمیت ویژه‌ای دارند مورد بحث قرارخواهیم داد.

تبدیلات جبری. می‌توان (۱) را به طریق جبری به صورت زیر تبدیل کرد:

$$x = g(x) \qquad (۳)$$

دراین‌صورت روش تکرار همان است که در (۲) بیان کردیم. هرجواب (۳) را یك **نقطهٔ ثابت** g می‌نامند. ممکن است به ازای یك معادلهٔ مفروض (۱)، چندین معادلهٔ (۳) وجود داشته باشد و رفتار دنباله‌های تکرار $x_۰, x_۱, x_۲, \ldots$ متفاوت باشند (وبه $x_۰$ وابسته). این مطلب را بامثال ساده‌ای روشن می‌کنیم.

مثال ۱. یك فرآیند تکرار

فرآیندی تکراری برای معادلهٔ $f(x) = x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ ترتیب دهید. چون می‌دانیم که جوابها عبارتند از

$$x = ۱٫۵ \pm \sqrt{۱٫۲۵} \quad \text{یعنی} \quad ۲٫۶۱۸۰۳۴ \quad \text{و} \quad ۰٫۳۸۱۹۶۶$$

می‌توان رفتار خطا را وقتی که فرآیند تکرار پیش می‌رود مشاهده کرد. معادله را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$x = g_۱(x) = \frac{۱}{۳}(x^۲ + ۱) \quad \text{وبنابراین} \quad x_{n+۱} = \frac{۱}{۳}(x_n^۲ + ۱)\text{،} \qquad (\text{۴الف})$$

اگر $x_۰ = ۱$ انتخاب کنیم، دنبالهٔ زیر به‌دست می‌آید (ر. ك. شکل ۳۴۶ الف):

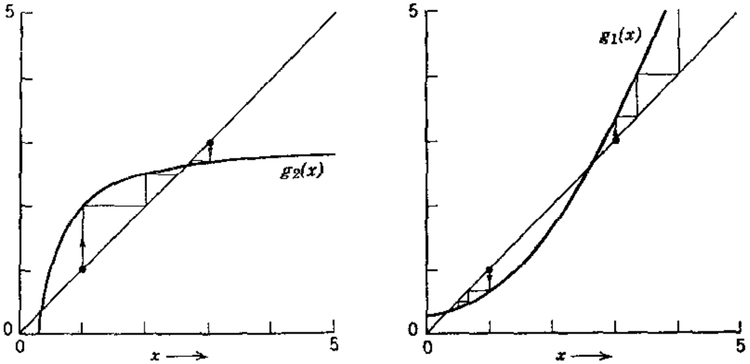
$$x_۰ = ۱٫۰۰۰, \; x_۱ = ۰٫۶۶۷, \; x_۲ = ۰٫۴۸۱, \; x_۳ = ۰٫۴۱۱, \; x_۴ = ۰٫۳۹۰, \; \ldots$$

که به نظرمی‌رسد به ریشهٔ کوچکتر میل می‌کند. اگرفرض کنیم $x_۰ = ۲$، وضع مشابهی خواهیم داشت. اگر $x_۰ = ۳$ بگیریم دنبالهٔ زیر به‌دست می‌آید (ر. ك. شکل ۳۴۶ الف):

$$x_۰ = ۳٫۰۰۰, \; x_۱ = ۳٫۳۳۳, \; x_۲ = ۴٫۰۳۷, \; x_۳ = ۵٫۷۶۶, \; x_۴ = ۱۱٫۴۱۴, \; \ldots$$

که به‌نظر می‌رسد واگرا باشد. معادله را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$x = g_۲(x) = ۳ - \frac{۱}{x} \quad \text{پس} \quad x_{n+۱} = ۳ - \frac{۱}{x_n} \qquad (\text{۴ ب})$$



(ب) (الف)

شکل ۳۴۶. مثال ۱، تکرارهای (۴الف) و (۴ب)

و اگر فرض کنیم ۱ = x_0، دنبالهٔ زیر به‌دست می‌آید (ر.ك. شکل ۳۴۶ ب):

x_0 = ۱٫۰۰۰, x_1 = ۲٫۰۰۰, x_2 = ۲٫۵۰۰, x_3 = ۲٫۶۰۰, x_4 = ۲٫۶۱۵, ...

که ظاهراً به جواب بزرگتر میل می‌کند. همین طور اگر فرض کنیم ۳ = x_0، دنبالهٔ زیر به دست می‌آید (ر. ك. شکل ۳۴۶ ب):

x_0 = ۳٫۰۰۰, x_1 = ۲٫۶۶۷, x_2 = ۲٫۶۲۵, x_3 = ۲٫۶۱۹, x_4 = ۲٫۶۱۸, ...

شکل ۳۴۶ نشان می‌دهد که همگرایی ظاهراً به‌این امر بستگی دارد که درهمسایگی یك جواب شیب منحنی $g(x)$ کمتر ازشیب خط مستقیم $y = x$ باشد وخواهیم دید که این شرط $|g'(x)| < 1$ (که شیب $y = x$ است) برای همگرایی کافی است. ▲

فرآیندی تکراری مانند (۲) را به ازای x_0 **همگرا** نامند اگر دنبالهٔ متناظرش $x_0, x_1, \ldots$ همگرا باشد.

قضیهٔ زیر که کاربردهای عملی متنوعی دارد، شرط کافی همگرایی را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۱ (همگرایی)

فرض‌کنید $x = s$ یکی‌ازجوابهای $x = g(x)$ بوده و g در یك فاصله‌ای مانند J که‌شامل s است مشتق پیوسته داشته باشد. در این صورت اگر در J داشته باشیم $|g'(x)| \leqslant \alpha < 1$ فرآیند تکراری که با (۲) تعریف شده است به‌ازای x_0 در J همگراست.

اثبات. بنا به قضیهٔ مقدار میانگین از حساب دیفرانسیل یك ξ بین x و s وجود دارد به طوری که

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s) \qquad (x \text{ در } J).$$

چون $g(s)=s$ و $x_1=g(x_0),\ x_2=g(x_1),\ \dots,$ خواهیم داشت:

$$|x_n-s|=|g(x_{n-1})-g(s)|=|g'(\xi)||x_{n-1}-s|\leqslant \alpha|x_{n-1}-s|$$
$$\leqslant \alpha^2|x_{n-2}-s|\leqslant \dots \leqslant \alpha^n|x_0-s|$$

وچون $\alpha<1$، داریم $\alpha^n \to 0$ و $|x_n-s|\to 0$ هرگاه $n\to\infty$ و اثبات کامل است. ▲

مثال ۲. یك فرآیند تکرار. تشریح قضیهٔ ۱

با روش تکرار جوابی برای $f(x)=x^3+x-1=0$ بیابید. رسم یك نمودار تقریبی نشان می‌دهد که یك جواب حقیقی درنزدیکی $x=1$ قرار دارد. می‌توانیم معادله را به صورت زیر بنویسیم:

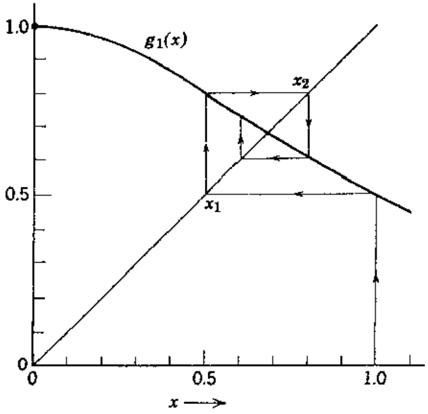
$$x=g_1(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{وبنابراین} \quad x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n^2}$$

پس به‌ازای همهٔ x ها، $|g_1'(x)|=2|x|/(1+x^2)^2<1$ وبنابراین به‌ازای هر x_0 همگرایی داریم. باانتخاب $x_0=1$ به دست می‌آوریم (ر.ك. شکل ۳۴۷)

$$x_1=0.500,\ x_2=0.800,\ x_3=0.610,\ x_4=0.729,\ x_5=0.653,$$
$$x_6=0.701,\ \dots$$

جواب دقیق تا $6D$ عبارت است از $s=0.682328$. همچنین معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$x=g_2(x)=1-x^3$. دراین صورت $|g_2'(x)|=3x^2$



شکل ۳۴۷. تکرار درمثال ۲

و این مقدار در نزدیکی ریشه از ۱ بزرگتر است، پس نمی‌توانیم انتظار همگرایی داشته باشیم. خواننده می‌تواند $x_0 = ۱$ ، $x_0 = ۰٫۵$ ، $x_0 = ۲$ را امتحان کند و ببیند چه اتفاق می‌افتد. ▲

روش نیوتن (که روش نیوتن ــ رفسون نیز نامیده می‌شود) روش تکراری دیگری برای حل معادلات $f(x) = 0$، با f مشتق‌پذیر، است. دراین روش نمودار f را با مماسهای مناسب تقریب می‌زنیم. با استفاده ازمقدار x_0 ی که از روی نمودار f به‌دست آمده‌است، x_1 را نقطهٔ تلاقی محور x ها و مماس برمنحنی f در x_0 می‌گیریم (ر. ك. شکل ۳۴۸). دراین صورت

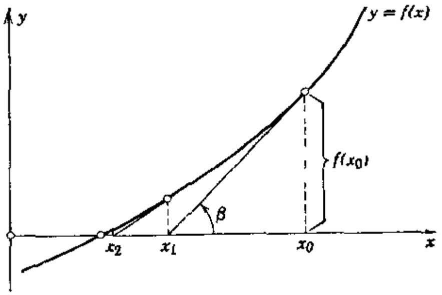
$$\tan\beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad \text{و بنابراین} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

درمرحلهٔ بعد، x_2 را حساب می‌کنیم (ر. ك. شکل ۳۴۸):

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم؛ فرمول کلی چنین است:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \cdots). \tag{5}$$



شکل ۳۴۸. روش نیوتن

مثال ۳. ریشهٔ دوم

تکرار نیوتنی برای محاسبهٔ x ، ریشهٔ دوم عدد مثبت c ، بسازید وآن را برای $c = ۲$ به کاربرید. داریم $x = \sqrt{c}$، از این‌رو $f(x) = x^2 - c = 0$ و $f'(x) = 2x$ ، و (۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^{۲}-c}{۲x_n}=\frac{۱}{۲}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right).$$

درمورد $c=۲$ اگر فرض کنیم $x_۰=۱$، به‌دست می‌آوریم.

$$x_۱=۱٫۵۰۰۰۰۰۰,\ x_۲=۱٫۴۱۶۶۶۷,\ x_۳=۱٫۴۱۴۲۱۶,$$
$$x_۴=۱٫۴۱۴۲۱۴,\ \dots .$$

$x_۴$ تا $۶D$ دقیق است.

مثال ۴. تکرار درمورد معادلهٔ غیرجبری

جواب مثبت $x=۲\sin x$ را بیابید. با انتخاب $f(x)=x-۲\sin x$، خواهیم داشت $f'(x)=۱-۲\cos x$ و (۵) نتیجهٔ زیر را می‌دهد

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{x_n-۲\sin x_n}{۱-۲\cos x_n}=\frac{۲(\sin x_n-x_n\cos x_n)}{۱-۲\cos x_n}=\frac{N_n}{D_n}.$$

با توجه به نمودار f درمی‌یابیم که جواب درنزدیکی $x_۰=۲$ است. با استفاده ازجدول توابع سینوسی و کسینوسی حساب می‌کنیم:

n	x_n	N_n	D_n	$x_{n+۱}$
۰	۲٫۰۰۰	۳٫۴۸۳	۱٫۸۳۲	۱٫۹۰۱
۱	۱٫۹۰۱	۳٫۱۲۵	۱٫۶۴۸	۱٫۸۹۶
۲	۱٫۸۹۶	۳٫۱۰۷	۱٫۶۳۹	۱٫۸۹۶

(جواب تا $۴D$، عبارت است از ۱٫۸۹۵۵).

مثال ۵. روش نیوتن درمورد معادلهٔ جبری

روش نیوتن را درمورد معادلهٔ $f(x)=x^۳+x-۱=۰$ به کار ببرید. از (۵) داریم

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{x_n^۳+x_n-۱}{۳x_n^۲+۱}=\frac{۲x_n^۳+۱}{۳x_n^۲+۱}.$$

از $x_۰=۱$ شروع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$x_۱=۰٫۷۵۰۰۰۰,\ x_۲=۰٫۶۸۶۰۴۷,\ x_۳=۰٫۶۸۲۳۴۰,\ x_۴=۰٫۶۸۲۳۲۸,\dots$$

در اینجا $x_۴$ تا $۶D$ دقیق است. مقایسه با مثال ۲ نشان می‌دهد که این همگرایی بسیار

سریعتر است. این مطلب ما را به مفهوم مرتبهٔ فرآیند تکرار که به‌شرح آن می‌پردازیم راهنمایی می‌کند. ▲

فرض کنید $x_{n+1}=g(x_n)$ معرف یك روش تکرار باشد و فرض کنید x_n جوابی مانند s از $x=g(x)$ را تقریب بزند. دراین صورت خواهیم داشت $x_n=s+\varepsilon_n$، که درآن ε_n خطای x_n است. فرض کنید که g چند مرتبه مشتق‌پذیر باشد به‌طوری که بنا به فرمول تیلور بتوان نوشت:

$$x_{n+1}=g(x_n)=g(s)+g'(s)(x_n-s)+\frac{1}{2}g''(s)(x_n-s)^2+\cdots$$
$$=g(s)+g'(s)\,\varepsilon_n+\frac{1}{2}g''(s)\varepsilon_n^2+\cdots.$$

درجهٔ ε_n در اولین جملهٔ غیرصفر، **مرتبهٔ** فرآیند تکرار تعریف شده با g نامیده می‌شود. چون $x_{n+1}-g(s)=x_{n+1}-s=\varepsilon_{n+1}$، خطای x_{n+1} است، ودرحالتی که همگرایی داریم، ε_n به‌ازای n بزرگ کوچك است، مرتبه معیاری است برای سرعت همگرایی.

تکرار نیوتن از مرتبهٔ دوم است.

درحقیقت داریم:

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},\quad g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

و $g'(s)=0$ زیرا $f(s)=0$؛ از این‌رو فرآیند حداقل ازمرتبهٔ دوم است. مشتق‌گیری بعدی نشان می‌دهد که $g''(s)=f''(s)/f'(s)$، که درحالت کلی صفرنیست. در مثال ۲ فرآیندی که به صورت $g_1(x)$ داده شده ازمرتبهٔ اول است زیرا

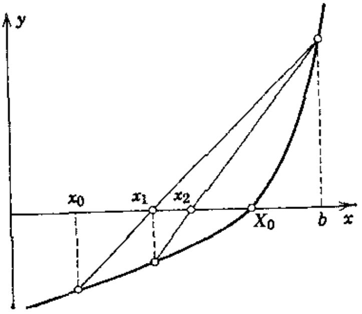
$$g_1'(x)=-2x/(1+x^2)^2 \quad \text{و} \quad g_1(x)=1/(1+x^2)$$

اگر در نزدیکی جوابی از $f(x)=0$ داشته باشیم $f'(x)=0$، آنگاه روش نیوتن دشواریهایی را باعث می‌شود، اما این دشواریها را اغلب می‌توان با رسم منحنی $f(x)$ به‌ازای مقادیری از x که نزدیك جواب مورد نظراست وبا استفاده ازتعبیرهندسی روش نیوتن برطرف کرد. اگر $f'(x)$ درنزدیکی جواب مورد نظر $f(x)=0$ کوچك باشد ممکن است محاسبهٔ $f(x_n)$ و $f'(x_n)$ با دقت زیاد برای به دست آوردن تقریب خوبی از x_{n+1} لازم باشد. این نشان می‌دهد که معادله بدحالت است. این مفهوم به‌ترتیب زیر تعریف شده است.

معادلهٔ $f(x)=0$ **بدطرح** است هرگاه بتوان مقدار کوچکی مانند

$$R(s^*)=f(s^*)$$

را ازمقادیر s^*ی به‌دست آورد که باجواب دقیق s متفاوت باشند، یا اگر تغییر کوچکی



شکل ۳۴۹. روش نابجایی (Regula falsi)

درتابعهای f باعث ایجاد تغییرات بزرگـی درجوابها شود. $R(s^*)=f(s^*)$ را **پس ماندهٔ** معادله در s^* می‌نـامند. کوچکی پس‌مانده نشانه‌ای از دقت s^* است، اما فهم این مطلب مهم است که کوچك بودن $R(s^*)$ الزاماً به معنی کوچك بودن خطای s^* نیست.

روش تکرارسوم برای حل معادلهٔ $f(x)=0$ **روش نابجایی** (*regula falsi*) است. دراین روش منحنی $f(x)$ را با وتری ازآن، چنانکه درشکل ۳۴۹ نشان داده شده‌است، تقریب می‌زنیم. این وتر محور x را درنقطهٔ

$$x_1=\frac{x_0 f(b)-bf(x_0)}{f(b)-f(x_0)}$$ (۶ الف)

قطع می‌کند و این تقریبی از جواب X_0 معادلهٔ $f(x)=0$ است. درمرحلهٔ بعد، تقریب زیررا محاسبه می‌کنیم:

$$x_2=\frac{x_1 f(b)-bf(x_1)}{f(b)-f(x_1)}$$ (۶ ب)

و به همین ترتیب. همگرایی به X_0 را می‌توان با نزدیکتر کردن b به X_0 سریعتر کنیم. این را معمولا باآزمایش حدس انجام می‌دهیم.

مثال ۶. روش نابجایی

مقدارتقریبی ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=x^3+x-1=0$ را در نـزدیکی $x=1$ معین کنید (ر. ك. مثال ۲). چون $f(0.5)=-0.375$ و $f(1)=1$، می‌توانیم فرض کنیم $x_0=0.5$ و $b=1$. دراین صورت فرمول (۶ الف) منجر به

$$x_1=\frac{0.5\times 1-1\times(-0.375)}{1-(-0.375)}=0.64$$

می‌شود. از (۶ ب) تقریب بهتر $x_2 = 0.672$ وغیره به‌دست می‌آید.

مسائل بخش ۲۰۱۹

یکی ازریشه‌های معادلات زیررا تعیین‌کنید؛ با x_0 مفروض شروع کرده وسه مرحلهٔ روش نیوتن را طی کنید.

۱. $x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 = 0,\ x_0 = 1$

۲. $x^3 - 1.2x^2 + 2x - 2.4 = 0,\ x_0 = 2$

۳. ریشه‌های معادلهٔ مربوط به‌مسئلهٔ ۱ عبارتند از ۹ر۰، ۱ر۱ و ۹ر۱. گرچه $x_0 = 1$ درنزدیکی ۹ر۰ و ۱ر۱ قرار دارد، باروش نیوتن نمی‌توان یکی ازاین دو ریشه را به‌دست‌آورد. چرا؟ x_0 دیگری انتخاب‌کنید، به‌طوری‌که این روش مارا به‌ریشهٔ ۱ر۱ نزدیك کند.

تمام ریشه‌های حقیقی معادلات زیررا باروش نیوتن بیابید.

۴. $\cos x = x$ ‏ ۵. $x + \ln x = 2$ ‏ ۶. $2x + \ln x = 1$

۷. $x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82 = 0$

۸. نشان دهیدکه درمثال ۲، $|g_1'(x)|$ در $x = \pm 1/\sqrt{3}$ ماکزیمم است ومقدار این ماکزیمم برابر است با $|g'(x)| = 3\sqrt{3}/8 = 0.65$.

۹. چرا درمثال ۱، دنباله‌ای یکنوا به‌دست می‌آید، ولی درمثال۲ چنین نیست؟

۱۰. تکرارهایی راکه درانتهای مثال۲ بدان اشاره شد انجام دهید. شکلی مانند شکل ۳۴۷ رسم‌کنید.

۱۱. ریشهٔ $x^5 = x + 0.2$ را درنزدیکی $x = 0$ باتبدیل جبری معادله به صورت (۲)، و با شروع از $x_0 = 0$، بیابید.

۱۲. معادله‌ای که درمسئلهٔ ۱۱ دیدیم ریشه‌ای درنزدیکی $x = 1$ دارد. این ریشه رابانوشتن معادله به‌صورت $x = \sqrt[5]{x + 0.2}$ وتکرار، باشروع از $x_0 = 1$، بیابید.

۱۳. هرگاه در مسئلهٔ ۱۲، معادلــه را به صورت $x = x^5 - 0.2$ بنویسیم و از $x_0 = 1$ شروع کنیم چه اتفاق می‌افتد؟

۱۴. با استفاده از تکرار نشان دهید که کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x = \tan x$ تقریباً برابر است با ۴۹ر۴. راهنمایی. از نمودارهای x و $\tan x$ نتیجه بگیرید کــه

ریشه‌ای بسیار نزدیك بـه $x_{\circ}=۳\pi/۲$ وجود دارد؛ معادلـه را بـه صورت $x=\pi+\arc\tan x$ بنویسید. (چرا؟)

۱۵. $\sqrt{۵}$ را باتکراری‌که درمثال ۳ دیدیم و با شروع از $x_{\circ}=۲$ ومحاسبهٔ $x_{۱},\dots,x_{۴}$ محاسبه‌کنید. بااستفاده از $\sqrt{۵}=۲٫۲۳۶۰۶۸$ خطا را محاسبه‌کنید.

۱۶. نشان دهیدکه درمثال ۳ داریم

$$x_{n+۱}{}^{۲}-c=\frac{۱}{۴}\left(x_n-\frac{c}{x_n}\right)^{۲}$$

واین‌کمیت معیاری برای سنجیدن دقت است. نشان دهیدکه تقریباً

$$|x_n-\sqrt{c}|\approx\frac{۱}{۲}\left|x_n-\frac{c}{x_n}\right|$$

واز آن درمسئلهٔ ۱۵ استفاده‌کنید.

۱۷. فاصله‌ای برروی محور x مثبت پیداکنیدکه درآن فرآیند تکرار ذکرشده درمثال۳، با $c=۲$، درشرایط قضیهٔ ۱ صدق‌کند.

۱۸. تکرار نیوتنی برای ریشهٔ سوم طرح‌کنید. $\sqrt[۳]{۷}$ را، باشروع از $x_{\circ}=۲$ و اجرای سه مرحله، محاسبه‌کنید.

۱۹. تکرار نیوتنی برای محاسبهٔ ریشهٔ k ام عدد مثبت c طرح‌کنید.

ریشه‌های حقیقی معادلات زیر را باروش نابجایی بیابید.

۲۰. $x^{۴}=۲$ **۲۱.** $x^{۴}=۲x$ **۲۲.** $۲\sin x=۲x$

۲۳. درمسئلهٔ ۲۰ مقادیر تقریبی ریشهٔ مثبت همیشه‌کوچکتر ازمقدار دقیق ریشه است.چرا؟

۲۴. در روش نیوتن نیاز به محاسبهٔ $f'(x)$ است. در کاربردهـا ممکن است این‌کار بـا اشکالاتی همراه باشد. یك راه احتراز از $f'(x_n)$، این است‌که به جای آن خارج قسمت تفاضلی $[f(x_n)-f(x_{n-۱})]/(x_n-x_{n-۱})$ را قراردهیم. رابطهٔ بین‌فرمول حاصل و regula falsi را بیان‌کنید.

۲۵. نشان دهیدکـه اگر g دریك فاصلهٔ بستهٔ I پیوسته بوده و برد آن در I قرار داشته باشد: درآن صورت $x=g(x)$ حداقل یك جواب درآن فاصله دارد. نشان دهیدکه ممکن است بیش از یك جواب وجود داشته باشد.

۳.۱۹ تفاضلهای متناهی

تفاضلهای متناهی در شاخه‌های متعددی از آنالیز عددی نظیر درون یابی، جداول مقابله، تقریب، مشتقگیری و حل معادلات دیفرانسیل اهمیت اساسی دارند. فرض می‌کنیم **جدولی** ازمقادیر عددی $f_j = f(x_j)$ تابع f درنقاط زیر

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h,\ \ldots \quad (h > 0 \text{ ، ثابت})$$

که فاصله‌شان ازهم ثابت است داشته باشیم؛ $f(x_j)$ ممکن است از یك فرمول نتیجه شود و یا **به‌طورتجربی** از آزمایش به دست آید. حال می‌توانیم **اولین تفاضلها** را با تفریق هرمقدار تابع $f(x)$ از مقدار آن به ازای x بعدی موجود درجدول تشکیل دهیم. در جدول ۱.۱۹ مثالی نشان داده شده است که درآن[1] $f(x) = x^3,\ x = -3(1)3$. با به کاربردن همان فرآیند تفریق درمورد تفاضلهای اول، **تفاضلهای دوم** f را به‌دست‌می‌آوریم و به همین ترتیب. دراین **جدول تفاضل** هرتفاضل در ستون مناسب، وسط دوعنصری از ستون قبل که از آنها به دست آمده است قرار می‌گیرد. ممیزها و صفرهای سمت چپ تفاضلها را می‌توان حذف کرد (ر. ك. جدول ۲.۱۹).

جدول ۱.۱۹

جدول تفاضل $f(x) = x^3,\ x = -3(1)3$

x	$f(x) = x^3$	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم	تفاضل چهارم
−۳	−۲۷				
		۱۹			
−۲	−۸		−۱۲		
		۷		۶	
−۱	−۱		−۶		۰
		۱		۶	
۰	۰		۰		۰
		۱		۶	
۱	۱		۶		۰
		۷		۶	
۲	۸		۱۲		
		۱۹			
۳	۲۷				

۱. معنی $x = a(h)b$ آن است که مقادیرتابع‌به‌ازای $x = a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots$ داده شده است.

سه نوع مختلف **نمادگذاری برای تفاضلها** درجداول تفاضل رایج است. برای جلوگیری از اشتباه، درآغاز باید بگوییم که وقتی صرفاً کارعددی می‌کنیم، صرف نظر از اینکه کدام نمادگذاری را به‌کاربریم اعداد یکسان در محلهای یکسان به‌دست خواهیم آورد. اولین (وشاید مهمترین) نمادگذاری، همان است که برای **تفاضلهای مرکزی** به‌کارمی‌رود:

x_{-2}	f_{-2}			
		$\delta f_{-3/2}$		
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$	
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$	
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$	
		$\delta f_{3/2}$		
x_2	f_2			

جدول ۲.۱۹

مقادیر و تفاضلهای $f(x)=1/x$

$x=1(0.2)2,\ 4D$

x	$f(x)=1/x$	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم
۱٫۰	۱٫۰۰۰۰			
		−۱۶۶۷		
۱٫۲	۰٫۸۳۳۳		۴۷۷	
		−۱۱۹۰		−۱۸۰
۱٫۴	۰٫۷۱۴۳		۲۹۷	
		−۸۹۳		−۹۸
۱٫۶	۰٫۶۲۵۰		۱۹۹	
		−۶۹۴		−۶۱
۱٫۸	۰٫۵۵۵۶		۱۳۸	
		−۵۵۶		
۲٫۰	۰٫۵۰۰۰			

بنابراین $\delta f_{-1/2}=f_0-f_{-1}$, $\delta f_{-3/2}=f_{-1}-f_{-2}$ و درحالت کلی

$$\delta f_{m+1/2}=f_{m+1}-f_m \tag{1}$$

شاخص زیر سمت چپ میانگین شاخصهای زیرسمت راست است. همچنین

$$\delta^2 f_m=\delta f_{m+1/2}-\delta f_{m-1/2},$$

و به همین ترتیب. تفاضلهایی که دارای شاخص زیریکسان هستند روی یك خط افقی‌واقعند. (توجه داشته باشید که لزومی ندارد x_0 کوچکترین x جدول باشد. مثلا درجدول ۲.۱۹ می‌توان نوشت $x_0=$ ۱ر۶ ، دراین صورت $f_0=$ ۰ر۶۲۵۰ ، $\delta f_{1/2}=-$ ۰ر۰۶۹۴ ، $\delta^2 f_0=$ ۰ر۰۱۹۹ و به همین ترتیب.)

نمادگذاری دوم برای **تفاضلهای پیش‌رونده** به‌کارمی‌رود:

x_{-2}	f_{-2}			
		Δf_{-2}		
x_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$	
		Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$
x_0	f_0		$\Delta^2 f_{-1}$	
		Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		
x_2	f_2			

از این رو $\Delta f_0=f_1-f_0$, $\Delta f_{-1}=f_0-f_{-1}$, $\Delta f_{-2}=f_{-1}-f_{-2}$, و در حالت کلی

$$\Delta f_m=f_{m+1}-f_m. \tag{2}$$

به گونه‌ای مشابه داریم

$$\Delta^2 f_m=\Delta f_{m+1}-\Delta f_m,$$

و به همین ترتیب. مثلا، در جدول ۲.۱۹ اگرفرض کنیم $x_0=$ ۱ر۶ ، در این صورت $f_0=$ ۰ر۶۲۵۰ ، $\Delta f_0=-$ ۰ر۰۶۹۴ ، $\Delta^2 f_0=$ ۰ر۰۱۳۸ . تفاضلهایی که شاخص زیریکسان دارند بر‌روی خط شیبداری که شیب آن به‌طرف پایین یا بالاست قرار دارند.

سومین نمادگذاری مربوط به **تفاضلهای پس‌رونده** است:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \nabla f_{-1} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \nabla^2 f_0 & \\
 & & \nabla f_0 & & \nabla^3 f_1 \\
x_0 & f_0 & & \nabla^2 f_1 & \\
 & & \nabla f_1 & & \nabla^3 f_2 \\
x_1 & f_1 & & \nabla^2 f_2 & \\
 & & \nabla f_2 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}
$$

بنابراین $\nabla f_{-1}=f_{-1}-f_{-2}$، $\nabla f_0=f_0-f_{-1}$، $\nabla f_1=f_1-f_0$ و درحالت کلی

$$\nabla f_m=f_m-f_{m-1}\,. \qquad (3)$$

به گونه‌ای مشابه داریم

$$\nabla^2 f_m=\nabla f_m-\nabla f_{m-1},$$

و به‌همین ترتیب. تفاضلهایی که شاخص زیریکسان‌دارند، درجدول، روی خطوطی که شیبشان به‌طرف بالا یا به سمت عقب است قرارمی گیرند. نمادگذاری تفاضلهای پس‌رونده معمولا برای محاسبات مربوط به‌نزدیکی انتهای حوزهٔ جدول سازی مناسب است.

هرتفاضل مشخص موجود در جدول را می‌توان با سه علامت مختلف نمایش داد. مثلا درجدول ۲.۱۹، اگرقراردهیم ۱٫۶ = x_0، دراین صورت به‌دست می‌آوریم

$$-0.0893=\delta f_{-1/2}=\Delta f_{-1}=\nabla f_0\,.$$

درحالت کلی داریم

$$\delta^n f_m=\Delta^n f_{m-n/2}=\nabla^n f_{m+n/2}\,.$$

ازتفاضلها می‌توان برای **آشکارسازی خطا** درجدول استفاده‌کرد. خطای ε که در مقدارتابع وجود دارد، همان طورکــه درجدول ۳.۱۹ نشان داده شده است، در تفاضلها پخش می‌شود. نتیجه می‌شود که تغییرات‌زیاد درتفاضلها دال برامکان وجود خطا درمقادیر تابع است. بدیهی است که تغییرات کم می‌تواند ناشی از گردکردن باشد.

از تفاضلها برای **تقریب زدن** توابع با چندجمله‌ایها نیز استفاده می‌شود. درمورد چندجمله‌ای درجه n ام $p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$، تفاضلهای nام موجود درجدول بافاصلهٔ h ثابتند (برابرند با $n!h^na_0$) و تمام تفاضلهای بالاتر صفرند، زیرا

$$p_n(x+h)-p_n(x)=a_0[(x+h)^n-x^n]+\dots=a_0nhx^{n-1}+\dots$$

جدول ۳.۱۹

پخش خطای یك مقدارتابع درجدول تفاضل

[خطای $f($۲ر۳$)$] $f(x)=\sqrt{x},\ x=$ ۲ر۰(۰ر۱)۲ر۶, ۴D

x	$\sqrt{x}$	تفاضلها			$\sqrt{x}$	تفاضلها			پخش خطای ε			
۲ر۰	۱ر۴۱۴۲				۱ر۴۱۴۲							
		۳۴۹				۳۴۹						
۲ر۱	۱ر۴۴۹۱		−۸		۱ر۴۴۹۱		−۸					
		۳۴۱		۱		۳۴۱		۱۱				ε
۲ر۲	۱ر۴۸۳۲		−۷		۱ر۴۸۳۲		۳				ε	
		۳۳۴		−۱		۳۴۴		−۳۱		ε		−۳ε
۲ر۳	۱ر۵۱۶۶		−۸		۱ر۵۱۷۶		−۲۸		ε		−۲ε	
		۳۲۶		۱		۳۱۶		۳۱		−ε		۳ε
۲ر۴	۱ر۵۴۹۲		−۷		۱ر۵۴۹۲		۳				ε	
		۳۱۹		۲		۳۱۹		−۸				−ε
۲ر۵	۱ر۵۸۱۱		−۵		۱ر۵۸۱۱		−۵					
		۳۱۴				۳۱۴						
۲ر۶	۱ر۶۱۲۵				۱ر۶۱۲۵							

یك چندجمله‌ای درجهٔ $n-1$ است ؛ به‌گونه‌ای مشابه، تفاضلهای دوم با یك چندجمله‌ای درجهٔ $n-2$ که ضریب پیشروی آن $a_0 n(n-1)h^2$ است نشان داده می‌شوند و به‌همین ترتیب. نتیجه اینکه هرگاه تفاضلهای n ام موجود در جدولی از تابع f در یك حوزهٔ مفروض تقریباً ثابت باشند دراین صورت مقادیر این جدول را می‌توان دراین حوزه به تقریب باچندجمله‌ای درجهٔ nام p_n نمایش داد. حال روشی‌را برای پیدا کردن p_n، وقتی که f داده شده است، تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. تقریب

درجدول ۳.۱۹، تفاضلهای دوم تقریباً ثابت هستند (وبرابر ۷−). ازاین رو می‌توان یك چند جمله‌ای تقریب زن درجهٔ دوم p_2 پیداکرد. نخست با این فرض که تفاضلهای دوم دقیقاً ۷− هستند و با انتخاب مقدارتابع و تفاضل اولی در وسط برد، مثلا ۱٫۵۱۶۶ و ۳۳۴، جدول تفاضلی می‌سازیم. درنتیجه جدول ۴.۱۹ به‌دست می‌آید. a_0، ضریب

جدول ۴.۱۹

تقریب زدن $f(x)=\sqrt{x}$ با دوجمله‌ای p_2

x	$p_2(x)$	تفاضلها	
۲٫۰	۱٫۴۱۴۳		
		۳۴۸	
۲٫۱	۱٫۴۴۹۱		−۷
		۳۴۱	
۲٫۲	۱٫۴۸۳۲		−۷
		۳۳۴	
۲٫۳	۱٫۵۱۶۶		−۷
		۳۲۷	
۲٫۴	۱٫۵۴۹۳		−۷
		۳۲۰	
۲٫۵	۱٫۵۸۱۳		−۷
		۳۱۳	
۲٫۶	۱٫۶۱۲۶		

پیشروی p_2 ، از رابطهٔ $a_0 2!h^2 = a_0 \times 2 \times 0.1^2 = -0.0007$ به‌دست می‌آید(که برابر تفاضل دوم است)؛ ازاین‌رو $a_0 = -0.0007/0.02 = -0.035$. بنابراین $p_1(x) = p_2(x) + 0.035x^2$ از درجهٔ اول است و به‌کمك جدول ۴.۱۹ می‌توان با محاسبه نشان‌داد که تفاضلهای اول‌ثابت هستند (0.04915) و‌می‌دانیم که باید برابر $a_1 h$ باشند. بنابراین

$$a_1 = 0.04915/0.1 = 0.4915.$$

و بالاخره $p_1(x) - 0.4915x = a_2 = 0.5713$، بنابراین داریم

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.57130.$$

این مثال نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم از تفاضلها برای بررسی کیفیت یك تقریب استفاده کنیم، بدون‌آنکه واقعاً یك چندجمله‌ای معین کنیم. برای نیل به‌این منظور روشهای متعددی وجود دارد که بعضی ازآنها را در بخش بعد تشریح می‌کنیم.

مسائل بخش ۳.۱۹

۱. درجدول ۲.۱۹، بافرض $x_0 = 1.2$ ، تمام اعداد را برحسب نمادگذاری (الف) تفاضلهای مرکزی، (ب) تفاضلهای پیش‌رونده، (ج) تفاضلهای پس‌رونده بنویسید .

۲. با انجام محاسبات لازم، جدول تفاضلی برای $f(x) = x^3$ ، به‌ازای $x = 0(1)5$ ، بنویسید. با فرض $x_0 = 2$ تمام اعداد را برحسب نمادگذاری (الف) تفاضلهای مرکزی، (ب) تفاضلهای پیش‌رونده، (ج) تفاضلهای پس‌رونده بنویسید.

۳. نشان دهید که

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}, \delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}.$$

۴. مطلوب است محاسبهٔ $f(x) = 1/(x+1),\ x = 0(0.2)1$ تا (الف) $2D$ ، (ب) $3D$، (ج) $4D$ و مقایسهٔ اثر خطاهای گردکردن درجداول تفاضل متناظر.

۵. جدول تفاضلی‌برای $f(x) = x^2$، به‌ازای $x = 0(1)10$، بسازید. همین‌کاررا وقتی که به‌جای $f(5) = 25$ عدد ۲۶ قرارگیرد انجام داده تفاضلهای اول، دوم، سوم و چهارم را پیداکنید. به‌پخش خطا توجه‌کنید.

۶. بااستفاده ازتفاضلها جدول زیر راکنترل کنید

x	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	0.250	0.244	0.242	0.233	0.227	0.222

۷. محاسبات مربوط به‌مثال ۱ را انجام دهید.

۴۰۱۹ درون‌یابی

اغلب باداشتن جدولی ازمقادیر تابعی مانند $f(x)$، لازم می‌شودکه مقادیر $f(x)$ را به ازای مقادیری از x که بین مقادیر داده شدهٔ x درجدول قرار دارند حساب کنیم. مسئلهٔ به دست آوردن چنین مقداری برای f از روی مقادیر جدولی داده شده را **درون‌یابی** می‌نامند. مقادیر جدولی $f(x)$ راکه دراین فرآیند بکار می‌روند **مقادیر لولایی** می‌نامند. روشهای معمول درون‌یابی براین فرض استوارندکه درهمسایگی x مورد نظر، f را می‌توان بایك چندجمله‌ای p که مقدارش در آن x تقریبی از f درآنجا گرفته می‌شود تقریب زد.

ساده‌ترین این روشها **درون‌یابی خطی** است‌که درآن منحنی f بین دومقدار جدولی نزدیك به‌هم x_0 و x_1 را با وتر بین این دومقدار x تقریب می‌زنیم (ر.ك. شكل ۳۵۰). بنابراین به عنوان مقدارتقریبی f در $x=x_0+rh$ خواهیم داشت

$$f(x)\approx p_1(x)=f_0+r(f_1-f_0)=f_0+r\Delta f_0 \qquad (1)$$

$$\left(r=\frac{x-x_0}{h},\ 0\leqslant r\leqslant 1\right)$$

این رابطه را درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی درارتباط باجداول لگاریتم یاتوابع مثلثاتی دیده‌ایم. مثلا، برای به‌دست‌آوردن $\ln 9{,}2$، ازجدولی‌که نشان می‌دهد

$$\ln 9{,}5=2{,}251 \quad \text{و} \quad \ln 9{,}0=2{,}197$$

می‌توانیم نخست بنویسیم $r=0{,}2/0{,}5=0{,}4$ وسپس

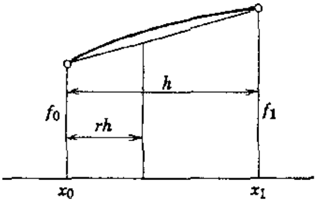
$$\ln 9{,}2=\ln 9{,}0+0{,}4(\ln 9{,}5-\ln 9{,}0)=2{,}219$$

نتایج درون‌یابی خطی رضایت بخش است تاوقتی‌که مقادیر x جدول آنقدر به‌هم نزدیك‌باشندکه اختلاف وتر بامنحنی $f(x)$ ناچیزباشد، مثلا تاوقتی‌که این اختلاف‌کمتر از $1/2$ واحد آخرین رقم ثبت شده درجدول برای مقادیر x بین x_0 و x_1 باشد.

در **درون‌یابی درجه دوم** منحنی تابع f بین x_0 و $x_2=x_0+2h$ را باسهمی درجه دومی‌که ازنقاط (x_0, f_0)، (x_1, f_1)، (x_2, f_2) می‌گذرد تقریب می‌زنیم و فرمول دقیقتر زیر را به دست می‌آوریم:

$$f(x)\approx p_2(x)=f_0+r\Delta f_0+\frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 \qquad (2)$$

$$\left(r=\frac{x-x_0}{h},\ 0\leqslant r\leqslant 2\right)$$



شکل ۳۵۰. درون‌یابی خطی

که در آن $x=x_۰+rh$. به‌ازای $x=x_۰(r=۰)$ طرف راست رابطه برابرمی‌شود با $f_۰$، و به ازای $x=x_۱(r=۱)$ برابر می‌شود با $f_۰+\Delta f_۰=f_۱$، و به ازای $x=x_۲(r=۲)$ برابراست با

$$f_۰+۲(f_۱-f_۰)+[(f_۲-f_۱)-(f_۱-f_۰)]=f_۲ \cdot$$

مثال ۱. درون‌یابی خطی و درجه دوم

هرگاه $\ln ۹٫۰=۲٫۱۹۷۲$ و $\ln ۹٫۵=۲٫۲۵۱۳$ داده شوند، دراین صورت بنابه (۱) داریم $\ln ۹٫۲=۲٫۲۱۸۸$ که دقت آن تنها تا $۳D$ است، درحالی‌که (۲) بافرض $\ln ۱۰٫۰=۲٫۳۰۲۶$ نتیجه می‌دهد:

$$\ln ۹٫۲=۲٫۱۹۷۲+۰٫۴\times ۰٫۰۵۴۱+\frac{۰٫۴\times(-۰٫۶)}{۲}(-۰٫۰۰۲۸)$$

$$=۲٫۲۱۹۲$$

که دقت آن تا $۴D$ است. ▲

با به کاربردن چندجمله‌ایهای درجهٔ بالاتر تقریبهای دقیقتری به‌دست می‌آید. چندجمله‌ای $p_n(x)$ راکه درجه n است می‌توان بامقادیرش به‌ازای $n+۱$ مقدار متمایز x به‌طور یکتا معین کرد. درمورد حاضر به یك چندجمله‌ای p_n نیاز داریم، به طوری‌که $p_n(x_۰)=f_۰, \ldots, p_n(x_n)=f_n$؛ در اینجا $f_۰=f(x_۰), \ldots, f_n=f(x_n)$ مقادیر f جدول هستند. این چندجمله‌ای با **فرمول درون‌یابی تفاضل پیش‌روندهٔ نیوتن** (یا گریگوری - نیوتن*) داده می‌شود:

$$f(x)\approx p_n(x)=f_۰+r\Delta f_۰+\frac{r(r-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_۰+\frac{r(r-۱)(r-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_۰$$

$$+\cdots+\frac{r(r-۱)\cdots(r-n+۱)}{n!}\Delta^n f_۰ \qquad (۳)$$

$$\left(x=x_۰+rh,\ r=\frac{x-x_۰}{h},\ ۰\leqslant r\leqslant n\right),$$

* Gregory - Newton

(۱) و (۲) حالتهای خاص این فرمول هستند ($n=۱$, $n=۲$). باید ثابت کنیم که $p_n(x_k)=f_k(k=۰, ۱, \ldots, n)$. سمت‌راست (۳) نشان می‌دهد که فرمول ازرابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$(۴) \qquad f_k=\binom{k}{۰}f_۰+\binom{k}{۱}\Delta f_۰+\binom{k}{۲}\Delta^۲ f_۰+\cdots+\binom{k}{k}\Delta^k f_۰$$

دراینجا **ضرایب دوجمله‌ای** چنین تعریف شده‌اند:

$$(۵)\binom{k}{۰}=۱, \binom{k}{s}=\frac{k(k-۱)(k-۲)\cdots(k-s+۱)}{s!} \quad (\text{عددصحیح}\, s ، s\geqslant ۰)$$

و $s!=۱\times۲\times۳\times\cdots\times s$ ・ درواقع اگر در (۳) قراردهیم $r=k$، درآن صورت سمت راست (۳) باسمت راست (۴) برابرمی‌شود. فرمول (۴) رامی‌توان بااستقرا ثابت کرد. به ازای $k=۰$ این فرمول صادق است. فرض کنید به ازای $k=q$ فرمول صادق باشد. دراین صورت با استفاده از (۴)، به‌ازای $k=q$، وفرمول حاصل ازآن، بابه‌کار بردن Δ ، داریم

$$\begin{aligned} f_{q+۱}&=f_q+\Delta f_q\\ &=\binom{q}{۰}f_۰+\binom{q}{۱}\Delta f_۰+\binom{q}{۲}\Delta^۲ f_۰+\cdots+\binom{q}{q}\Delta^q f_۰\\ &\quad+\binom{q}{۰}\Delta f_۰+\binom{q}{۱}\Delta^۲ f_۰+\binom{q}{۲}\Delta^۳ f_۰+\cdots+\binom{q}{q}\Delta^{q+۱} f_۰ .\end{aligned}$$

دراین فرمول ضریب $\Delta^s f_۰$ [ر. ک. (۵)] برابراست با

$$\binom{q}{s}+\binom{q}{s-۱}=\binom{q+۱}{s}$$

که به‌ازای $k=q+۱$ فرمول(۴) به‌دست می‌آید وبدین وسیله اثبات با روش استقراکامل می‌شود. ▲

فرمولی که شبیه (۳) است اما تفاضلهای پس‌رونده را دربرمی‌گیرد **فرمول‌درون‌یابی تفاضل پس‌روندهٔ نیوتن** (یا گریگوری ـ نیوتن) است:

$$f(x) \approx p_n(x) = f_۰ + r\nabla f_۰ + \frac{r(r+۱)}{۲!}\nabla^۲ f_۰ + \cdots$$

$$+\frac{r(r+۱)\cdots(r+n-۱)}{n!}\nabla^n f_۰ \qquad (۶)$$

که درآن همانند (۳) داریم $x = x_۰ + rh,\ r = (x - x_۰)/h,\ ۰ \leqslant r \leqslant n$.

درمورد روشها وفرمولهای درون یابی بااستفاده ازتفاضل متناهی نوشته‌های فراوانی وجود دارد. مثلا فرمولهایی وجوددارند که‌فقط شامل تفاضلهای مرتبهٔ زوج هستند. فرمولی ازاین نوع که به‌ویژه مفید است، ساده‌ترین **فرمول اورت*** است

$$f(x) \approx (۱-r)f_۰ + rf_۱ + \frac{(۲-r)(۱-r)(-r)}{۳!}\delta^۲ f_۰$$

$$+\frac{(r+۱)r(r-۱)}{۳!}\delta^۲ f_۱, \qquad (۷)$$

که درآن $r = (x - x_۰)/h,\ ۰ \leqslant r \leqslant ۱$. برای تسهیل درکاربرد، دراغلب جدولهای تابعی تفاضلهای دوم مورد نیاز در (۷) آورده می‌شود.

مثال ۲. کاربردی ازفرمول اورت (۷)

$e^{۱٫۲۴}$ را بااستفاده از (۷) وجدول زیر بیابید:

x	e^x	$\delta^۲$
۱٫۲	۳٫۳۲۰۱	۳۳۳
۱٫۳	۳٫۶۶۹۳	۳۶۷

داریم $r = ۰٫۰۴/۰٫۱ = ۰٫۴$، و (۷) می‌دهد

$$e^{۱٫۲۴} = ۰٫۶ \times ۳٫۳۲۰۱ + ۰٫۴ \times ۳٫۶۶۹۳ + \frac{۱٫۶ \times ۰٫۶ \times (-۰٫۴)}{۶}$$

$$\times ۰٫۰۳۳۳ + \frac{۱٫۴ \times ۰٫۴ \times (-۰٫۶)}{۶} \times ۰٫۰۳۶۷$$

$$= ۳٫۴۵۹۸ - ۰٫۰۰۲۱ - ۰٫۰۰۲۱ = ۳٫۴۵۵۶$$

که دقت آن تا $۴D$ است.

---

* Everett formula

توجه کنید که با درون یابی خطی داریم ۳٫۴۵۹۸ که دقت آن تنها تا $2D$ است. (خواننده می‌تواند از $e^{1.1}=3.0042$ و $e^{1.4}=4.0552$ برای کنترل تفاضلهای دوم استفاده کند.) ▲

یادآوری می‌کنیم که **فرمول اورت** درحالت کلی عبارت است از

$$f(x)=qf_0+rf_1+\binom{q+1}{3}\delta^2 f_0+\binom{r+1}{3}\delta^2 f_1+\binom{q+2}{5}\delta^4 f_0 \tag{8}$$
$$+\binom{r+2}{5}\delta^4 f_1+\cdots$$

که درآن مانندقبل $0\leqslant r\leqslant 1$، $r=(x-x_0)/h$ و $q=1-r$. دراین فرمول نسبت ضرایب $\delta^2 f_0$ و $\delta^4 f_0$ برابر است با

$$\binom{q+2}{5}\bigg/\binom{q+1}{3}=\frac{q^2-4}{20}$$

و، به‌گونه‌ای مشابه، نسبت ضرایب $\delta^4 f_1$ و $\delta^2 f_1$ برابراست با $(r^2-4)/20$. هردو نسبت درفاصلهٔ ۰ و ۱ تغییرمی‌کنند ولی تغییرات آنها کم است. بنابراین اگرمیانگین عددی مناسب μ را برای آنها انتخاب کنیم، می‌توانیم با استفاده از (۷)، با **تفاضلهای دوم اصلاح شده** اثرتفاضل چهارم را نیز بدانیم:

$$\delta_m^2 f=\delta^2 f+\mu\delta^4 f,\quad \mu=-0.18393 \tag{9}$$

مقدار μ یی که دراینجا آورده‌ایم ازبین مقادیری که درنوشته‌های مختلف پیشنهاد شده انتخاب شده است. این روش استفاده ازتفاضلهای اصلاح شده را **عقب‌گرد** می‌نامند. اگر تفاضل چهارم کمتر از ۱۰۰۰ واحد (ازآخرین رقم معنی‌دار) باشد وتفاضل پنجم کمتر از ۷۰ باشد دراین صورت خطای واقعی ازنصف واحدکمتراست.

بدون اثبات متذکرمی‌شویم که هرگاه $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ به‌طوردلخواه پخش‌شده باشند، چندجمله‌ای درجه n مربوط به $(x_0,\ f_0),\ \ldots,\ (x_n,\ f_n)$، که در آن $f_j=f(x_j)$، از طرف راست **فرمول درون‌یابی تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن** به دست می‌آید:

$$f(x)\approx f_0+(x-x_0)f[x_0,\ x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,\ x_1,\ x_2] \tag{۱۰ الف}$$
$$+\cdots+(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,\ \ldots,\ x_n]$$

این فرمول شامل **تفاضلهای تقسیم شده** است که با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$f[x_0,\ x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\ f[x_0,\ x_1,\ x_2]=\frac{f[x_1,\ x_2]-f[x_0,\ x_1]}{x_2-x_0},\cdots$$

(۱۰ ب)

$$f[x_0,\ \cdots,\ x_k]=\frac{f[x_1,\ \cdots,\ x_k]-f[x_0,\ \cdots,\ x_{k-1}]}{x_k-x_0}.$$

اگر $x_k=x_0+kh$ (فاصلهٔ نقاط از هم مساوی باشد)، دراین صورت

$$f[x_0,\ \cdots,\ x_k]=\Delta^k f_0/k!h^k،$$

و (۱۰ الف) به صورت (۳) درمی‌آید.

در درون یابی باروشهای تفاضل باید تفاضلهارامحاسبه‌کنیم؛ ازاین تفاضلهامی‌توان برای‌کنترل جدولهای‌جدید یامشکوك استفاده‌کرد. مع‌ذلك، دربیشتر جدولها بهاین سؤال که چه مرتبه‌ای از درون‌یابی باید به‌کار رود پاسخی داده نمی‌شود. **درون یابی‌لاگرانژی** براساس **فرمول درون‌یابی لاگرانژ** بناشده است:

$$f(x)\approx L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}f_k \qquad \text{(۱۱الف)}$$

که درآن $x_0,\ \ldots,\ x_n$ الزاماً هم‌فاصله نیستند و

$$l_0(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$l_k(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n),\ 0<k<n \qquad \text{(۱۱ب)}$$

$$l_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

فرمول (۱۱ الف) را **فرمول** $n+1$ **نقطه‌ای لاگرانژ** می‌نامند. بـه سادگی می‌بینیم کـه $L_n(x_k)=f_k$ زیرا بررسی (۱۱ ب) نشان می‌دهد که $l_k(x_j)=0$ وقتی‌که $j\neq k$ و $(l_k(x)/l_k(x_k))f_k=f_k$ وقتی کـه $x=x_k$. مزیت این روش آن است‌که نیازی بـه محاسبهٔ تفاضلها نیست واثر f_k های مختلف ساده‌ترمشاهده می‌شود، اما محاسبات‌آن‌ممکن است پرزحمت‌تر باشد واستفاده ازاین روش بایدمنحصر به‌جدولهای مطمئن شود. جدولهای ضرایب لاگرانژی $l_k(x)/l_k(x_k)$ به‌ازای مقادیرهم فاصله چاپ ومنتشر شده است؛ ر. ك. مرجع [[۱۲]، ضمیمهٔ ۱.

مثال ۳. کاربردی ازفرمول درون یابی لاگرانژ

با استفاده از (۱۱) ، با $n=3$ ، و با استفاده از مقادیر زیر ، $\ln 9{,}2$ را حساب کنید.

x	۹٫۰	۹٫۵	۱۰٫۰	۱۱٫۰
$\ln x$	۲٫۱۹۷۲۲	۲٫۲۵۱۲۹	۲٫۳۰۲۵۹	۲٫۳۹۷۹۰

داریم

$$l_0(x)=(x-۹٫۵)(x-۱۰)(x-۱۱),\quad l_1(x)=(x-۹)(x-۱۰)(x-۱۱)$$

وغیره، وحساب می‌کنیم

$$\ln ۹٫۲=\frac{-۰٫۴۳۲۰۰}{-۱٫۰۰۰۰۰۰}\times ۲٫۱۹۷۲۲+\frac{۰٫۲۸۸۰۰}{۰٫۳۷۵۰۰}\times ۲٫۲۵۱۲۹$$

$$+\frac{۰٫۱۰۸۰۰}{-۰٫۵۰۰۰۰۰}\times ۲٫۳۰۲۵۹+\frac{۰٫۰۴۸۰۰}{۳٫۰۰۰۰۰۰}\times ۲٫۳۹۷۹۰$$

$$=۲٫۲۱۹۲۰ \quad (\text{با دقت } 5D)$$ ▲

مسئلهٔ پیدا کردن x به‌ازای $f(x)$ داده شده را **درون یابی معکوس** می‌نامند. اگر f مشتق پذیر بوده و df/dx درنزدیکی نقطه‌ای که درون یابی معکوس، باید اثر داده شود صفر نباشد، $x=F(y)$ معکوس $y=f(x)$ به‌طور موضعی درنزدیکی مقدار داده‌شدهٔ f وجود دارد و گاه ممکن است بتوان F را در آن حدود با یك چندجمله‌ای از درجهٔ نسبتاً پایین تقریب زد. دراین صورت با قرار دادن F به صورت تابعی از y درجدول و به‌کاربردن روشهای درون یابی مستقیم F می‌توانیم درون یابی معکوس رااثردهیم. اگردر نزدیکی نقطهٔ مورد نظر ویادرخودآن $df/dx=0$، ممکن‌است حل $p(x)=\bar{f}$ با روش تکرار مفید واقع شود؛ دراینجا $p(x)$ چندجمله‌ایی است که $f(x)$ را تقریب می‌زند و $\bar{f}$ مقدار داده شده است.

مسائل بخش ۴.۱۹

۱. تحقیق کنیدکه سهمی (۲) از $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$ می‌گذرد.

۲. **با استفاده از مقادیرمندرج درجدول $\sin ۰٫۲۶$ را به‌کمك (۱)، یعنی با درون‌یابی خطی، پیدا کنید. نشان دهیدکه دو اعشار اول دقیقند ($\sin ۰٫۲۶=۰٫۲۵۷۰۸$).**

x	$\sin x$	تفاضل اول	تفاضل دوم
۰٫۰	۰٫۰۰۰۰۰۰		
		۱۹۸۶۷	
۰٫۲	۰٫۱۹۸۶۷		−۷۹۲
		۱۹۰۷۵	
۰٫۴	۰٫۳۸۹۴۲		−۱۵۵۳
		۱۷۵۲۲	
۰٫۶	۰٫۵۶۴۶۴		−۲۲۵۰
		۱۵۲۷۲	
۰٫۸	۰٫۷۱۷۳۶		−۲۸۶۱
		۱۲۴۱۱	
۱٫۰	۰٫۸۴۱۴۷		

مسائل ۲ تا ۷

۳. $\sin$ ۰٫۲۶ را بـا استفاده از (۲)، یعنی با درون یابی درجه دوم، پیدا کنید. نشان دهید که سه اعشار اول دقیقند.

۴. جدول داده شده را بسط دهید تـا شامل تفاضلهای سوم و چهارم هـم بشود. سپس $\sin$ ۰٫۲۶ را با استفاده از (۳) حساب کنید (الف) بـا $n =$ ۳، (ب) با $n =$ ۴. به‌کمك مقایسه بامقدار $5D$ ی $\sin$ ۰٫۲۶ = ۰٫۲۵۷۰۸، نتیجه‌بگیرید که (الف) سه اعشار اول، (ب) تمام ۵ اعشار دقیقند.

۵. فرمول درون یابی تفاضل پس روندهٔ (۶) را (الف) بـا $n =$ ۱، (ب) با $n =$ ۲، برای به‌دست آوردن $\sin$ ۰٫۲۶ به‌کاربیرید ونشان دهید که درهر دومورد دواعشار اول دقیقند. بنابراین نتیجه‌ای کـه از (ب) به‌دست می‌آید از نتیجهٔ مسئلهٔ ۳ ضعیفتر است. چرا؟

۶. برای محاسبهٔ $\sin$ ۰٫۲۶، جدول داده شده را طوری بسط دهید که بتوانید (۶) را با (الف) $n =$ ۳، (ب) $n =$ ۴، (پ) $n =$ ۵ به‌کار برید؛ نشان دهید که به $\sin x$ به ازای مقادیر $x =$ −۰٫۶, −۰٫۴, −۰٫۲, ۰, ۰٫۲ وبه‌تفاضلها نیازدارید. کدام خاصیت تابع سینوس این بسط را بسیار ساده می‌کند؟ سپس (۶) را به‌کاربرید و پیدا کنید (الـف) ۰٫۲۵۷۰۹، (ب) ۰٫۲۵۷۰۵، (پ) ۰٫۲۵۷۰۸ را (مقدار $5D$ دقیق). چرا نتایج ضعیفتر از نتیجهٔ مسئلهٔ ۴ هستند؟

۷. نشان دهید که فرمول اورت (۷) باکار نسبتاً کمی می‌دهد $\sin$ ۰٫۲۶ = ۰٫۲۵۷۰۷.

۸. محاسبات مثال ۲ را تحقیق کنید.

۹. $f(x)=\sqrt{x}$ را بااستفاده از $f($۲٫۰$)=$ ۱٫۴۱۴۲۱۴، $f($۲٫۳$)=$ ۱٫۵۱۶۵۷۵، $f($۲٫۶$)=$ ۱٫۶۱۲۴۵۲ با (۲) درون یابی درجه دوم کنید. نتیجه را با (۴)، بخش ۱۹.۳، مقایسه کنید.

۱۰. نشان دهید که

$$\Delta^k f_n = \binom{k}{0} f_{n+k} - \binom{k}{1} f_{n+k-1} + - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} f_n .$$

۱۱. $f($۳$)$ را با استفاده ازفرمول لاگرانژ (۱۱) و $f($۱$)=$ ۲، $f($۲$)=$ ۱۱، $f($۴$)=$ ۷۷ پیدا کنید.

۱۲. $\ln$ ۹٫۲ را بااستفاده از $\ln$ ۸٫۵ = ۲٫۱۴۰۰۷ و $\ln$ ۹٫۰، $\ln$ ۱۰ ی که درمثال ۳ داده شده‌اند محاسبه کنید (الف) بااستفاده از (۳) با $n =$ ۳ (و $x_0 =$ ۸٫۵)، (ب) بااستفاده از (۶) با $n =$ ۳ (و $x_0 =$ ۱۰).

۱۳. $\ln$ ۹٫۲ را بااستفاده از $\ln$ ۸٫۵ = ۲٫۱۴۰۰۷ و $\ln$ ۹، $\ln$ ۱۰، $\ln$ ۱۱ ی که‌در

مثال۳ داده شده‌اند و با به‌کاربردن (۱۱) با $n=۳$ محاسبه‌کنید و نتیجه را با نتیجهٔ مثال ۳ مقایسه‌کنید.

۱۴. $\ln ۹٫۲$ را بااستفاده از داده‌های مسئلهٔ ۱۲ محاسبه‌کنید (الف) به‌وسیلهٔ (۷)، (ب) به‌وسیلهٔ (۱۱) با $n=۳$.

۱۵. با فرض $x_۱=x_۰+h$ ، $x_۲=x_۰+۲h$ ، $x_۳=x_۰+۳h$ و با استفاده از $r=(x-x_۰)/h$ ، نشان‌دهید که (۱۱) با $n=۳$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)\approx-\binom{r-۱}{۳}f_۰+\frac{r(r-۲)(r-۳)}{۲}f_۱-\frac{r(r-۱)(r-۳)}{۲}f_۲$$

$$+\binom{r}{۳}f_۳.$$

۱۶. با به‌کاربردن فرمول مسئلهٔ (۱۵)، نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۴ب را کنترل کنید.

۱۷. (**کنترل تفاضلها**) نشان دهید که مجموع تفاضلهای هرستون برابراست باتفاضل بین اولین وآخرین نظریهٔ ستون قبل ازآن . این‌کنترل جزئی را درمورد جدول ۲.۱۹ ی بخش ۳.۱۹ اعمال کنید.

۵.۱۹ اسپلاین

تقریب اسپلاین تقریب چندجمله‌ای تکه‌ای است ، بدین معنی کــه تابعی مانند $f(x)$ در فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ داده شده وما می‌خواهیم $f(x)$ را درآن فاصله با تابع $g(x)$ که به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید تقریب بزنیم. $a\leqslant x\leqslant b$ را پارش می‌کنیم، یعنی آن را به زیرفاصله‌های بانقاط انتهایی مشترك (به نام گره‌ها) تقسیم می‌کنیم:

$$a=x_۰<x_۱<\cdots<x_n=b \qquad (۱)$$

حالا لازم است کــه دراین فاصله‌ها $g(x)$ به صورت چندجمله‌ای داده شده باشد؛ یعنی به‌ازای هر زیرفاصله یــك چندجمله‌ای متظورشود، به طوری که درنقاط انتهایی ، $g(x)$ چندبار مشتق‌پذیر بــاشد . ازاین‌رو به‌جای تقریب زدن $f(x)$ با یك چند جمله‌ای در تمام فــاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ ، آن را با n چند جمله‌ای تقریب می‌زنیم . بــا این روش توابع تقریب زن $g(x)$ را به‌دست می‌آوریــم کــه برای بسیاری ازمسائل تقریب و درون یابی مناسب هستند. مثلا ، ممکن است نوسان این توابع بین‌گره‌ها کمتر از یك چندجمله‌ای بر روی $a\leqslant x\leqslant b$ باشد . توابع $g(x)$ راکــه بدین طریق بــه دست می‌آیند **اسپلاین**

می‌نامند. این اسم ازمیلهٔ نازکی به‌نام اسپلاین کـه مهندسین به‌منظور برازاندن منحنی به نقاط داده شده‌ای به‌کار می‌برند گـرفته شده است. چون اسپلاینها از اهمیت عملی روبه تزایدی برخوردارند، دراینجا برای آشنایی باآنها بحثی داریم.

ساده‌ترین تقریب چندجمله‌ای تکه‌ای پیوسته مربوط به توابع خطی تکه‌ای‌است. اما چنین توابعی درنقاط انتهایی مشتق‌پذیر نیستند و به‌همین دلیل بهتراست توابعی به‌کار بریم‌که در همه‌جای فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ تعداد معینی مشتق داشته باشند.

ما اسپلاینهای مکعبی را بررسی می‌کنیم کـه شاید از نقطه‌نظر عملی مهمترین نوع باشند. بنا به تعریف، **اسپلاین مکعبی** $g(x)$ برروی $a \leqslant x \leqslant b$، و متناظر بـا پارش (۱)، تابع پیوستهٔ $g(x)$ است کـه در همه جای فاصلهٔ مورد نظر و هر زیرفاصلهٔ پارش، مشتق مرتبه اول و دوم داشته باشد و بـا چندجمله‌ای کـه درجهٔ آن نابزرگتر از سه است نمایش داده شود. ازاین رو $g(x)$ تشکیل شده ازچند جمله‌ایهای درجه سومی که هرکدام دریك زیرفاصله قرار دارند.

اگر $f(x)$ روی $a \leqslant x \leqslant b$ داده شده باشد وپارش (۱) انتخاب شود،اسپلاین مکعبی $g(x)$ را طوری به‌دست‌می‌آوریم‌که $f(x)$ را تقریب بزند و درضمن داشته‌باشیم

$$g(x_0)=f(x_0),\ g(x_1)=f(x_1),\ \cdots,\ g(x_n)=f(x_n) \qquad (۲)$$

واین چیزی است که درمسئلهٔ درون‌یابی کلاسیك بخش‌قبل دیدیم. ادعا می کنیم که اسپلاینی مکعبی مانند $g(x)$ وجود داردکه درشرایط (۲) صدق کند. همچنین اگربخواهیم که

$$g'(x_0)=k_0,\ g'(x_n)=k_n \qquad (۳)$$

(k_0 و k_n اعداد داده شده‌اند)، دراین صورت اسپلاینی مکعبی داریم‌که به‌طوریکتا معین شده است. این موضوع محتوای قضیهٔ وجود ویکتایی زیراست.

قضیهٔ ۱ (اسپلاین مکعبی)

فرض‌کنید $f(x)$ روی فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ تعریف شده باشد، وفرض کنید که پارشی بـه صورت (۱) ازآن فاصله داشته باشیم وk_0 و k_n دوعدد مفروض دلخواه باشند. دراین‌صورت یك و تنها یك اسپلاین مکعبی $g(x)$ متناظر با (۱) وجود داردکـه در (۲) و (۳) صدق می‌کند.

اثبات. بنابه‌تعریف روی هرزیرفاصلهٔ I_j که با $x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}$ داده می‌شود، اسپلاین $g(x)$ باید با چندجمله‌ای مکعبی $p_j(x)$ منطبق باشد به طوری که $p_j(x)$ دارای‌خواص زیر باشد:

$$p_j(x_j)=f(x_j),\ p_j(x_{j+1})=f(x_{j+1}) \qquad (۴)$$

می‌نویسیم $1/(x_{j+1}-x_j)=c_j$ و

$$p_j'(x_j)=k_j,\ p_j'(x_{j+1})=k_{j+1}, \tag{۵}$$

که در آن k_0 و k_n داده شده‌اند، و $k_1, \dots, k_{n-1}$ را بعداً تعیین می‌کنیم. (۴) و (۵) چهار شرط برای $p_j(x)$ هستند. با محاسبهٔ مستقیم می‌توانیم تحقیق کنیم که چندجمله‌ای مکعبی یکتای $p_j(x)$ که در (۴) و (۵) صدق کند عبارت است از

$$\begin{aligned} p_j(x)=&f(x_j)c_j^2(x-x_{j+1})^2[1+2c_j(x-x_j)]\\ &+f(x_{j+1})c_j^2(x-x_j)^2[1-2c_j(x-x_{j+1})]\\ &+k_jc_j^2(x-x_j)(x-x_{j+1})^2\\ &+k_{j+1}c_j^2(x-x_j)^2(x-x_{j+1}) \end{aligned} \tag{۶}$$

با دو بار مشتق‌گیری به دست می‌آوریم

$$p_j''(x_j)=-6c_j^2f(x_j)+6c_j^2f(x_{j+1})-4c_jk_j-2c_jk_{j+1} \tag{۷}$$

$$p_j''(x_{j+1})=6c_j^2f(x_j)-6c_j^2f(x_{j+1})+2c_jk_j+4c_jk_{j+1}. \tag{۸}$$

بنابه تعریف، $g(x)$ مشتق دوم پیوسته دارد. ازاینجا شرایط زیر به‌دست می‌آید:

$$p_{j-1}''(x_j)=p_j''(x_j) \qquad j=1, \dots, n-1$$

با استفاده از (۸)، وقتی که درآن به‌جای j قرار گیرد $j-1$، و با استفاده از (۷)، می‌بینیم که این $n-1$ معادله به‌صورت

$$c_{j-1}k_{j-1}+2(c_{j-1}+c_j)k_j+c_jk_{j+1}=3[c_{j-1}^2\nabla f_j+c_j^2\nabla f_{j+1}] \tag{۹}$$

درمی‌آید که درآن $\nabla f_j=f(x_j)-f(x_{j-1})$ و $\nabla f_{j+1}=f(x_{j+1})-f(x_j)$ و مثل سابق $j=1, \dots, n-1$. این دستگاه $n-1$ معادلهٔ خطی دارای جواب یکتای $k_1, \dots, k_{n-1}$ است، زیرا تمام ضرایب دستگاه غیرمنفی هستند، و هر عنصر واقع بر قطر اصلی بزرگتر ازمجموع عناصر دیگری است که در ردیف متناظر با آن قراردارند؛ بنابراین دترمینان ضرایب نمی‌تواند صفر باشد. از این رو می‌توان مقادیر یکتای $k_1, \dots, k_{n-1}$ مشتق اول $g(x)$ درگره‌ها را معین کرد. ▲

قضیه را باذکرمثال ساده‌ای روشن می‌کنیم.

مثال ۱. تقریب اسپلاین

$f(x)=x^4$ را در فاصلهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ با اسپلاین مکعبی $g(x)$، متناظر با پارش $x_0=-1$، $x_1=0$، $x_2=1$، که در (۲) و $g'(-1)=f'(-1),\ g'(1)=f'(1)$ صدق کند تقریب بزنید.

حل. باید ضرایب

$$p_0(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad (-1\leqslant x\leqslant 0)$$

$$p_1(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

را معین کنیم. از $p_0(0)=p_1(0)=f(0)=0$ داریم $a_0=b_0=0$. از $p_0'(0)=p_1'(0)$ به‌دست می‌آوریم $a_1=b_1$. از $p_0''(0)=p_1''(0)$ به‌دست می‌آوریم $a_2=b_2$. به طور کلی،

$$p_c(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x$$

$$p_1(x)=b_3x^3+a_2x^2+a_1x$$

اکنون می‌توانیم چهارضریب باقیمانده را ازچهارشرط باقیمانده به دست آوریم:

$$p_0(-1)=-a_3+a_2-a_1=f(-1)=1$$

$$p_1(1)=b_3+a_2+a_1=f(1)=1$$

(۱۰)

$$p_0'(-1)=3a_3-2a_2+a_1=f'(-1)=-4$$

$$p_1'(1)=3b_3+2a_2+a_1=f'(1)=4.$$

جوابها عبارتند از $a_1=0$، $a_2=-1$، $a_3=-2$، $b_3=2$. بدین ترتیب اسپلاین را به دست می‌آوریم (شکل ۳۵۱)

(۱۱)
$$g(x)\begin{cases}-2x^3-x^2 & \text{اگر } -1\leqslant x\leqslant 0\\ 2x^3-x^2 & \text{اگر } 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$
▲

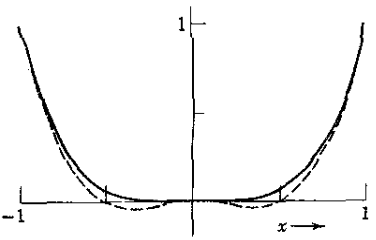
اسپلاینها خاصیت می‌نیمم جالبی دارندکه مااکنون آن را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید، درقضیهٔ ۱، $f(x)$ پیوسته بوده ودرفاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ مشتقات اول و دوم پیوسته داشته باشد. فرض کنیدکه (۳) به صورت

(۱۲)
$$g'(a)=f'(a),\ \ g'(b)=f'(b)$$

باشد (مانند مثال۱). دراین صورت $f'-g'$ در a و b صفراست. باانتگرالگیری جزء به جزء به‌دست می‌آوریم

$$\int_a^b g''(x)[f''(x)-g''(x)]dx=-\int_a^b g'''(x)[f'(x)-g'(x)]\,dx.$$

چون $g'''(x)$ درهر زیرفاصلهٔ پارش ثابت است، بامحاسبهٔ انتگرال سمت راست، روی



شکل ۳۵۱. تابع $f(x)=x^4$ و اسپلاین مکعبی $g(x)$ (نقطه چین)، مثال ۱

یك زیرفاصله، به دست می‌آوریم $[f(x)-g(x)]\times$(ثابت)، که مربوط به‌نقاط دوسر زیرفاصله است و بنابه (۲) صفر است. از این رو انتگرال سمت راست صفر است. این ثابت می‌کند که

$$\int_a^b f''(x)g''(x)\,dx=\int_a^b g''(x)^2\,dx\,.$$

درنتیجه،

$$\int_a^b [f''(x)-g''(x)]^2\,dx=\int_a^b f''(x)^2\,dx-2\int_a^b f''(x)g''(x)\,dx$$
$$+\int_a^b g''(x)^2dx=\int_a^b f''(x)^2\,dx-\int_a^b g''(x)^2\,dx\,.$$

انتگران سمت چپ غیر منفی است وانتگرال نیز چنین است. از این رو به نامساوی زیر می‌رسیم:

$$\int_a^b f''(x)^2\,dx \geqslant \int_a^b g''(x)^2\,dx\,. \qquad (۱۳)$$

نتیجه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ ۲ (خاصیت مینیمم اسپلاین مکعبی)

فرض‌کنید $f(x)$ پیوسته بوده و در فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ مشتقات اول ودوم پیوسته داشته‌باشد. فرض کنید $g(x)$ اسپلاین مکعبی متناظربا پارشی مانند (۱) از آن فاصله بوده و در (۲) و (۱۲) صدق کند. دراین صورت $f(x)$ و $g(x)$ در (۱۳) صدق می‌کنند، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $f(x)$ همان اسپلاین مکعبی $g(x)$ باشد.

همچنان که قبلاًمتذکرشدیم، مهندسین‌ازمیله‌های‌نازکی به‌نام اسپلاین برای برازاندن منحنی به نقاط داده شده استفاده می‌کنند و انرژی کششیی کــه با این اسپلاینها به حداقل می‌رسد تقریباًمتناسب‌است باانتگرال مربع‌مشتق‌دوم‌اسپلاین. بنابراین نامساوی(۱۳)استفاده

از اصطلاح اسپلاین درمورد توابع $g(x)$ راکه دراین بخش‌موردبحث‌قرار گرفتند توجیه می کند.

مسائل بخش ۵.۱۹

۱. تحقیق‌کنید $p_j(x)$ ی که درشمارهٔ (۶) داده شده در (۴) و (۵) صدق می کند.

۲. (۷) و (۸) را از (۶) نتیجه بگیرید.

۳. مثال ۱ را درنظر بگیرید. نشان دهیدکه تحت شرایط بیان شده درمثال، فرمول (۶) می‌دهد

$$p_{0}(x) = -2x^{3} - x^{2} + k_{1}x(x+1)^{2}$$

$$p_{1}(x) = \quad 2x^{3} - x^{2} + k_{1}x(x-1)^{2}$$

و (۹) می‌دهد $k_1 = 0$، وبنابراین (۱۱) به دست می آید.

۴. اسپلاین $g(x)$ ، مثال ۱، را با چندجمله‌ای درون یابی درجه دوم $p(x)$ درتمام‌فاصله مقایسه کنید. ماکزیمم انحراف $g(x)$ و $p(x)$ از $f(x)$ چقدر است؟ تفسیر کنید.

۵. مراحل مختلف به‌دست‌آوردن (۱۰) را به‌تفصیل شرح دهید.

۶. نشان دهید اسپلاین مکعبی متناظر با پارش داده شدهٔ یك فاصلهٔ مفروض تشکیل‌فضای برداری می‌دهد (ر. ك. بخش ۴.۶).

۷. نشان دهید به‌ازای پارش‌داده‌شده‌ای که به‌صورت (۱) است، $n+1$ اسپلاین مکعبی یکتای $g_0(x), \ldots, g_n(x)$ وجود دارد به‌طوری که $g_j'(a) = g_j'(b) = 0$ و

$$g_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

۸. هرگاه یـك اسپلاین مکعبی سه بارمشتق پذیر، با مشتقات پیوسته، باشد (یعنی دارای مشتقات اول، دوم و سوم پیوسته باشد)، نشان دهیدکه اسپلاین مکعبی باید یك چند جمله‌ای باشد.

۹. بعضی‌اوقات یك‌اسپلاین در زیرفاصله‌های مجاور $a \leqslant x \leqslant b$ با یك چند جمله‌ای نمایش داده می‌شود. برای روشن شدن این موضوع، اسپلاین مکعبی $g(x)$ را برای $f(x) = \sin x$ بـا پـارش $x_0 = -\pi/2$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = \pi/2$ در فـاصلهٔ $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ پیداکنید به طوری‌که در $g'(-\pi/2) = f'(-\pi/2)$ ،

صدق کند. $g'(\pi/۲)=f'(\pi/۲)$

۱۰. یك تعبیرهندسی ممکن برای (۱۳) این است که تابع اسپلاین مکعبی ، انتگرال‌مربع انحنا را ، مینیمم می‌کند یا لااقل تقریباً منیمم می‌کند توضیح دهید.

۶.۱۹ انتگرالگیری و مشتق‌گیری عددی

مسئلهٔ **انتگرالگیری عددی** محاسبهٔ عددی انتگرال معین

$$J=\int_a^b f(x)\,dx$$

است‌که a و b داده شده‌اند و f تابعی است‌که یا به‌طور تحلیلی بایك فرمول ویا به‌طور تجربی باجدولی از اعداد مشخص شده است.

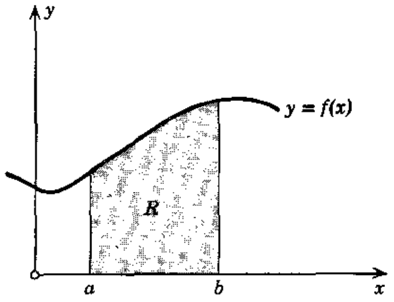
همان طور که می‌دانیم ، اگر f طوری باشدکه بتوانیم تابع مشتق‌پذیری مانند F پیداکنیم‌که مشتق آن f باشد، دراین صورت با به‌کاربردن فرمول آشنای

$$J=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \qquad [F'(x)=f(x)],$$

می‌توانیم J را حساب‌کنیم ؛ جدولهای انتگرالی نظیر آنچه درمرجع [J۳]، ضمیمهٔ ۱، آمده ممکن است برای یافتن انتگرال موردنظر مفید واقع شوند.

باوجود این، درکاربردهای مهندسی غالباً به‌انتگرالهایی برمی‌خوریم که‌انتگرانشان تابعی است تجربی کـه با یك جدول داده شده یاطوری است کـه انتگرال را نمی‌توان برحسب تعدادی متناهی تابع مقدماتی نمایش داد (مثالهای ضمیمهٔ۳) و یا شکل صریح F پیچیده بوده و زیاد مفید نیست.در این صورت می‌توان از یك روش عددی انتگرالگیری تقریبی استفاده‌کرد.

ازآنجاکه J برابراست بامساحت ناحیهٔ R که زیرمنحنی $f(x)$ بین a و b واقع است (ر. ك. شکل ۳۵۲)، مقدار تقریبی J را می‌توان با بریدن مقوایی به‌شکل R، تعیین



شکل ۳۵۲. تعبیرهندسی انتگرال معین

وزن آن وتقسیم این وزن بر وزن واحد مساحت مربع به دست آورد. روش سادهٔ دیگر رسم R برروی کاغذ میلیمتری و شمردن مربعهاست. بـا استفاده از **مساحت سنج**، که اصول و کاربردهای آن درمرجع [G ۲۰]، ضمیمهٔ ۱، تشریح شده است، می توان نتایج دقیقتری به‌دست آورد.

روشهای انتگرالگیری عددی را می‌تـوان با تقریب زدن انتگران f توسط چند-جمله‌ایها به دست آورد. برای رسیدن بـه‌ساده‌ترین فرمول، فاصلهٔ انتگرالگیری را به n زیرفاصلهٔ مساوی به‌طول $h=(b-a)/n$ تقسیم کرده و f را درهریك ازاین فاصله‌ها با تابع ثابت $f(x_j^*)$،که x_j^* نقطهٔ میانی فاصله است، تقریب می‌زنیم (ر. ك. شکل ۳۵۳). دراین صورت f بایك **تابع پله‌ای** (تابع ثابت تکه‌ای) تقریب زده می‌شود، n مستطیل شکل ۳۵۳ دارای مساحتهای $f(x_1^*)h, \ldots, f(x_n^*)h$ هستند، و **قاعدهٔ مستطیلی** زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$(1)\quad J=\int_a^b f(x)\,dx \approx h[f(x_1^*)+f(x_2^*)+\cdots+f(x_n^*)]\left(h=\frac{b-a}{n}\right).$$

اگر f را بایك تابع خطی تکه‌ای (چندضلعی حاصل از وترهای منحنی f، ر.ك. شکل ۳۵۴) تقریب بزنیم، **قاعدهٔ ذوزنقه‌ای** زیر به‌دست می‌آید:

$$(2)\quad J=\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}f(b)\right],$$

که در آن $h=(b-a)/n$، و $x_0(=a), x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n(=b)$ نقاط انتهایی فاصله‌های موجود در (۱) هستند؛ ازاین رو $x_j=x_0+jh$. درواقع، n ذوزنقهٔ شکل ۳۵۴ دارای مساحتهای

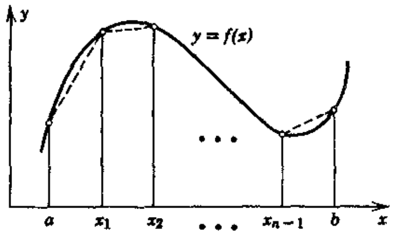
$$\frac{1}{2}[f(a)+f(x_1)]h,\ \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]h,\ \ldots,\ \frac{1}{2}[f(x_{n-1})+f(b)]h$$

هستند و مجموع J^* آنها برابر سمت راست (۲) است.

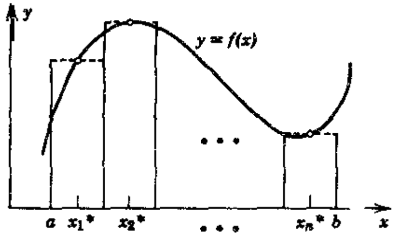
خطای ε مربوط به J^* (ر. ك. بخش ۱.۱۹) برابراست با

$$\varepsilon=J^*-J.$$

اگر $f(x)$ تابعی خطی باشد، آنگاه $\varepsilon=0$. دراین حالت f' ثابت بوده و f'' به‌ازای تمام xها صفراست وموجه به‌نظر می‌رسدکه بتوانیم برای تابع کلی f (کـه مشتق دوم پیوسته دارد) **کرانهای خطایی** (کرانهایی برای ε) به‌دست‌آوریم که شامل f'' باشند. برای نیل به‌این منظور، b را با متغیر t جایگزین می کنیم و (۲) را، بـا $n=1$، به‌کار



شکل ۳۵۴. قاعدهٔ ذوزنقه‌ای



شکل ۳۵۳. قاعدهٔ مستطیلی

می‌بریم. دراین صورت خطای متناظر برابراست با

$$\varepsilon(t)=\frac{t-a}{۲}[f(a)+f(t)]-\int_a^t f(x)\,dx\,.$$

یادآوری می‌کنیم $\varepsilon(a)=۰$، که بدیهی است. با مشتق‌گیری داریم

$$\varepsilon'(t)=\frac{۱}{۲}[f(a)+f(t)]+\frac{t-a}{۲}f'(t)-f(t)\,.$$

می‌بینیم که $\varepsilon'(a)=۰$. مشتق‌گیری مجدد نشان می‌دهد که

$$\varepsilon''(t)=\frac{۱}{۲}\,(t-a)f''(t)$$

و کسرانهای ε'' را با جایگزین‌کردن کوچکترین و بزرگترین مقدار f'' در فاصلهٔ $a\leqslant t\leqslant b$ به‌جای f'' به‌دست می‌آوریم. اگراین مقادیررا به‌ترتیب با $M_۲^*$ و $M_۲$ نشان دهیم وتوجه داشته باشیم که $t-a\geqslant ۰$، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۲}(t-a)M_۲^*\leqslant\varepsilon''(t)\leqslant\frac{۱}{۲}(t-a)M_۲$$

که به‌ازای تمام t های واقع در فاصلهٔ مورد نظر صادق است. با انتگرالگیری از a تا t داریم

$$\frac{۱}{۴}(t-a)^۲M_۲^*\leqslant\varepsilon'(t)-\varepsilon'(a)\leqslant\frac{۱}{۴}(t-a)^۲M_۲$$

با استفاده از $\varepsilon'(a)=۰$، $\varepsilon(a)=۰$، انتگرالگیری مجدد، و با قراردادن $t=a+h$ می‌بینیم که

$$\frac{۱}{۱۲}h^۳M_۲^*\leqslant\varepsilon(a+h)\leqslant\frac{۱}{۱۲}h^۳M_۲$$

به‌ازای خطاهای متناظر با $n-1$ زیرفاصلهٔ باقی مانده، $n-1$ نامساوی مشابه به‌دست می‌آوردیم، ومجموع n نامساوی، نامساوی مربوط به‌خطای ε راکه با انتگرالگیری از a تا b متناظراست نتیجه می‌دهد؛ چون $h=(b-a)/n$، به‌دست می‌آوریم

$$KM_2^* \leqslant \varepsilon \leqslant KM_2 \quad \text{که درآن} \quad K=\frac{(b-a)^3}{12n^2} \qquad (3)$$

و M_2^* و M_2 کوچکترین و بزرگترین مقدار مشتق دوم f در فاصلهٔ انتگرالگیری هستند.

مثال ۱. قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، برآورد خطا

$J=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ را با استفاده از (۲)، با $n=10$، محاسبه وخطا را برآوردکنید. از جدول ۵.۱۹ می‌بینیم که

$$J \approx 0.1(0.5 \times 1.367879 + 6.778167) = 0.746211.$$

چون $f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$، داریم $M_2^*=f''(0)=-2$، $M_2=f''(1)=0.735759$. ازاین گذشته $K=1/1200$ و (۳) می‌دهد

$$-0.001667 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.000614$$

بنابراین مقدار واقعی J باید بین دومقدار زیر باشد:

$$0.746211 - 0.000614 = 0.745597$$

و

$$0.746211 + 0.001667 = 0.747878.$$

(در واقع $J=0.746824$، بادقت $6D$.) ▲

تقریب ثابت تکه‌ای f به‌قاعدهٔ مستطیلی (۱) و تقریب خطی تکه‌ای به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای (۲) منجرمی‌شوند وتقریب درجه دوم تکه‌ای به‌قاعدهٔ سیمپسون که درعمل از اهمیت زیادی برخوردار است زیرا علاوه براینکه درمورد بیشتر مسائل دقت کافی دارد نسبتاً ساده است. برای به دست آوردن این فرمول، فاصلهٔ انتگرالگیری $a \leqslant x \leqslant b$ را به‌تعداد **زوجی** زیرفاصلهٔ مساوی، مثلا $2n$ زیرفاصله به‌طول $h=(b-a)/2n$، با نقطهٔ انتهایی $x_0(=a),\ x_1,\ \cdots,\ x_{2n-1},\ x_{2n}(=b)$ تقسیم می‌کنیم. دو زیر فاصلهٔ اول را درنظر می‌گیریم و $f(x)$ را دربازهٔ $x_0 \leqslant x \leqslant x_2 = x_0 + 2h$ باچند جمله‌ای لاگرانژ $p_2(x)$ تقریب می‌زنیم به طوری که چندجمله‌ای از (x_0, f_0)، (x_1, f_1)، (x_2, f_2) بگذرد، $f_j = f(x_j)$. از (۱۱ الف)، بخش ۴.۱۹، به‌دست می‌آوریم

جدول ۵۰۱۹

محاسبات مثال ۱

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$	
۰	۰	۰	۱٫۰۰۰۰۰۰۰	
۱	۰٫۱	۰٫۰۱		۰٫۹۹۰۰۵۰
۲	۰٫۲	۰٫۰۴		۰٫۹۶۰۷۸۹
۳	۰٫۳	۰٫۰۹		۰٫۹۱۳۹۳۱
۴	۰٫۴	۰٫۱۶		۰٫۸۵۲۱۴۴
۵	۰٫۵	۰٫۲۵		۰٫۷۷۸۸۰۱
۶	۰٫۶	۰٫۳۶		۰٫۶۹۷۶۷۶
۷	۰٫۷	۰٫۴۹		۰٫۶۱۲۶۲۶
۸	۰٫۸	۰٫۶۴		۰٫۵۲۷۲۹۲
۹	۰٫۹	۰٫۸۱		۰٫۴۴۴۸۵۸
۱۰	۱٫۰	۱٫۰۰	۰٫۳۶۷۸۷۹	
		مجموعها	۱٫۳۶۷۸۷۹	۶٫۷۷۸۱۶۷

$$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2 \cdot \qquad (4^*)$$

مخرج کسرها به‌ترتیب عبارتند از $2h^2$، $-h^2$، و $2h^2$. باقراردادن $s=(x-x_1)/h$، داریم $x-x_0=(s+1)h$، $x-x_1=sh$، $x-x_2=(s-1)h$، و

$$p_2(x)=\frac{1}{2}s(s-1)f_0-(s+1)(s-1)f_1+\frac{1}{2}(s+1)sf_2.$$

حال نسبت به x از x_0 تا x_2 انتگرال می گیریم. این کار متناظر است با انتگرالگیری نسبت بـه s از ۱ − تا ۱ +. چون $dx=h\,ds$، نتیجهٔ این انتگرالگیری ساده عبارت است از

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,dx = h\left(\frac{1}{3}f_0+\frac{4}{3}f_1+\frac{1}{3}f_2\right)$$

درمورد دوزیرفاصلهٔ بعدی از x_2 تا x_4 فرمول مشابهی صادق است وبه‌همین ترتیب. با جمع کردن تمام این n فرمول **قاعدهٔ سیمپسون** را به‌دست می‌آوریم

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\cdots+ 2f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}), \qquad (4)$$

که درآن $h=(b-a)/2n$ و $f_j=f(x_j)$. کرانهای خطای ε_S، در (۴)، رامی‌توان با روشی مشابه قاعدهٔ ذوزنقه‌ای (۲)، بافرض اینکه مشتق چهارم f وجود داشته و درفاصلهٔ انتگرالگیری پیوسته است، به‌دست‌آورد. نتیجه عبارت است از

$$CM_4^* \leqslant \varepsilon_S \leqslant CM_4 \quad \text{که درآن} \quad C=\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \qquad (5)$$

و M_4^* و M_4 کوچکترین و بزرگترین مقدار مشتق چهارم f در فـاصلهٔ انتگرالگیری هستند. بدیهی‌است که درموردچندجمله‌ای درجه دو f داریم $\varepsilon_S=0$، اما (۵) نشان‌می‌دهد که حتی درمورد چندجمله‌ای درجه سه نیز $\varepsilon_S=0$.

مثال ۲. قاعدهٔ سیمپسون. برآورد خطا

$J=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ را باقاعدهٔ سیمپسون و $2n=10$ حساب کرده و خطا را برآورد کنید. چون $h=0.1$، جدول ۶.۱۹ می‌دهد

$$J\approx\frac{0.1}{3}(1.367879+4\times 3.740266+2\times 3.037901)=0.746825$$

برآورد خطا. مشتق گیری نشان می‌دهد که $f^{IV}(x)=4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$. بـا تـوجه به مشتق f^{V} درمی‌یابیم کـه کمترین مقدار f^{IV}، درفاصلهٔ انتگـرالگیری، در $x=x^*=2.5+0.5\sqrt{10}$ و بزرگترین مقدار آن در $x=0$ است. محاسبه نتیجه می‌دهد $M_4^*=f^{IV}(x^*)=-7.359$ و $M_4=f^{IV}(0)=12$. چون $2n=10$ و

$b-a=$ ۱، مقدار $C=$ ۱/۱۸۰۰۰۰۰ = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۵۶ را بـه دست می‌آوریم. بنابراین

$$۰٫۰۰۰۰۰۰۶ \leqslant \varepsilon_s \leqslant ۰٫۰۰۰۰۰۰۴ \text{ و } ۰٫۷۴۶۸۳۰ \geqslant J \geqslant ۰٫۷۴۶۸۱۸،$$

دقت تقریب حداقل ۴D است. در واقع دقت ۰٫۷۴۶۸۲۵ تـا ۵D است، زیـرا $J=$ ۰٫۷۴۶۸۲۴ (تا ۶D دقیق است).

توجه کنید که این نتیجه از نتیجهٔ مثال ۱، که قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به‌دست آمد، خیلی بهتراست درحالی‌که‌کار بیشتری نبرده است. ▲

قاعدهٔ سیمپسون برای بیشتر کارهای مهندسی به‌اندازهٔ‌کافی دقیق است، ودرمحاسبات

جدول ۶.۱۹

محاسبات مثال ۲

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$		
۰	۰	۰	۱٫۰۰۰۰۰۰۰		
۱	۰٫۱	۰٫۰۱		۰٫۹۹۰۰۵۰	
۲	۰٫۲	۰٫۰۴			۰٫۹۶۰۷۸۹
۳	۰٫۳	۰٫۰۹		۰٫۹۱۳۹۳۱	
۴	۰٫۴	۰٫۱۶			۰٫۸۵۲۱۴۴
۵	۰٫۵	۰٫۲۵		۰٫۷۷۸۸۰۱	
۶	۰٫۶	۰٫۳۶			۰٫۶۹۷۶۷۶
۷	۰٫۸	۰٫۴۹		۰٫۶۱۲۶۲۶	
۸	۰٫۷	۰٫۶۴			۰٫۵۲۷۲۹۲
۹	۰٫۹	۰٫۸۱		۰٫۴۴۴۸۵۸	
۱۰	۱٫۰	۱٫۰۰	۰٫۳۶۷۸۷۹		
مجموعها			۱٫۳۶۷۸۷۹	۳٫۷۴۰۲۶۶	۳٫۰۲۷۹۰۱

اتوماتیك این قاعده از بیشتر فرمولهای پیچیده که دقت بالاتری دارند و با استفاده از تقریبهای چندجمله‌ای با درجات بالاتر به‌دست می‌آیند، ترجیح دارد. در اینجا دو نمونه از فرمولهای با دقت بالاتر را که گاهی مفیدند ذکر می‌کنیم. چندجمله‌ای درجه‌سه‌ای که از (x_0, f_0)، ...، (x_3, f_3) می‌گذرد به **قاعدهٔ سه ـ هشت** منجر می‌شود:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3) \tag{6}$$

که در مورد چندجمله‌ایهای درجه سوم دقیق است (همانند قاعدهٔ سیمپسون) و این مزیت را دارد که درمورد زیر فاصله‌های با تعداد فرد (بخش پذیر بر ۳) نیز قابل اعمال است. چندجمله‌ای درجه ششی که از نقاط $(x_0, f_0), \ldots, (x_6, f_6)$ می‌گذرد به فرمولی با ضرایب پیچیده‌تر منجر می‌شود، اما فرمولی از این نوع که به مراتب ساده‌تر است ودقتش کمی کمتر، عبارت است از **قاعدهٔ ودل***

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{10}(f_0+5f_1+f_2+6f_3+f_4+5f_5+f_6). \tag{7}$$

فرمولهای انتگرالگیری موردبحث مقادیر تابع به‌ازای مقادیر x متساوی‌الفاصله را دربردارند ونتایج‌دقیق‌را به‌ازای چندجمله‌ایهایی می‌دهند که درجهٔ آنها از مقدار مشخصی تجاوز نکند. کلیتر می‌توان نوشت

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f_j \qquad [f_j=f(x_j)] \tag{8}$$

(باانتخاب $a=-1$ و $b=1$، که باتبدیل خطی مقیاس انجام پذیر است) و $2n$ ثابت $A_1, \ldots, A_n$، $x_1, \ldots, x_n$ راطوری تعیین کردکه (۸) در مورد چندجمله‌ایهای درجه mی که هرچه ممکن است درجه‌شان بالا باشد نتایج دقیق دهد. چون $2n$ تعداد ضرایب یك چندجمله‌ای درجه $2n-1$ است، نتیجه می‌شود که $m \leqslant 2n-1$. گاوس نشان داده است که دقیق بودن چندجمله‌ای درجه $2n-1$ برقرار می‌شود اگر و تنها اگر $x_1, \ldots, x_n$ عبارت باشند از n صفر **چندجمله‌ای لژاندر** درجه n (ر. ك. همچنین بخش ۳.۴) زیر:

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n-\frac{(2n-2)!}{2^n\times 1!(n-1)!(n-2)!}x^{n-2}$$
$$+\frac{(2n-4)!}{2^n\times 2!(n-2)!(n-4)!}x^{n-4}-+\cdots,$$

یعنی

$$P_0=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\ \ldots,$$

---

* Weddle's rule

ضرایب A_j نیز به طورمناسبی انتخاب شده‌اند. دراین صورت (۸) را **فرمول انتگرالگیری گاوسی** می‌نامند. مزیت این فرمول دقت زیاد و عیب آن نامنظم بودن فواصل x_n ، . . . ، x_1 است. بنابراین چنین فرمولی وقتی عملی است که ازکامپیوترهای‌اتوماتیک استفاده شود ومحاسبهٔ $f(x_j)$ به‌تعداد اعشار شناسه بستگی نداشته باشد، یا اینکه $f(x_j)$ ازآزمایشی به دست آمده باشدکه در آن بتوان x_j را یك بار برای همیشه انتخاب کرد. استفاده ازاین فرمول در مواردی‌که انتگران در فاصله‌های مساوی داده شده باشد عملی نیست، زیرا درچنین حالتی برای محاسبهٔ $f(x_j)$ یك سلسله درون یابیهای مقدماتی لازم است و این ممکن است نتایج مربوط به برآوردهای خطای کوچکتر را تحت‌الشعاع قرار دهد.

چون نقاط، ۱ــ و ۱+، نقاط انتهایی فاصلهٔ انتگرالگیری (۸)، صفرهای P_n نیستند جزو نقاط x_n ، . . . ، x_1 نخواهند بود، وبنابراین فرمول‌گاوس (۸) را **فرمول‌باز** می‌نامند، درمقابل **فرمول بسته** که درآن نقاط انتهایی فاصلهٔ انتگرالگیری پیش می‌آیند. [مثلا، (۲)، (۴)، (۶) و (۷) بسته‌اند.]

یادآوری می‌کنیم که همانند مورد درون یابی، روشهای انتگرالگیری عددیی‌وجود دارندکه براساس تفاضلها قرارگرفته‌اند. روش بسیار مؤثری هست که درآن از **فرمول تفاضل‌مرکزی گاوس** استفاده می‌شود:

$$(۹)\quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0+f_1-\frac{\delta^2 f_0+\delta^2 f_1}{12}+\frac{11(\delta^4 f_0+\delta^4 f_1)}{720}\right).$$

برای توضیحات بیشترمراجع [G۱۳]، [G۱۶] و [G۱۷] ضمیمهٔ ۱ را ببینید.

مشتق‌گیری عددی

مسئلهٔ **مشتق‌گیری عددی** چیزی نیست جز تعیین مقادیرتقریبی مشتق تابع f ی‌که با جدولی داده شده است. تا جایی‌که امکان دارد باید ازمشتق گیری عددی اجتناب کردزیرا دقت مقادیر تقریبی مشتقها درحالت کلی، کمتر از مقادیر توابعی است که از آنها مشتق گرفته‌ایم. در واقع، مشتق حد خارج قسمت تفاضلها است به این معنی‌که معمولا دو عدد بزرگ را ازهم کم کرده، تفاضل را به‌عددکوچکی تقسیم می‌کنیم؛ به‌علاوه اگریك تابع دادهٔ شدهٔ f را بایك چندجمله‌ای p تقریب بزنیم، ممکن است تفاوت مقادیرتابع کوچك باشد امامشتقها تفاوت زیادی داشته باشند. ازاین‌رو مشتق‌گیری عددی‌کاری حساس است، درحالی که انتگرالگیری عددی چنین‌نیست وعدم دقت درمقادیر تابع درآن تأثیر چندانی ندارد زیرا انتگرالگیری ذاتاً فرآیندی هموار است.

نماد گذاری $f_j'=f'(x_j)$، $f_j''=f''(x_j)$، وغیره، را به‌کارمی‌بریم وفرمولهایی تقریبی برای مشتقها باتوجه به‌رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

درنتیجه داریم

$$f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h} \tag{10}$$

به گونه‌ای مشابه، درمورد مشتق دوم به دست می‌آوریم

$$f_1'' \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} \tag{11}$$

و به همین ترتیب.

تقریبهای دقیقتر بامشتق‌گیری ازچند جمله‌ایهای لاگرانژ مناسب به‌دست می‌آیند. بامشتق گیری از (۴*) وباتوجه به‌اینکه مخرج کسرهای موجود در (۴*) عبارتند از $2h^2$، $-h^2$، $2h^2$ داریم

$$f'(x) \approx p_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2$$

بامحاسبهٔ این مقدار در x_0، x_1، x_2 «فرمولهای سه نقطه‌ای» به‌دست می‌آیند:

(الف) $$f_0' \approx \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)$$

(ب) $$f_1' \approx \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2) \tag{12}$$

(پ) $$f_2' \approx \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2).$$

اعمال همین شیوه درمورد فرمول پنج ـ نقطه‌ای لاگرانژ، فرمولهای مشابهی به دست می‌دهد، به‌ویژه داریم

$$f_2' \approx \frac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4). \tag{13}$$

تفصیل مطلب وچند فرمول دیگر را می‌توان درمرجع [G6]، ضمیمه ۱، یافت.

مسائل بخش ۱۹.۶

بعضی از فرمولها و روشهای انتگرالگیری را با محاسبهٔ انتگرالهای زیر مرور کنید

۱. $\int \sin^2 x\, dx$ ۲. $\int \cos^2 \omega x\, dx$ ۳. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$

۴. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ ۵. $\int \tan kx\,dx$ ۶. $\int \ln x\,dx$

۷. $\int \frac{dx}{k^۲+x^۲}$ ۸. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^۲-x^۲}}$ ۹. $\int \frac{dx}{x^۲(x^۲+۱)^۲}$

۱۰. انتگرال مثال ۱ را با استفاده از (۱)، به‌ازای $n=۵$، محاسبه‌کنید.

۱۱. $\int_۰^۱ x^۳\,dx$ را با قاعدهٔ مستطیلی (۱)، به‌ازای $n=۵$، محاسبه‌کنید. خطا را تعیین کنید.

۱۲. انتگرال ذکرشده درمسئلهٔ ۱۱ را بااستفاده ازقاعدهٔ ذوزنقه‌ای (۲)، به ازای $n=۵$ محاسبه‌کنید. چه‌کرانهای خطایی از(۳) به‌دست می‌آید؟ خطای واقعی نتیجه‌چیست؟ چرا این نتیجه ازمقدار واقعی بزرگتر است؟

۱۳. مقدار تقریبی $\ln ۲ = \int_۱^۲ \frac{dx}{x}$ را با قاعدهٔ سیمپسون وبه‌ازای $۲n=۴$ پیداکنید. با استفاده از (۵) خطا را برآوردکنید.

۱۴. $\int_۰^۱ x^۵\,dx$ را با قاعدهٔ سیمپسون و به‌ازای $۲n=۱۰$ محاسبه‌کنید.کرانهای خطایی که از (۵) به‌دست می‌آیندکدامند؟ خطای واقعی نتیجه چقدراست؟

درمسائل زیر با استفاده از مقادیر $\sin x$ کــه درجدول $A۱$، ضمیمهٔ ۴، داده شده است $\int_۰^۱ \frac{\sin x}{x}dx$ را حساب‌کنید.

۱۵. باقاعدهٔ مستطیلی (۱) به‌ازای $n=۵$.

۱۶. باقاعدهٔ ذوزنقه‌ای (۲) به‌ازای $n=۵$.

۱۷. با (۲) و $n=۱۰$.

۱۸. با قاعدهٔ سیمپسون و $۲n=۲$ و $۲n=۱۰$.

۱۹. α و β را طوری تعیین‌کنید که

$$\int_{x_n}^{x_{n+۱}} f(x)\,dx \approx h[\alpha f(x_n)+\beta f(x_{n+۱})] \qquad h=x_{n+۱}-x_n$$

به‌ازای چندجمله‌ایهای درجه اول دقیق باشد. چه‌فرمولی به‌دست می‌آورید؟

۲۰. اگر $f(x)$ یك چندجمله‌ای درجه دوباشد، نشان دهید کـه (۱۰) دقیق است. از نظر هندسی این مسئله چه معنایی دارد؟

۲۱. (۱۲) را، با شرح جزئیات محاسبه، به دست آورید.

۲۲. (۱۳) را، به‌روشی که درمتن گفته شده است، به‌دست آورید.

۲۳. $f(x)=x^4$ را در $x_0=0$ ، $x_1=0.2$ ، $x_2=0.4$ ، $x_3=0.6$ ، $x_4=0.8$ درنظر بگیرید. f_2' را از (۱۲ الف)، (۱۲ ب) ، (۱۲ پ) و (۱۳) محاسبه کنید. خطاها را معین کنید. آنها را مقایسه کنید و توضیح دهید.

۲۴. یك «فرمول چهارنقطه‌ای» برای مشتق عبارت است از

$$f_2'\approx\frac{1}{6h}(-2f_1-3f_2+6f_3-f_4).$$

این فرمول‌را درمورد $f(x)=x^4$ ، با $x_1, \dots, x_4$ ی که درمسئلهٔ ۲۳داده شده‌اند به‌کار برید؛ خطا را تعیین کرده و آن را باخطایی که درمسئلهٔ (۱۳) به‌دست آمد مقایسه کنید.

۲۵. مشتق $f'(x)$ را می‌توان باتفاضل اول وتفاضلهای بالاتر تقریب زد:

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta f_0-\frac{1}{2}\Delta^2 f_0+\frac{1}{3}\Delta^3 f_0-\frac{1}{4}\Delta^4 f_0+-\cdots\right)$$

بامشتق گرفتن از (۳)، بخش ۴.۱۹، نسبت به r ویافتن فرمول زیر، رابطهٔ بالا را اثبات کنید:

$$hf'(x)\approx\Delta f_0+\frac{2r-1}{2!}\Delta^2 f_0+\frac{3r^2-6r+2}{3!}\Delta^3 f_0+\cdots,$$

دراینجا داریم $x=x_0+rh$ وقرارمی‌دهیم $r=0$. فرمول را برای به‌دست‌آوردن تقریبهایی برای $f'(0.4)$ درمسئلهٔ ۲۳ به‌کاربرید، ضمن اینکه از تفاضلها تا (الف) مرتبهٔ اول، (ب) مرتبهٔ دوم، (ج) مرتبهٔ سوم، (د) مرتبهٔ چهارم وخود این مرتبه‌ها استفاده می‌کنید.

۷.۱۹ روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

این بخش از سایر بخشهای فصل ۲۹ مستقل است و می‌توان آن را بلافاصله بعد از فصل ۱ مطالعه‌کرد.

از فصل ۱ می‌دانیم که هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به‌صورت $F(x,y,y')=0$ است و اغلب می‌توان آن را به صورت صریح $y'=f(x, y)$ نوشت. هر **مسئلهٔ مقدار اولیه** شامل یك معادلهٔ دیفرانسیل است و شرطی که جواب باید در آن صدق کند (ودرصورتی

که معادله ازمرتبه‌های بالاترباشد، جواب به‌ازای یک مقدار x باید درچند شرط صدق کند). دراین بخش مسائل مقدار اولیه‌ای را بررسی می‌کنیم که به‌صورت زیرند:

$$y'=f(x,\ y),\ \ y(x_{\circ})=y_{\circ}, \tag{۱}$$

فرض می‌کنیم f به‌گونه‌ای است که مسئله در فاصله‌ای شامل $x_{\circ}$ جوابی یکتا دارد و روشهای محاسبهٔ مقادیر عددی جواب را مورد بحث قرارمی‌دهیم.

اگر بتوانیم فرمولی برای جواب به دست آوریم می‌توانیم آن را به طور عددی مستقیماً یا بااستفاده ازجدول، محاسبه کنیم. ازاین نقطه نظرکتاب کمك(Kamke)؛(مرجع [B۱۲]، ضمیمهٔ ۱) وفهرستهای جداول (ر. ك. مرجع [A۶]، ضمیمهٔ ۱) مفیدند. هرگاه برای جواب فرمولی نداشته باشیم ویافرمول خیلی پیچیده باشد، یکی از روشهای بررسی شده دراین بخش را می‌توانیم به‌کاربریم.

روشهایی که دراین بخش بررسی می‌کنیم **روشهای گام به‌گام** هستندبه‌این معنی که از $y_{\circ}=y(x_{\circ})$ شروع می‌کنیم وقدم به‌قدم جلومی‌رویم. درگام اول $y_۱$، مقدارتقریبی جواب y از معادلهٔ (۱) را در $x=x_۱=x_{\circ}+h$ محاسبه می‌کنیم. درمرحلهٔ دوم مقدار تقریبی $y_۲$ی این جواب را در $x=x_۲=x_{\circ}+۲h$ حساب می‌کنیم و بـه همین ترتیب ادامه می‌دهیم. دراینجا h عدد ثابتی است مثل ۲ر۰ یا ۱ر۰ یا ۰۱ر۰؛ اصولی راکه درانتخاب h باید مطمح نظرقرارگیرند بعداً درهمین بخش بررسی می‌کنیم.

محاسبات تمام مراحل از فـرمول یکسانی پیروی می‌کنند. چنین فرمولی از سری تیلور به‌دست می‌آید:

$$y(x+h)=y(x)+hy'(x)+\frac{h^۲}{۲}y''(x)+\cdots.$$

از (۱) داریم $y'=f$. بامشتق گیری $y''=f'=\partial f/\partial x+(\partial f/\partial y)y'$، وبه‌همین ترتیب، وسری تیلور به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y(x+h)=y(x)+hf+\frac{h^۲}{۲}f'+\frac{h^۳}{۶}f''+\cdots, \tag{۲}$$

که درآن $f,\ f',\ f'',\ldots$ در $(x,\ y(x))$ محاسبه شده‌اند.

به‌ازای مقادیرکوچك h، توانهای بالای $h^۲,\ h^۳,\ \ldots$ در (۲) خیلی کـوچك خواهند بود. از اینجا به تقریب خام

$$y(x+h)\approx y(x)+hf,$$

وفرآیند تکرار زیرمی‌رسیم. درمرحلهٔ اول

$$y_۱=y_{\circ}+hf(x_{\circ},\ y_{\circ})$$

را محاسبه می‌کنیم که $y(x_1)=y(x_0+h)$ را تقریب می‌زند. درمرحلهٔ دوم

$$y_2=y_1+hf(x_1,\ y_1)$$

را محاسبه می‌کنیم که $y(x_2)=y(x_0+2h)$ را تقریب می‌زند و به همین ترتیب درمورد بقیهٔ مراحل؛ به‌طور کلی

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,\ y_n)\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots). \tag{۳}$$

این روش را **روش اویلر** یا **روش اویلر- کشی** می‌نامند. ازنظرهندسی این روش تقریبی است ازمنحنی $y(x)$ با چند ضلعی، که اولین ضلعش مماس برمنحنی در x_0 است (ر. ك. شکل ۳۵۵).

این روش یك **روش مرتبه اول** است، زیرا در(۲) فقط جملهٔ ثابت وجمله‌ای راکه شامل توان اول h است درنظرگرفته‌ایم. حذف جملات دیگر (۲) خطایی تولید می‌کند که آن را **خطای قطع** این روش می‌نامند. به‌ازای h کوچك، توانهای سوم و بالاتر h در مقایسه با h^2 اولین جملهٔ حذف شده کوچکند وبنابراین می‌گوییم که **خطای قطع در هرگام** از مرتبهٔ h^2 است. به‌علاوه، دراین روش و روشهای دیگر **خطاهای گردکردن** نیز وجود دارندکه باافزایش n در دقت مقادیر $y_1,\ y_2,\ \cdots$ بیشتر و بیشتر تأثیر می‌گذارند؛ دراین باره مجدداً دربخش بعد صحبت خواهیم کرد.

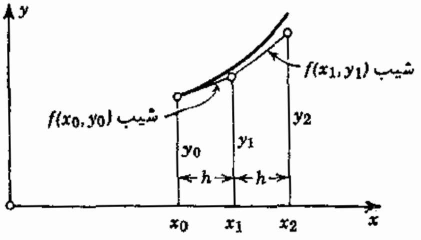
ارزش عملی روش اویلر محدود است؛ اما به‌دلیل ساده بودنش، ممکن است درفهم ایدهٔ اساسی روشهای این بخش مفید باشد.

مثال۱. روش اویلر

روش اویلر را درمورد مسئلهٔ مقدار اولیهٔ

$$y'=x+y,\ y(0)=0 \tag{۴}$$

باانتخاب $h=0.2$ ومحاسبهٔ $y_1,\ \cdots,\ y_5$ به‌کاربرید. دراینجا $f(x,y)=x+y$ و(۳) می‌شود



شکل ۳۵۵. روش‌اویلر

$$y_{n+1}=y_n+۰ر۲(x_n+y_n)$$

جدول ۷.۱۹ محاسبات، مقادیر مربوط به‌جواب دقیق

$$y(x)=e^x-x-۱$$

کـه از (۴) بخش ۷.۱ به دست آمده، و خطا را نشان می‌دهد. در عمل جواب دقیق را نمی‌دانیم اما می‌توانیم بـا اعمال مجدد روش اویلر با گام $۲h=۰ر۴$ ومقایسهٔ تقریبهای متناظـر، دقت مقادیـر را مشخص کنیم. با یـك محاسبهٔ ساده معلوم می‌شود کـه تفاوتها $۰ر۰۴۰(x=۰ر۴)$ و $۰ر۱۱۰(x=۰ر۸)$ هستند. چون‌خطا ازمرتبهٔ $h^۲$ است،انتقال‌از h به $۲h$ به‌معنی ضرب کـردن در $۴=۲^۲$ است، اما چون تنها به نیمی از مراحل حالت قبل نیاز داریم، خطا فقط در $۲=۴/۲$ ضرب می‌شود؛ از این‌رو تفاوتها اندازهٔ خطا را نشان می‌دهند (ر. ك. جدول ۷.۱۹). ▲

جدول ۷.۱۹

روش اویلر به‌کار رفته درمورد (۴) و خطا

n	x_n	y_n	$۰ر۲(x_n+y_n)$	مقادیر دقیق	مقدارمطلق خطا
۰	۰ر۰	۰ر۰۰۰	۰ر۰۰۰	۰ر۰۰۰	۰ر۰۰۰
۱	۰ر۲	۰ر۰۰۰	۰ر۰۴۰	۰ر۰۲۱	۰ر۰۲۱
۲	۰ر۴	۰ر۰۴۰	۰ر۰۸۸	۰ر۰۹۲	۰ر۰۵۲
۳	۰ر۶	۰ر۱۲۸	۰ر۱۴۶	۰ر۲۲۲	۰ر۰۹۴
۴	۰ر۸	۰ر۲۷۴	۰ر۲۱۵	۰ر۴۲۶	۰ر۱۵۲
۵	۱ر۰	۰ر۴۸۹		۰ر۷۱۸	۰ر۲۲۹

با درنظر گرفتن جملات بیشتری از (۲)، روشهای عددیی راکـه از مرتبهٔ بالاتری هستند و دقت بیشتری دارند به‌دست می‌آوریم. فرمولهای متناظر را می‌توان طوری‌نمایش دادکه ازمحاسبهٔ پیچیدهٔ مشتقات $f(x, y)$ پرهیز کرده و به‌جای آن f را برای یك یـا چند مقدارکمکی مناسب از (x, y) محاسبه‌کرد. در اینجا دونمونه از این روشها راکه اهمیت عملی دارند بررسی می‌کنیم:

روش اول را **روش اصلاح شدهٔ اویلر** یا **روش اصلاح شدهٔ اویلر ـ کشی** (و گاهی **روش هیون***) می‌نامند. در هر مرحله از این روش نخست مقدار کمکی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$y^*_{n+1}=y_n+hf(x_n,\ y_n) \qquad (\text{۵ الف})$$

وسپس مقدار

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h[f(x_n,\ y_n)+f(x_{n+1},\ y^*_{n+1})]. \qquad (\text{۵ب})$$

این روش تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. در واقع می‌توان گفت درفاصلهٔ x_n تا $x_n+1/2h$ جواب y را با خط مستقیمی که از $(x_n,\ y_n)$ می گذرد و شیب آن $f(x_n,\ y_n)$ است تقریب می‌زنیم، وسپس در امتداد خط مستقیمی که شیب آن $f(x_{n+1},\ y^*_{n+1})$ است این کاررا ادامه می‌دهیم تا x به x_{n+1} برسد (ر.ك. شکل ۳۵۶، که درآن $n=0$).

روش اصلاح شدهٔ اویلر-کشی **روشی پیشگو ـ مصحح** است زیرا درهرمرحله نخست از (۵الف) مقداری را پیشگویی کرده وسپس آن را بااستفاده از (۵ب) تصحیح می کنیم.

مثال ۲. روش اصلاح شدهٔ اویلر

روش اصلاح شدهٔ اویلر را در مورد مسئلهٔ مقدار اولیهٔ (۴)، مثال ۱، به کار برید و مانند سابق h را ۰٫۲ درنظربگیرید. دراینجا (۵) به‌شکل زیر در می‌آید:

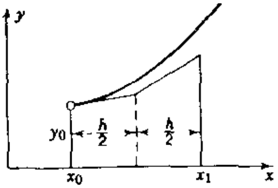
$$y^*_{n+1}=y_n+0.2(x_n+y_n)$$

$$y_{n+1}=y_n+0.1[(x_n+y_n)+(x_{n+1}+y^*_{n+1})]$$

دنبال کردن این‌کار بسیار ساده است، زیرا باید فرمول اول را در دومی قرار داد. پس از ساده‌کردن نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$y_{n+1}=0.12x_n+0.1x_{n+1}+1.22y_n.$$

باتوجه به‌جدول ۸.۱۹ می‌بینیم که این نتایج دقیقتر ازنتایج مثال۱ هستند؛ همچنین جدول ۱۰.۱۹ را ببینید. ▲



شکل ۳۵۶. روش اصلاح شدهٔ اویلر

* Heun's method

روش اصلاح شدهٔ اویلر یك روش مرتبه دوم است، زیرا خطای قطع در هرگام از مرتبهٔ $h^۳$ است.

در واقع، باقراردادن $f_n = f(x_n, y(x_n))$ و با استفاده از (۲) داریم:

$$y(x_n+h)-y(x_n)=h\tilde{f}_n+\frac{۱}{۲}h^۲\tilde{f}_n'+\frac{۱}{۶}h^۳\tilde{f}_n''+\cdots \qquad (\text{۶ الف})$$

جدول ۸۰۱۹

روش اصلاح شدهٔ اویلر به‌کار رفته در مورد (۴)

n	x_n	y_n	$۰٫۱۲x_n$	$۰٫۱x_{n+۱}$	$۱٫۲۲y_n$	$y_{n+۱}$
۰	۰٫۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۲۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۲۰۰
۱	۰٫۲	۰٫۰۲۰۰	۰٫۰۲۴۰	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۲۴۴	۰٫۰۸۸۴
۲	۰٫۴	۰٫۰۸۸۴	۰٫۰۴۸۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۱۰۷۸	۰٫۲۱۵۸
۳	۰٫۶	۰٫۲۱۵۸	۰٫۰۷۲۰	۰٫۰۸۰۰	۰٫۲۶۳۳	۰٫۴۱۵۳
۴	۰٫۸	۰٫۴۱۵۳	۰٫۰۹۶۰	۰٫۱۰۰۰	۰٫۵۰۶۷	۰٫۷۰۲۷
۵	۱٫۰	۰٫۷۰۲۷				

اگردر (۵ب) عبارت داخل کروشه را با $f_n+f_{n+۱}$ تقریب بزنیم و یك‌بار دیگراز بسط تیلور استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$y_{n+۱}-y_n\approx\frac{۱}{۲}h\left(\tilde{f}_n+\tilde{f}_n+h\tilde{f}_n'+\frac{۱}{۲}h^۲\tilde{f}_n''+\cdots\right) \qquad (\text{۶ ب})$$

با تفریق (۶ الف) از (۶ ب) خطای قطع درهر گام معلوم می‌شود

$$\frac{h^۳}{۴}\tilde{f}_n''-\frac{h^۳}{۶}\tilde{f}_n''+\cdots=\frac{h^۳}{۱۲}\tilde{f}_n''+\cdots .$$

حال دربارهٔ **انتخاب گام** h بحث می‌کنیم که مسئلهٔ مهمی درکاربرد روش گام‌به‌گام است. h نباید خیلی کوچك باشد زیرا در این صورت تعداد گامها و خطاهای گرد کردن بزرگ می‌شود. ازطرف دیگر، h نباید خیلی بزرگ باشد، زیرا بزرگ بودن h، خطای قطع بزرگی درهرمرحله ایجاب می‌کند و، به‌علاوه، خطای دیگری پدید می‌آید ناشی از اینکه f به‌جای (x_n, y_n) در $(x_n, y(x_n))$ محاسبه شده‌است. این خطا درصورتی که f مستقل از y باشد صفر می‌شود و اینکه f دراثر تغییر y با سرعت بیشتری تغییر کند دارای اهمیت است، یعنی بزرگ بودن قدرمطلق مشتق جزئی $f_y=\partial f/\partial y$ مهم است.

به طور دقیقتر، اگر خطا را با φ_n نمایش دهیم و قضیهٔ مقدارمیانگین را به‌کار بریم داریم

$$\varphi_n = f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n)) = f_y(x_n, \tilde{y})\eta_n,$$

که در آن $\eta_n = y_n - y(x_n)$ خطای y_n است و $\tilde{y}$ بین y_n و $y(x_n)$ قرار دارد. بنابراین سهم φ_n درخطای y_{n+1} تقریباً برابراست با $h\varphi_n = hf_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$. ازاین‌رو می‌توان کران بالای نزدیکی مانند K از $|f_y|$ را درناحیهٔ موردنظر گرفت و h راطوری انتخاب کرد که

$$\kappa = hK$$

خیلی بزرگ نباشد. می‌بینیم که اگر $|f_y|$ بزرگ باشد (یعنی بستگی f به y قوی باشد)، در آن صورت K بزرگ می‌شود و h بایدکوچك شودکه قابل درك است. (در مثالهای ۱ و ۲، $f_y = ۱$ ،$K = ۱$، $hK = ۰٫۲$) اگر f_y خیلی تغییرکند می‌توان کران بالای نزدیکی مانند K_n از $|f_y(x_n, \tilde{y})|$ را انتخاب کرد و دویاحتی سه مقدارمختلف h درنواحی مختلف انتخاب کرد به طوری که

$$\kappa_n = hK_n$$

درفاصلهٔ معینی (مثلا $۰٫۲ \leqslant \kappa_n \leqslant ۰٫۱$) که بستگی به‌دقت موردنظردارد برقرارباشد؛ واضح است که به دلیل خطای قطع درهرگام نمی‌توانیم h را از مقدار مشخصی بیشتر بگیریم.

روشی که دقیقتر است **روش رونگه ـ کوتا**[1] نام دارد؛ این روش اهمیت زیادی دارد. درهرگام ازاین روش، نخست چهارمقدارکمکی زیررا محاسبه می‌کنیم:

$$A_n = hf(x_n, y_n), \quad B_n = hf\left(x_n + \tfrac{۱}{۲}h,\ y_n + \tfrac{۱}{۲}A_n\right),$$

(۷ الف)

$$C_n = hf\left(x_n + \tfrac{۱}{۲}h,\ y_n + \tfrac{۱}{۲}B_n\right), \quad D_n = hf(x_{n+۱}, y_n + C_n)$$

وپس ازآن مقدار

$$y_{n+۱} = y_n + \tfrac{۱}{۶}(A_n + ۲B_n + ۲C_n + D_n) \qquad (۷\ ب)$$

را.

می‌توان نشان دادکه خطای‌قطع درهرگام ازمرتبهٔ h^5 است (ر.ك. مرجع[G۲۰]، ضمیمهٔ ۱) و، درنتیجه این روش، روشی مرتبه چهارم است. توجه‌کنیدکه هرگاه f فقط به x بستگی داشته باشد، این روش‌به قاعدهٔ انتگرالگیری سیمپسون (بخش۶.۱۹) تحویل می‌شود.

---

۱. کارل رونگه Carl Runge(۱۸۵۶ـ۱۹۲۷) و ویلهلم کوتا Wilhelm Kutta(۱۸۶۷ـ۱۹۴۴)، ریاضیدانهای آلمانی.

درمحاسبات دستی، محاسبهٔ مکرر $f(x, y)$ خسته‌کننده‌است. درمحاسبات اتوماتیك این مسئله خیلی مهم نیست وروش مزبورمناسب است زیـرا درآن به عمل آغازی خاصی نیاز نیست، تعداد دستورالعملها را درانباره کم می‌کند، به برآورد نیازی ندارد و تنها یك برنامهٔ محاسباتی سرراست را چندین‌بار تکرارمی‌کند.

مثال ۳. روش رونگه ـ کوتا

روش رونگه‌ـکوتا را درمورد مسئلهٔ مقداراولیهٔ (۴)، مثال ۱، به‌کار برید؛ h را مانند گذشته ۰٫۲ بگیرید ومحاسبه را تا ۵ گام ادامه دهید. در اینجا $f(x, y)=x+y$، و(۷الف) می‌شود

$$A_n = 0.2(x_n+y_n) ،\quad B_n = 0.2(x_n+0.1+y_n+0.5A_n) ،$$

$$C_n = 0.2(x_n+0.1+y_n+0.5B_n) ،\quad D_n = 0.2(x_n+0.2+y_n+C_n) .$$

چون این عبارات خیلی ساده هستند می‌توانیم A_n را در B_n قراردهیم و به‌دست بیاوریم $B_n = 0.22(x_n+y_n)+0.02$ ، این مقـدار را در C_n قـرار دهیـم و پیـدا کـنیم $C_n = 0.222(x_n+y_n)+0.022$ و سرانجام C_n را در D_n بگذاریـم و بیابـیم $D_n = 0.2444(x_n+y_n)+0.0444$. اگراین عبارت را به‌کار بریم، (۷ب) می‌شود

$$y_{n+1} = y_n + 0.2214(x_n+y_n) + 0.0214 \qquad (۸)$$

جدول ۹.۱۹ محاسبات مربوط را نشان می‌دهد، با توجه به جدول ۱۰.۱۹ می‌بینیم کـه مقادیر خیلی دقیقتر ازمقادیری است که درمثالهای ۱ و ۲ به‌دست آوردیم. ▲

جدول ۹.۱۹

روش رونگه ـ کوتا به‌کار رفته درمورد (۴)؛ محاسبات بااستفاده از (۸)

n	x_n	y_n	x_n+y_n	$0.2214(x_n+y_n)$	$0.2214(x_n+y_n)+0.0214$
۰	۰٫۰	۰	۰	۰	۰٫۰۲۱۴۰۰
۱	۰٫۲	۰٫۰۲۱۴۰۰	۰٫۲۲۱۴۰۰	۰٫۰۴۹۰۱۸	۰٫۰۷۰۴۱۸
۲	۰٫۴	۰٫۰۹۱۸۱۸	۰٫۴۹۱۸۱۸	۰٫۱۰۸۸۸۹	۰٫۱۳۰۲۸۹
۳	۰٫۶	۰٫۲۲۲۱۰۷	۰٫۸۲۲۱۰۷	۰٫۱۸۲۰۱۴	۰٫۲۰۳۴۱۴
۴	۰٫۸	۰٫۴۲۵۵۲۱	۱٫۲۲۵۵۲۱	۰٫۲۷۱۳۳۰	۰٫۲۹۲۷۳۰
۵	۱٫۰	۰٫۷۱۸۲۵۱			

جدول ۱۰.۱۹

مقایسهٔ دقت سه روش بررسی شده درمورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای (۴) با ۲ر۰=h

x	$y=e^x-x-1$	مقدار مطلق خطا		
		روش اویلر (جدول ۷.۱۹)	روش اصلاح شدهٔ اویلر (جدول ۸.۱۹)	روش رونگه-کوتا (جدول ۹.۱۹)
۰ر۲	۰ر۰۲۱۴۰۳	۰ر۰۲۱	۰ر۰۰۱۴	۰ر۰۰۰۰۰۰۳
۰ر۴	۰ر۰۹۱۸۲۵	۰ر۰۵۲	۰ر۰۰۳۴	۰ر۰۰۰۰۰۰۷
۰ر۶	۰ر۲۲۲۱۱۹	۰ر۰۹۴	۰ر۰۰۶۳	۰ر۰۰۰۰۰۱۱
۰ر۸	۰ر۴۲۵۵۴۱	۰ر۱۵۲	۰ر۰۱۰۲	۰ر۰۰۰۰۰۲۰
۱ر۰	۰ر۷۱۸۲۸۲	۰ر۲۲۹	۰ر۰۱۵۶	۰ر۰۰۰۰۰۳۱

طول گام h نباید ازمقدار معینی مانند H که به دقت بستگی‌دارد بیشتر باشد و در غیراین‌صورت باید طوری باشد که

$$\kappa=hK \qquad (\text{کران بالای کوچکی برای } |\partial f/\partial y| \text{ است } K)$$

تقریباً بین ۱ر۰ و ۲ر۰ قرار داشته باشد؛ این شبیه روش اصلاح شدهٔ اویلراست که قبلا بررسی شد. یك امتیاز روش رونگه-کوتا این است که در آن می‌توان h را به وسیلهٔ A_n، B_n، C_n کنترل کرد، زیرا بنابه‌تعریف f_y داریم

$$\kappa=hK\approx h|f_y|\approx h\left|\frac{f(x,\ y^*)-f(x,\ y^{**})}{y^*-y^{**}}\right|,$$

وهر گاه انتخاب کنیم $x=x_n+h/2$، $y^*=y_n+B_n/2$، $y^{**}=y_n+A_n/2$ آنگاه داریم $y^*-y^{**}=(B_n-A_n)/2$ و

$$\kappa\approx\kappa_n=2\left|\frac{C_n-B_n}{B_n-A_n}\right|. \qquad (9)$$

حالا می‌توانیم شرط کنیم h به ازای ۲ر۰ $\geqslant \kappa_n \geqslant$ ۰۵ر۰ تغییر نکند و به ازای $\kappa_n >$ ۲ر۰، h به میزان ۵۰٪ کاهش یابد و در صورتی که κ_n کوچکتر از ۰۵ر۰

باشد، h دوبرابر شود (هرگاه این دوبرابرشدن ایجاب نکندکه h ازعدد انتخابی مناسب H، که به‌دقت موردنظر بستگی دارد بیشترشود).
راه دیگر کنترل h آن است که به‌طور همزمان محاسبات را با گام $2h$ انجام دهیم. دوبرابر کردن طول گام باعث می‌شود خطای قطع درهر گام $32 = 2^5$ برابرشود، اماچون تعداد گامها کم می‌شود، این خطا در واقع $2^5/2 = 16$ برابر می‌شود. از این رو خطای محاسبهٔ اول (که گام آن h است) تقریباً $1/15$ تفاضل δ ی مقادیر متناظر y است. اکنون عددی مانند ε انتخاب می‌کنیم (مثلا، ۱ واحد از آخرین عددی که معنی‌دار تصور می‌شود) و h را تغییر نمی‌دهیم اگر $10\varepsilon \leqslant |\delta| \leqslant 0.2\varepsilon$، آن را ۵۰٪ کاهش‌می‌دهیم اگر $10\varepsilon < |\delta|$ و دوبرابر می‌کنیم اگر $0.2\varepsilon > |\delta|$؛ بدیهی است در حالت اخیر باید دقت کنیم که طول گام از عدد مناسبی مانند H بزرگتر نشود؛ به دلیلی که قبلا بدان اشاره کردیم.

مسائل بخش ۷.۱۹

روش اویلر را درمورد معادلات دیفرانسیل زیر به‌کاربرید (تا ده گام ادامه دهید.)

۱. $y' = y,\ y(0) = 1,\ h = 0.1$ ۲. $y' = y,\ y(0) = 1,\ h = 0.01$

۳. $y' = 2xy,\ y(0) = 1,\ h = 0.1$ ۴. $y' = 2xy + 1,\ y(0) = 0,\ h = 0.1$

۵. روش اصلاح شدهٔ اویلر را درمورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای $y' = 2x,\ y(0) = 0$، با انتخاب $h = 0.1$، به‌کاربرید. چرا خطاها صفرند؟

۶. چند مثال بزنید که درآنها روش اصلاح شدهٔ اویلر-کشی به‌جواب کامل منجرشود.

۷. محاسبات مثال ۱ را با انتخاب $h = 0.1$ (به جای $h = 0.2$) تکرارکنید، و نشان دهید که خطاهای مقادیر حاصل تقریباً ۵۰٪ خطاهای مثال ۱ (که در جدول ۱۰.۱۹ آمده‌اند) هستند.

۸. باانتخاب $h = 0.01$ (بیست گام)، نظیرمسئلهٔ ۷ عمل کنید. خطای مقدار متناظر با $x = 0.2$ را باهمین خطا درمثال ۱ مقایسه کنید.

۹. باانتخاب $h = 0.1$، محاسبات مثال۲ را تکرارکنید، توجه داشته باشیدکه‌خطاهای مقادیر حاصل در حدود ۲۵٪ خطاهای متناظر در مثال ۲ هستند.

۱۰. با انتخاب $h = 0.05$ (هشت گام)، نظیرمسئلهٔ ۹ عمل کنید. خطای مقدار متناظر با $x = 0.4$ را با خطاهای مثال ۲ ومسئلهٔ ۹ مقایسه کنید.

۱۱. با انتخاب $h = 0.1$، روش اویلر را درمورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای $y(0) = 0$،

$y'=1+y^2$ اعمال کنید. تا پنج گام محاسبه کنید و نتایج را با مقادیر دقیق مقایسه کنید (ر. ک. جدول A۱، ضمیمهٔ ۴).

۱۲. باانتخاب $h=0.1$ روش اصلاح شدهٔ اویلر را در مورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای مسئلهٔ ۱۱ به‌کاربرید. تا دوگام محاسبه کنید. وخطاهارا باخطاهای مقادیرمتناظر درمسئلهٔ ۱۱ مقایسه کنید.

۱۳. باانتخاب $h=0.1$، روش رونگه-کوتا را درمورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای مسئلهٔ ۱۱ به‌کار برید. تادو گام محاسبه کنید. نتایج را بامقادیر دقیق ۰٫۱۰۰۳۳۴۶۷۲ و ۰٫۲۰۲۷۱۰۰۳۶ مقایسه کنید.

۱۴. $y=e^x$ را به‌ازای $x=0,\ 0.1,\ 0.2,\ \ldots,\ 1.0$ بااستفاده‌از روش رونگه-کوتا در مورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای مسئلهٔ ۱۱ محاسبه کنید. نشان دهیدکه پنج رقم اعشاری اول نتیجه صحیح هستند (ر. ک. جدول A۱، ضمیمهٔ ۴).

۱۵. درمسئلهٔ ۱۴، A_n را در B_n قرار دهید، وسپس B_n را در C_n، و به همین ترتیب، آنگاه نشان دهیدکه فرمول $y_{n+1}=1.105170833y_n$. محاسبات مسئلهٔ ۱۴ را بااستفاده ازاین فرمول تکرار کنید.

۱۶. روش اویلررا با $h=0.1$ درمورد $y'=-100y,\ y(0)=1$ به‌کار برید. نشان دهیدکه $y=(-9)^{10x}$، این جواب وجواب دقیق را مقایسه کنید؛ توضیح دهید.

۱۷. نشان دهیدکه روش اویلر بامحاسبهٔ انتگرال (۱) از x_n تا x_{n+1} نیز به‌دست‌می‌آید، اگر انتگران $f[t,\ y(t)]$ را بامقدارش در x_n تقریب بزنیم.

۱۸. درمسئلهٔ ۱۷، قاعدهٔ ذوزنقه‌ای را درمورد انتگرال اعمال کنید و به‌دست آورید

$$y(x_n+h)\approx y(x_n)+\frac{h}{2}\{f[x_n,\ y(x_n)]+f[x_n+h,\ y(x_n+h)]\}$$

سپس $y(x_n+h)$ را با روش اویلر-کشی تقریب بزنید. نشان دهیدکه نتیجه روش اصلاح شدهٔ اویلر-کشی می‌باشد.

۱۹. نمونه‌ای از انواع دیگر روش اویلر-کشی به‌صورت

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ \ y_{n+1}{}^*\right)$$

است که درآن $y_{n+1}{}^*=y_n+hf(x_n+y_n)/2$. توجیهی هندسی برای این روش ارائه دهید. باانتخاب $h=0.2$، این روش‌را درمورد(۴)اعمال کنید؛ محاسبات راتا پنج گام ادامه دهید.

۲۰. **روش مرتبه سوم کوتا** با رابطهٔ زیرتعریف می‌شود:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(A_n+4B_n+M_n)$$

که در آن

$$A_n = hf(x_n, y_n), \ B_n = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, \ y_n + \frac{1}{2}A_n\right)$$

$$M_n = hf(x_{n+1}, y_n - A_n + 2B_n)$$

روش مزبور رادرمورد (۴)، مثال ۱، به‌کاربرید. باانتخاب $h = 0.2$، تاپنج گام‌ادامه دهید. نتیجه را باجدول ۱۰.۱۹ مقایسه کنید.

۸.۱۹ روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

این بخش روشهایی عددی، مشابه با روشهای بخش قبل را دربرمی‌گیرد و مستقل از سایربخشهای این فصل است. به‌طوری‌که می‌توان بلافاصله بعد ازفصل ۲ مطالعهٔ آن را شروع کرد.

مسئلهٔ مقدار **اولیه‌ای** یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم شامل خود معادله ودوشرط (شرایط اولیه) درمورد یك نقطه است . در این بخش دو روش عددی برای حل مسائل مقدار اولیه‌ای که به‌صورت

$$(۱) \qquad y'' = f(x, y, y'), \ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0'$$

هستند عرضه می‌کنیم؛ بنابه فرض f به‌گونه‌ای است که مسئله درفاصله‌ای مشتمل بر x_0 جوابی یکتا دارد. روش اول ساده (اما غیردقیق) است و برای تشریح اصول مطلب به‌کار می‌آید، درحالی‌که روش دوم از دقت زیاد واهمیت عملی برخوردار است.

در هر دو روش مقادیر تقریبی $y(x)$ ، جواب (۱) ، را درنقاط هم فاصلهٔ $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots$ به‌دست‌می‌آوریم؛این‌مقادیررا به‌ترتیب با $y_1, y_2, \dots$ نشان می‌دهیم. به‌گونه‌ای مشابه ، مقادیر تقریبی مشتق $y'(x)$ دراین نقاط را به ترتیب با $y_1', y_2', \dots$ نشان می‌دهیم.

روشهایی که دربخش قبل دیدیم، برمبنای بسط تیلور

$$(۲) \qquad y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \cdots$$

به‌دست آمده بودند؛ دراینجا نیز به‌همین منظور از (۲) وبسط مشتق

$$(۳) \qquad y'(x+h) = y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2}y'''(x) + \cdots$$

استفاده می کنیم.

تقریبیترین روش عددی با صرف نظر کردن از جملات در برگیرندهٔ y'''

وجملات بعدازآن در (۲) و (۳) به‌دست می‌آید؛ دراین روش خواهیم داشت

$$y(x+h) \approx y(x)+hy'(x)+\frac{h^{2}}{2}y''(x),$$

$$y'(x+h) \approx y'(x)+hy''(x).$$

دراولین گام، بااستفاده از (۱):

$$y_{0}''=f(x_{0},\ y_{0},\ y_{0}')$$

را محاسبه می‌کنیم وسپس

$$y_{1}=y_{0}+hy_{0}'+\frac{h^{2}}{2}y_{0}''$$

راکه $y(x_{1})=y(x_{0}+h)$ را تقریب می‌زند به‌دست می‌آوریم. علاوه براین داریم

$$y_{1}'=y_{0}'+hy_{0}''$$

که در گام بعد مورد نیازخواهد بود. درگام دوم

$$y_{1}''=f(x_{1},\ y_{1},\ y_{1}')$$

را با استفاده از (۱) محاسبه می‌کنیم، وبعد

$$y_{2}=y_{1}+hy_{1}'+\frac{h^{2}}{2}y_{1}''$$

راکه $y(x_{2})=y(x_{0}+2h)$ را تقریب می‌زند. علاوه براین خواهیم داشت

$$y_{2}'=y_{1}'+hy_{1}''.$$

در $(n+1)$ امین گام، بااستفاده از (۱)، مقدار

$$y_{n}''=f(x_{n},\ y_{n},\ y_{n}')$$

را حساب می‌کنیم وسپس مقدار

$$y_{n+1}=y_{n}+hy_{n}'+\frac{h^{2}}{2}y_{n}'' \qquad \text{(۴ الف)}$$

راکه تقریبی برای $y(x_{n+1})$ است ونیز

$$y'_{n+1}=y_{n}'+hy_{n}'' \qquad \text{(۴ ب)}$$

راکه تقریبی برای $y'(x_{n+1})$ است ودرگام بعد بدان نیاز داریم.

توجه کنید که از نظر هندسی این روش تقریب زدن منحنی $y(x)$ با تکه‌هایی از سهمیهای مختلف است.

مثال ۱. کاربردی از روش تعریف شده با (۴)

با انتخاب $h=0.2$، رابطهٔ (۴) را درمورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای زیر به‌کاربرید:

$$y''=\frac{1}{2}(x+y+y'+2),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0 \tag{۵}$$

دراین مورد (۴) می‌شود

$$y_{n+1}=y_n+0.2y_n'+0.02y_n''$$

$$y'_{n+1}=y_n'+0.2y_n''$$

که‌درآنها $y_n''=1/2\,(x_n+y_n+y'_n+2)$، محاسبات را درجدول ۱۱.۱۹ آورده‌ایم. دانشجو می‌تواند نشان دهد که جواب دقیق عبارت است از

$$y=e^x-x-1.$$

جدول ۱۳.۱۹ نشان می‌دهد که دراین مورد خطاهای مقادیرتقریبی بزرگ هستند؛ و نوعاً چنین است زیرا این روش برای اکثر موارد عملی غیر دقیق است. ▲

روشی که بسیار دقیقتر است تعمیمی از روش رونگه-کوتا است که **روش رونگه-کوتا - نیسترم**[۱] نام دارد (روش رونگه-کوتا را در بخش ۷.۱۹ دیدیـم). بدون اثبات متذکرمی‌شویم که این روش یك روش مرتبه چهارم است، به‌این معنی که دربسط تیلور y و y' جملات اول تا جملهٔ شامل h^4 وخود آن جمله به‌طورکامل وارد شده‌اند.

درهر گام [گام $(n+1)$ ام] این روش، نخست مقادیرکمکی زیرراحساب‌می‌کنیم:

$$A_n=\frac{1}{2}hf(x_n,\ y_n,\ y_n')$$

$$B_n=\frac{1}{2}hf\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\beta_n,\ y_n'+A_n\right),\quad \beta_n=\frac{1}{2}h\left(y_n'+\frac{1}{2}A_n\right)$$

(۶ الف)

$$C_n=\frac{1}{2}hf\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\beta_n,\ y_n'+B_n\right),$$

$$D_n=\frac{1}{2}hf(x_n+h,\ y_n+\delta_n, y_n'+2C_n),\qquad \delta_n=h(y_n'+C_n)$$

وسپس مقدار

---

۱. نیسترم E.J. Nyström ریاضیدان فنلاندی است. مقالهٔ وی دربارهٔ روش مورد بحث در *Acta Soc. Sci. fennicae*, vol .50(1925) چاپ شده است.

$$y_{n+1}=y_n+h(y_n'+K_n),\ K_n=\frac{1}{3}(A_n+B_n+C_n) \qquad (۶ب)$$

را که تقریبی است برای $y(x_{n+1})$ ؛ و نیز

$$y'_{n+1}=y_n'+K_n^*,\ K_n^*=\frac{1}{3}(A_n+2B_n+2C_n+D_n) \qquad (۶پ)$$

را که تقریبی است برای $y'(x_{n+1})$ ، ودرگام بعدی مورد نیاز است.

جدول ۱۱.۱۹

محاسبات مثال ۱

n	x_n	y_n	y_n'	$0{,}2y_n'$	$x_n+y_n+y_n'+2$	$0{,}2y_n''$	$0{,}02y_n''$	$0{,}2y_n'+0{,}02y_n''$
۰	۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	۲٫۰۰۰۰	۰٫۲۰۰۰	۰٫۰۲۰۰	۰٫۰۲۰۰
۱	۰٫۲	۰٫۰۲۰۰	۰٫۲۰۰۰	۰٫۰۴۰۰	۲٫۴۲۰۰	۰٫۲۴۲۰	۰٫۰۲۴۲	۰٫۰۶۴۲
۲	۰٫۴	۰٫۰۸۴۲	۰٫۴۴۲۰	۰٫۰۸۸۴	۲٫۹۲۶۲	۰٫۲۹۲۶	۰٫۰۲۹۳	۰٫۱۱۷۷
۳	۰٫۶	۰٫۲۰۱۹	۰٫۷۳۴۶	۰٫۱۴۶۹	۳٫۵۳۶۵	۰٫۳۵۳۷	۰٫۰۳۵۴	۰٫۱۸۲۳
۴	۰٫۸	۰٫۳۸۴۲	۱٫۰۸۸۳	۰٫۲۱۷۷	۴٫۲۷۲۵	۰٫۴۲۷۳	۰٫۰۴۲۷	۰٫۲۶۰۴
۵	۱٫۰	۰٫۶۴۴۶						

h را می‌توان به‌روشی مشابه با آنچه درآخر بخش قبلی بیان شدکنترل کرد، در صورتی که بیشترین مقدار δ^* و δ^{**} بگیریم؛ دراینجا δ^* برابراست با ۱/۱۵ تفاضل مقادیرمتناظر y ، و δ^{**} نیز ۱/۱۵ تفاضل مقادیرمتناظر y' است.

مثال ۲. روش رونگه ـ کوتا ـ نیسترم

باانتخاب $h=0{,}2$ روش رونگه ـ کوتا ـ نیسترم را درمورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای (۵) به کاربرید. دراینجا $f=0{,}5(x+y+y'+2)$ ، و (۶ الف) می‌شود

$$A_n=0{,}05(x_n+y_n+y_n'+2),$$

$$B_n=0{,}05(x_n+0{,}1+y_n+\beta_n+y_n'+A_n+2),\qquad \beta_n=0{,}1\left(y_n'+\frac{1}{2}A_n\right),$$

$$C_n=0{,}05(x_n+0{,}1+y_n+\beta_n+y_n'+B_n+2),$$

$$D_n = 0.05(x_n + 0.2 + y_n + \delta_n + y_n' + 2C_n + 2),\ \delta_n = 0.2(y_n' + C_n).$$

درمورد حاضر، معادلهٔ دیفرانسیل و نیز فرمولهای مربوط به A_n، B_n، C_n، D_n ساده‌اند. بنابراین می‌توانیم A_n را در B_n ونیز B_n رادر C_n وبالاخره، C_n را در D_n قرار دهیم. نتیجهٔ این محاسبهٔ مقدماتی

$$B_n = 0.05[1.0525(x_n + y_n) + 1.1525 y_n' + 2.205],$$

$$C_n = 0.05[1.055125(x_n + y_n) + (1.160125 y'_n + 2.21525],$$

$$D_n = 0.05[1.11606375(x_n + y_n) + 1.32761375 y_n' + 2.4436775]$$

می‌باشد. از روی این نتایج می‌توان K_n و K_n^* را معلوم کرد ودر (۶ب) و (۶پ) قرار داد؛ در این صورت خواهیم داشت

$$(7)\qquad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + a(x_n + y_n) + b y_n' + c \\ y'_{n+1} &= y_n' + a^*(x_n + y_n) + b^* y_n' + c^* \end{aligned}$$

که درآنها

$$a = 0.0103588 \qquad b = 0.2110421 \qquad c = 0.0214008$$

$$a^* = 0.1055219 \qquad b^* = 0.1158811 \qquad c^* = 0.2214030$$

محاسبات مربوطه را جدول ۱۲۰۱۹ نشان می‌دهد. خطاهای مقادیر تقریبی $y(x)$ بسیار کوچکتر ازخطاهای مربوط به‌مثال ۱ هستند (ر. ك. جدول ۱۳۰۱۹). ▲

درهرروش، علاوه برخطای قطع، خطاهای گردکردن نیز وارد می‌شوند؛ به‌خواننده هشدار می‌دهیم که خطاهای گردکردن ممکن است به‌میزان زیادی نتایج را تحت تأثیر قرار دهند. مثلا، جواب معادلهٔ $y'' = y$، $y(0) = 1$، $y'(0) = -1$ عبارت است از $y = e^{-x}$، اما خطای گردکردن باعث می‌شود مضرب کوچکی ازجواب ناخواستهٔ e^x وارد جواب نهایی شود که سرانجام (بعدازچندگام) درجواب موردنظر تأثیرخواهد گذاشت. این خطارا **خطای** building - up نامند. درمثال سادهٔ بالا می‌توان ازاین خطا احترازکرد، بدین ترتیب که از مقادیرمعلوم e^{-x} ومشتق آن به‌ازای یك x بزرگ شروع کرده ومحاسبه را درجهت عکس انجام داد. اما درحالات پیچیده‌تر برای پرهیز ازاین خطا تجربهٔ زیادی لازم است.

جدول ۱۲۰۱۹

روش رانگه ـ کوتا ـ نیستروم (با $h=$ ۰٫۲) به‌کار برده شده درمسئلهٔ مقدار اولیه‌ای (۵)؛ ۵ گام با استفاده از (۷) محاسبه شده است.

n	x_n	y_n	y_n'	$a(x_n+y_n)$ $+by_n'+c$	$a^*(x_n+y_n)$ $+b^*y_n'+c^*$
۰	۰٫۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰	۰٫۰۲۱۴۰۰۸	۰٫۲۲۱۴۰۳۰
۱	۰٫۲	۰٫۰۲۱۴۰۰۸	۰٫۲۲۱۴۰۳۰	۰٫۰۷۰۴۱۹۶	۰٫۲۷۰۴۲۲۰
۲	۰٫۴	۰٫۰۹۱۸۲۰۴	۰٫۴۹۱۸۲۵۰	۰٫۱۳۰۲۹۱۳	۰٫۳۳۰۲۹۴۰
۳	۰٫۶	۰٫۲۲۲۱۱۱۷	۰٫۸۲۲۱۱۹۰	۰٫۲۰۳۴۱۸۶	۰٫۴۰۳۴۲۱۹
۴	۰٫۸	۰٫۴۲۵۵۳۰۳	۱٫۲۲۵۵۴۰۹	۰٫۲۹۲۷۳۶۵	۰٫۴۹۲۷۴۰۳
۵	۱٫۰	۰٫۷۱۸۲۶۶۸	۱٫۷۱۸۲۸۱۲		

جدول ۱۳۰۱۹

مقایسهٔ دقت دو روش موردبحث درمورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای (۵)، با $h=$ ۰٫۲

x	$y=e^x-x-1$	مقدار مطلق خطا	
		مثال ۱	جدول ۱۲.۱۹
۰٫۲	۰٫۰۲۱۴۰۲۸	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۰
۰٫۴	۰٫۰۹۱۸۲۴۷	۰٫۰۰۷۶	۰٫۰۰۰۰۰۰۴۳
۰٫۶	۰٫۲۲۲۱۱۸۸	۰٫۰۲۰۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۷۱
۰٫۸	۰٫۴۲۵۵۴۰۹	۰٫۰۴۱۳	۰٫۰۰۰۰۰۱۰۶
۱٫۰	۰٫۷۱۸۲۸۱۸	۰٫۰۷۳۷	۰٫۰۰۰۰۰۱۵۰

مسائل بخش ۸.۱۹

(۴) را درمسائل مقدار اولیه‌ای زیر به‌کار برید (تا ۵ گام ادامه دهید.)

۱. $y''=y$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=1$ ، $h=0.1$

۲. $y''=y$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=-1$ ، $h=0.1$

۳. $y''=-y$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$ ، $h=0.1$

۴. $y''=-y$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$ ، $h=0.05$

۵. $y''=-y$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$ ، $h=0.1$

۶. محاسبات مثال ۱ را با انتخاب $h=0.1$ تکرار کنید؛ وخطاهای مقادیری را که بدین ترتیب به‌دست می‌آیند باخطاهای مثال ۱ (مندرج درجدول ۱۳.۱۹) مقایسه کنید.

۷. مسئلهٔ ۶، را باانتخاب $h=0.05$، حل کنید.

۸. با انتخاب $h=0.2$، روش رونگه ـ کوتا ـ نیسترم را درمورد مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای ۵ اعمال کنید؛ تا ۵ گام پیش روید و نتایج را با مقادیر دقیق مقایسه کنید (ر. ك. جدول A1 ، ضمیمهٔ ۴).

۹. درمسئلهٔ ۸ ، به‌جای $h=0.2$ قراردهید $h=0.1$ ، وتا چهار گام پیش رفته، نتایج را بامقادیر متناظر درمسئلهٔ ۸ ونیز بامقادیر دقیق (تا $9D$)

$0.099834417,\ 0.198669331,\ 0.295520207,\ 0.389418342$

مقایسه کنید.

۱۰. مسئلهٔ مقدار اولیه‌ای $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$، $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$ را درنظر بگیرید. نشان دهید (۴)، باانتخاب $h=0.1$ ، به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$y_{n+1}=y_n+0.1\,y_n'+0.01\,\frac{x_ny_n'-y_n}{1-x_n^2},\quad y'_{n+1}=y'_n+0.2\,\frac{x_ny_n'-y_n}{1-x_n^2},$$

تا ۵ گام پیش روید و با جایگذاری نشان دهید که جواب دقیق $y=x$ است.

با انتخاب $h=0.1$ ، (۴) را در مورد مسائل مقدار اولیه‌ای زیر به‌کار برید. ۵ گام پیش روید وجواب دقیق داده شده را تحقیق کنید.

۱۱. $y''=xy'-3y$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=-3$. جواب دقیق $y=x^3-3x$.

۱۲. $y''=xy'-4y$ ، $y(0)=3$ ، $y'(0)=0$. جواب دقیق $y=x^4-6x^2+3$.

۱۳. $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$، $y(0)=-\frac{1}{2}$، $y'(0)=0$ جواب دقیق

$y=\frac{1}{2}(3x^2-1)$.

۱۴. دراینجا روشهای عددی درمورد مسائل با مقدار مرزی را درحالت کلی مطرح نمی‌کنیم، اما خواننده می‌تواند مسئلهٔ زیر را حل کند. برای حل عددی

$$y''+f(x)y'+g(x)y=r(x)\text{، } y(0)=0\text{، } y(b)=k$$

یکی از روشهای قبلی را اعمال کرده جواب $Y(x)$ معادله را که در شرایط اولیهٔ $Y(0)=0$، $Y'(0)=1$ صدق می‌کند پیدا کنید. سپس باهمان روش جواب $z(x)$ معادلهٔ همگنی را که درشرایط اولیهٔ $z(0)=0$، $z'(0)=1$ صدق‌می‌کندمعلوم کنید. نشان دهید اگر c را درست انتخاب کنیم

$$y(x)=Y(x)+cz(x)$$

درمسئله صدق می‌کند. برای c چه شرطی وجود دارد؟

۱۵. برای حل عددی مسئله با مقدارمرزی

$$y''+f(x)y'+g(x)y=r(x)\text{، } y(a)=k_1\text{، } y(b)=k_2$$

نشان دهید می‌توان جواب $y_1(x)$ را که در رابطهٔ $y_1(a)=k_1$، $y_1'(a)=c_1$ صدق‌می‌کند ونیزجواب $y_2(x)$ راکه‌در $y_2(a)=k_1$، $y_2'(a)=c_2$ صدق می‌کند معلوم کرد به طوری که $y_1(b)\neq y_2(b)$ وسپس جواب مسئلهٔ داده شده را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$y(x)=\frac{1}{y_1(b)-y_2(b)}[(k_2-y_2(b))y_1(x)+(y_1(b)-k_2)y_2(x)].$$

۹.۱۹ دستگاههای معادلات خطی. حذف گاوسی

دستگاه m معادلهٔ خطی (یا مجموعهٔ m معادلهٔ خطی همزمان) با n مجهول $x_1,\dots,x_n$ مجموعهٔ معادلاتی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\&\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}\qquad(1)$$

که درآن **ضرایب** a_{jk} و b_j اعداد داده شده‌ای هستند. دستگاه را **همگن** نامند هر گاه تمام b_jها صفر باشند؛ درغیر این صورت آن را **ناهمگن** نامند. خوانندگانی که با ضرب ماتریسی (بخش ۴.۷) آشنایی دارند، می‌دانند که (۱) را می‌توان به صورت تك معادلهٔ برداری

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad (۲)$$

نوشت که درآن **ماتریس ضریب** $\mathbf{A}=(a_{ik})$ ماتریس $(m\times n)$ است و

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{است و} \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_۱ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_۱ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

بردارهای ستونی هستند. هر **جواب** (۱) مجموعه‌ای است از اعداد $x_۱, \ldots, x_n$ که در تمامی m معادله صدق کنند، وهر **بردارجواب** (۱) برداری است مانند $\mathbf{x}$ که مؤلفه‌هایش جواب (۱) باشند.

درمورد دستگاههای بزرگ روش‌حل بادترمینان (قاعدهٔ کرامر، بخش ۱۱.۷) غیر عملی است حتی اگر روشهای مؤثری برای محاسبهٔ دترمینان در دست باشد.

یکی از روشهای عملی حل دستگاه معادلات خطی **حذف گاوسی** است. کافی است این روش را به‌کمك مثالی بیان کنیم.

مثال ۱. حذف گاوسی

دستگاه زیر را حل کنید.

		کنترل مجموع
$۲w+x+۲y+z=$	۶	۱۲
$۶w-۶x+۶y+۱۲z=$	۳۶	۵۴
$۴w+۳x+۳y-۳z=$	-۱	۶
$۲w+۲x-y+z=$	۱۰	۱۴

مرحلهٔ اول. مضاربی از معادلهٔ اول را ازسه معادلهٔ دیگرطوری کم می کنیم که درهرمورد w حذف شود. خواهیم داشت

کنترل مجموع

$$\begin{array}{lr} -9x \qquad +9z = \ 18 & 18 \\ x - \ y - 5z = -13 & -18 \\ x - 3y \qquad = \ 4 & 2 \end{array}$$

مرحلهٔ دوم. سه معادلهٔ اخیر را در نظر می‌گیریم و مضاربی از اولین معادله را از دومعادلهٔ دیگر کم می‌کنیم به طوری که x حذف شود؛ به‌دست می‌آوریم

کنترل مجموع

$$\begin{array}{lr} -\ y - 4z = -11 & -16 \\ -3y + \ z = \ 6 & 4 \end{array}$$

مرحلهٔ سوم. مضربی از اولین معادلهٔ این دو معادلـه را از معادلهٔ دیگر کـم می‌کنیم تا y حذف شود:

کنترل مجموع

$$\begin{array}{lr} 13z = \ 39 & 52 \end{array}$$

مرحلهٔ نهایی. با قراردادن مقدار z، مقادیر y، x و w را به ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{rl} 13z = \ 39 & z = \ 3 \\ -y - 4\times 3 = -11 & y = -1 \\ -9x \qquad +9\times 3 = \ 18 & x = \ 1 \\ 2w + 1 + 2\times(-1) + \quad 3 = \ 6 & w = \ 2 \end{array}$$

مثالی که درآن‌تعداد معادلات باتعداد مجهولات یکی نیست در بخش ۵.۷ آمده است.

ستون اضافی سمت راست برای نوعی کنترل مورد استفاده قرارمی گیرد. هرعضو این ستون مجموع ضرایب وجملات معادلهٔ سمت راست آن است؛ در هرمرحله عملیاتی راکـه روی معادلات انجام می‌دهیم روی مجموعهای مـربوط به‌آنها نیز انجام می‌دهیم وسپس کنترل می‌کنیم که معادلهٔ حاصل دارای مجموع مورد نظر باشد.

عملا، در هرمرحله معادلات کامل نوشته نمی‌شود، بلکه فقط ماتریس ضرایب وستون جملات سمت راست را می‌نویسیم ▲

در هرمرحله ضریب اولین مجهول معادلهٔ اول را **ضریب محوری** می‌گویند. اگر ضریب محوری کوچك باشد، باید مضارب بزرگی ازمعادلهٔ متناظر را از بقیهٔ معادلات کم

کنیم ؛ بهاین ترتیب هرگونه عدم یقینی که درضرایب وجود داشته باشد تشدید خواهد شد ودر دقت نتیجه اثرخواهد گذاشت. نتیجتاً درعمل ضرایب محوری را باید طوری‌انتخاب کنیم کــه قدرمطلقشان خیلی کوچك نباشد. درصورت لزوم ، اینکار را می‌توانیم با پس و پیش کردن معادلات ومتغیرها انجام دهیم. این فرآیند را **محوریابی یا تعیین محل برحسب اندازه** می‌نامند .

برای احتراز از ضرایب محوری کــوچك می‌توان از **مقیاس‌گذاری** استفاده کرد ، یعنی معادلات را درعوامل مناسب ضرب کرد و یــا در مورد بعضی متغیرها ، تغییر ضرایب محوری متغیر $x_j^* = c_j x_j$ را دادکه درآن c_j یك عدد مناسب است.

حال **معکوس** ماتریس وارون پذیر $\mathbf{A}$ را می‌توان باحل n دستگاه

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_j \qquad (j = ۱, \cdots, n) \tag{۳}$$

به دست‌آورد. دراینجا $\mathbf{b}_j$ عبارت است از j امین ستون $\mathbf{b}$ ماتریس یکهٔ n سطری. (یك روش تکرار برای تعیین معکوس دربخش بعد آمده است.)

به انحاء مختلفی می‌توان در روش گاوس تغییراتی داد.ما روشی را ذکرمی‌کنیم کــه برپایهٔ قضیه‌ای از **چلسکی*** استوار شده است. چلسکی نشان دادکه اگر ماتریس مربعی $\mathbf{A}$ وتمام زیرماتریسهای مربعی مقدم آن وارون پذیر باشند، $\mathbf{A}$ را می‌توان به‌صورت

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \tag{۴}$$

نمایش‌دادکه درآن $\mathbf{L}$و$\mathbf{U}$ به‌ترتیب‌ماتریسهای‌پایین مثلثی‌و بالامثلثی هستند. $\mathbf{L}$و$\mathbf{U}$ اساساً یکتا هستند، واگر عناصر قطری $\mathbf{L}$ (یا $\mathbf{U}$) را مشخص‌کنیم، $\mathbf{L}$ و $\mathbf{U}$ یکتا خواهند بود. نکته این است کــه $\mathbf{L}$ و $\mathbf{U}$ را می‌توان بدون حل معادلات همزمان به دست آورد (مثال زیررا ببینید). برای حل دستگاه n معادلهٔ n مجهولی $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ می‌توانیم از (۴)استفاده کرده بنویسیم

$$\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

و با ضرب‌کردن $\mathbf{L}^{-۱}$ ازچپ خواهیم داشت

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \text{که درآن} \quad \mathbf{z} = \mathbf{L}^{-۱}\mathbf{b}\,; \tag{۵}$$

واین صورت مثلثی دستگاه ما است. نخست $\mathbf{z}$ را از رابطهٔ [ر. ك (۵)]

$$\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}, \tag{۶}$$

تعیین می‌کنیم وسپس معادلهٔ

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{z} \tag{۷}$$

* Cholesky

را حل می‌کنیم تا $\mathbf{x}$ به‌دست آید.

مثال ۲. روش چلسکی

خواننده می‌تواند تحقیق کند که جواب دستگاه

$$x+2y+3z=14$$
$$2x+3y+4z=20$$
$$3x+4y+\ \ z=14$$

عبارت است از $x=1$ ، $y=2$ ، $z=3$ ؛ در اینجا خواهیم دید که چگونه با روش چلسکی می‌توان این نتیجه را به‌دست آورد. ماتریس ضریب متقارن است. این موضوع ایجاب می‌کند که $\mathbf{L}=\mathbf{U}^T$ و می‌توانیم عناصر $\mathbf{U}$ را با استفاده از تعریف ضرب ماتریسی ازمعادلۀ زیر، با مساوی قراردادن اجزای متناظر، معلوم کنیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم $a_{11}{}^2=1$ ، یعنی $a_{11}=1$ ، ازاین رو $a_{11}a_{12}=a_{12}=2$ ، $a_{11}a_{13}=a_{13}=3$ ، $a_{12}{}^2+a_{22}{}^2=4+a_{22}{}^2=3$ ، یعنی $a_{22}=i(=\sqrt{-1})$ ، و با توجه به همۀ اینها

$$a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}=6+ia_{23}=4, \quad a_{23}=2i$$

و سرانجام

$$a_{13}{}^2+a_{23}{}^2+a_{33}{}^2=9-4+a_{33}{}^2=1, \quad a_{33}=2i$$

از این‌رو (۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 3 & 2i & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 8i \\ 6i \end{pmatrix}$$

حال معادلۀ زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & i & 2i \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 8i \\ 6i \end{pmatrix}$$

، و درمی‌یابیم که

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ ▲

نوع دیگری ازحذف گاوسی تغییریافته، حذف‌گاوس ـ ژردانی* است که ژردان در ۱۹۲۰ آن‌را ابداع کرد. دراین‌روش محاسبات‌اضافی که ماتریس‌را به‌جای «صورت‌مثلثی» معمول درحذف‌گاوسی‌به«صورت قطری» درمی‌آورد ازجایگزینهای مکرر احترازمی‌شود. به مسئلهٔ ۱۴ همین بخش تـوجه‌کنید . به دلیل محاسبات اضافی به نظر می‌رسدکـه روش برآورد در رابطه با وسایل محاسباتی خودکار هیچگونه مزیتی نداشته باشد.

روش برآورد خطا درمورد حذف گاوسی درمرجع [G9]، ضمیمهٔ ۱، آمده‌است.

مسائل بخش ۹.۱۹

با استفاده ازحذف‌گاوسی دستگاههای معادلات خطی زیررا حل‌کنید

۱. $5x-2y=1$, $6x+8y=22$

۲. $3x+y=-5$, $2x+3y=6$

۳. $x-2y=-8$, $5x+3y=-1$

۴. $x+2y-8z=0$, $2x-3y+5z=0$, $3x+2y-12z=0$

۵. $7x-y-2z=0$, $9x-y-3z=0$, $2x+4y-7z=0$

۶. $3x-y+z=-2$, $x+5y+2z=6$, $2x+3y+z=0$

۷. $3x-3y-7z=-4$, $x-y+2z=3$

۸. $7x-4y-2z=-6$, $16x+2y+z=3$

۹. $x-3y+2z=2$, $5x-15y+7z=10$

۱۰. $3w-6x-y-z=0$, $w-2x+5y-3z=0$, $2w-4x+3y-z=3$

۱۱. $4w+3x-9y+z=1$, $-w+2x-13y+3z=3$, $3w-x+8y-2z=-2$

۱۲. نشان دهید که درمورد n معادلهٔ n مجهولی، تعداد ضربها و تقسیمها درحذف گاوسی ازمرتبهٔ $n^3/3$ است. (برای مشخص کردن کارآیی یك روش، گاهی قرارداد می‌شود که فقط ضربها وتقسیمهای‌آن شمرده شوند، چراکـه کامپیوترهای عددی مدرن اولیه جمع وتفریق را بسیار سریعتر ازضرب و تقسیم انجام می‌دادند. امروزه این قرارداد را زیاد به‌کارنمی‌برند، اما اگر تعداد جمعها و تفریقها تقریباً برابر ضربها و تقسیمها باشد، این قرارداد هنوز معنی خواهد داشت.)

---

* Gauss - Jordan elimination

۱۳. درمحاسبهٔ دستی می‌توان فقط ضرایب را یادداشت کرده مجموعها وعملهای انجام‌شده را کنترل کرد. نشان دهید که درمرحلهٔ اول مثال ۱ می‌توان نوشت

سطر ۱	۲	۱	۲	۱	۶	۱۲
سطر ۲ منهای ۳ برابر سطر ۱	۰	−۹	۰	۹	۱۸	۱۸
سطر ۳ منهای ۲ برابر سطر ۱	۰	۱	−۱	−۵	−۱۳	−۱۸
سطر ۴ منهای سطر ۱	۰	۱	−۳	۰	۴	۲

این کار را برای تمام مراحل مسئلهٔ ۵ انجام دهید.

۱۴. **(حذف گاوس ـ ژردانی)** درمثال ۱، حذف گاوسی نتیجه می‌دهد

$$2w + x + 2y + z = 6 \qquad \text{(الف)}$$
$$-9x + 9z = 18 \qquad \text{(ب)}$$
$$-y - 4z = -11 \qquad \text{(پ)}$$
$$13z = 39 \qquad \text{(ت)}$$

درحذف گاوس ـ ژردانی به‌ترتیب زیرعمل می‌شود. با استفاده‌از (ب)، x را از(الف) حذف‌می‌کنیم. سپس با به‌کاربردن (پ)، y را از(ب)(دراین مسئله نیازی به‌حذف y از(ب)نیست) و (الف) حذف می‌کنیم. پس ازآن‌بااستفاده از (ت)، z را از(الف)، (ب) و (پ) حذف می‌کنیم. نشان دهید نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$2w = 4$$
$$-9x = -9$$
$$-y = 1$$
$$13z = 39$$

سرانجام‌این معادلات راحل‌کنیدتا $w=2$، $x=1$، $y=-1$، $z=3$ به‌دست آید.

۱۵. حذف گاوس ـ ژردانی را در مورد مسئلهٔ ۶ به کار برید.

۱۰.۱۹ دستگاههای معادلات خطی حل از راه تکرار

حذف گاوسی که در بخش قبل ذکرشد از **روشهای مستقیم** حل دستگاههای معادلات خطی

است ؛ در این روشها جواب را بعد از محاسباتی که حجم آن را می‌توان از قبل مشخص کرد به‌دست می‌آوریم. درمقابل، **روش غیرمستقیم** یا **تکراری** روشی است که درآن از یك تقریب جواب واقعی شروع می‌کنیم و، درصورتی که روش موفق باشد، تقریبهای بهتر و بهتری به‌کمك یك چرخهٔ محاسباتی که هرقدر لازم باشد می‌توان تکرارش کرد با دقت موردنظر به دست می‌آوریم ؛ پس دراین روش حجم محاسبات به دقت موردنظر بستگی دارد.

روشهای تکرار عمدتاً درمسائلی به‌کارمی‌روندکه سریع بودن همگرایی درآنها بر ما معلوم باشد وبنابراین، بتوانیم نسبت به روش مستقیم ، جواب را با کارکمتری به دست آوریم وهمین طور در دستگاههای مرتبه بالایی که بسیاری ازضرایب آنها صفراست، این دستگاهها اصطلاحاً دستگاههای «تنك» نامیده می‌شوندواعمال روشهای حذف درموردآنها نسبتاً پرزحمت است و به‌انبارش زیادی نیاز دارد. چنین دستگاههایی در ارتباط با مسائل ارتعاشی، معادلات‌دیفرانسیل جزئی‌وسایرکاربردهامطرح می‌شوندو دربارهٔ آنها روزبه‌روز مطالب بیشتری نوشته می‌شود.

فرآیند **تکرارگاوس ـ سیدل***دارای اهمیت عملی‌است وما آن‌را به‌کمك مثالی شرح می‌دهیم. دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
w - ۰٫۲۵x - ۰٫۲۵y \quad\quad &= ۰٫۵۰ \\
-۰٫۲۵w + x \quad\quad - ۰٫۲۵z &= ۰٫۵۰ \\
-۰٫۲۵w \quad + y - ۰٫۲۵z &= ۰٫۲۵ \\
-۰٫۲۵x - ۰٫۲۵y + z &= ۰٫۲۵
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

(چنین معادلاتی درحل‌عددی معادلات دیفرانسیل جزئی‌پیش می‌آیند.) دستگاه رابه‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
w &= \quad\quad ۰٫۲۵x + ۰٫۲۵y \quad\quad + ۰٫۵۰ \\
x &= ۰٫۲۵w \quad\quad\quad\quad + ۰٫۲۵z + ۰٫۵۰ \\
y &= ۰٫۲۵w \quad\quad\quad\quad + ۰٫۲۵z + ۰٫۲۵ \\
z &= \quad\quad ۰٫۲۵x + ۰٫۲۵y \quad\quad + ۰٫۲۵
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

وبرای تکرار این معادلات را به‌کارمی‌بریم؛ یعنی، ازتقریبی برای جواب شروع‌می‌کنیم، مثلاً، $w_0 = ۱$ ، $x_0 = ۱$ ، $y_0 = ۱$ ، $z_0 = ۱$ ، وتقریب بهتری را محاسبه می‌کنیم:

---

* Gauss - Seidel iteration

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
w_1 &= \phantom{0.25\,w_1 +{}} 0.25\,x_0 + 0.25\,y_0 \phantom{{}+0.25\,z_0} + 0.50 = 1.0000\\
x_1 &= 0.25\,w_1 \phantom{{}+0.25\,x_0 + 0.25\,y_0} + 0.25\,z_0 + 0.50 = 1.0000\\
y_1 &= 0.25\,w_1 \phantom{{}+0.25\,x_0 + 0.25\,y_0} + 0.25\,z_0 + 0.25 = 0.7500\\
z_1 &= \phantom{0.25\,w_1 +{}} 0.25\,x_1 + 0.25\,y_1 \phantom{{}+0.25\,z_0} + 0.25 = 0.6875
\end{aligned}
$$

می‌بینیم که این معادلات با جایگزین کردن آخرین تقریبها درسمت راست (۲) به دست می‌آیند. در واقع، عناصرمتناظر به محض محاسبه شدن به‌جای قبلیها قرارمی‌گیرند ، به طوری که درمعادلات دوم وسوم w_1 (ونه w_0) را به‌کارمی‌بریم و درآخرین معادلهٔ (۳) x_1 و y_1 (ونه x_0 و y_0) را. مرحلهٔ بعدی منجرمی‌شود به

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \phantom{0.25\,w_2 +{}} 0.25\,x_1 + 0.25\,y_1 \phantom{{}+0.25\,z_1} + 0.50 = 0.9375\\
x_2 &= 0.25\,w_2 \phantom{{}+0.25\,x_1 + 0.25\,y_1} + 0.25\,z_1 + 0.50 = 0.9062\\
y_2 &= 0.25\,w_2 \phantom{{}+0.25\,x_1 + 0.25\,y_1} + 0.25\,z_1 + 0.25 = 0.6562\\
z_2 &= \phantom{0.25\,w_2 +{}} 0.25\,x_2 + 0.25\,y_2 \phantom{{}+0.25\,z_1} + 0.25 = 0.6406
\end{aligned}
$$

خواننده می‌تواند نشان دهد که جواب دقیق $w = x = 0.875$ ، $y = z = 0.625$ است.

بدون اثبات متذکر می‌شویم که تکرار گاوس ـ سیدل به ازای هر انتخابی برای تقریب اولیه همگراست اگر وتنها اگر تمام مقادیر ویژهٔ (بخش ۱۳.۷) «ماتریس تکرار» $\mathbf{C}$ [(۵) همین بخش] قدر مطلق کمتر از ۱ داشته باشند، و نرخ همگرایی به**شعاع طیفی** (= بزرگترین مقدار قدرمطلقها) بستگی دارد. ماتریس $\mathbf{C}$ به طریق زیر به دست می‌آید. فرض کنید

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

دستگاه n معادله‌ای مفروض‌باشد، که درآن $\mathbf{x}$ برداری ستونی بامؤلفه‌های $x_1, \dots, x_n$، یعنی n مجهول دستگاه ، است. فرض کنید... ,$\mathbf{x}_{(0)}, \mathbf{x}_{(1)}$ دنبالهٔ تکرارمتوالی تقریبهای گاوس ـ سیدل متناظر با تقریب اولیهٔ $\mathbf{x}_{(0)}$ باشد. روش را به‌ازای $\mathbf{x}_{(0)}$ همگرا نامند ، در صورتی که دنبالهٔ تکرارمتناظر به‌جوابی از دستگاه داده شده میل کند.

فرض می‌کنیم به‌ازای $j = 1, \dots, n$ داشته باشیم $a_{jj} = 1$. (چنین چیزی‌ممکن است، درصورتی که بتوان معادلات را طوری مرتب کرد که هیچ ضریب قطری صفرنباشد؛ سپس می‌توان هرمعادله را به ضریب قطری متناظرش تقسیم کرد.) حال می‌توان نوشت $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{L}} + \widetilde{\mathbf{U}}$ ، که درآن $\mathbf{I}$ ماتریس یکهٔ n سطری است ، و $\widetilde{\mathbf{L}}$ و $\widetilde{\mathbf{U}}$ به ترتیب ماتریسهای بالا مثلثی وپایین مثلثی هستندکه عناصر روی قطر اصلی آنها صفراست. باقرار دادن این صورت $\mathbf{A}$ در $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$، داریم $(\mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{L}} + \widetilde{\mathbf{U}})\mathbf{x} = \mathbf{b}$. معمول است که بنویسند

$\tilde{\mathbf{L}}=-\mathbf{L}$ و $\tilde{\mathbf{U}}=-\mathbf{U}$؛ دراین صورت

$$(\mathbf{I}-\mathbf{L}-\mathbf{U})\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \text{و آنگاه} \quad (\mathbf{I}-\mathbf{L})\mathbf{x}=\mathbf{b}+\mathbf{U}\mathbf{x}$$

از روی این رابطه فرمول گاوس ـ سیدل را به‌دست می‌آوریم:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{L})\mathbf{x}_{(m+1)}=\mathbf{b}+\mathbf{U}\mathbf{x}_{(m)} \qquad (m=0, 1, \dots). \tag{۴}$$

در واقع، $\mathbf{U}$ بالا مثلثی است وعناصر غیرصفرش متناظر با جاهایی هستندکه درآنها باید تقریبهای «قدیمی» را به‌کار بریم زیرا تقریبهای «جدید» هنوز در دست نیستند. برعکس، $\mathbf{L}$ پایین مثلثی است وعناصر غیرصفرش متناظر با جاهایی هستندکه درآنها عناصر تقریب «جدید» $\mathbf{x}_{(m+1)}$ در دست هستند. $\mathbf{x}_{(m+1)}$ را از (۴) پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{x}_{(m+1)}=(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}+\mathbf{C}\mathbf{x}_{(m)} \quad \text{که در آن} \quad \mathbf{C}=(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} \tag{۵}$$

همان ماتریس است که مقادیر ویژه‌اش برای بررسی همگرایی لازمند.

تکرار گاوس ـ سیدل یك روش **تصحیحات متوالی** است، زیرا دراین روش تقریبهای جدید را به محض محاسبه جایگزین تقریبهای قدیمیتر می‌کنیم. روشی را روش **تصحیحات همزمان** می‌نامندکه درآن هیچ عنصری ازتقریب $\mathbf{x}_{(m+1)}$ را تازمانی‌که‌تمام عناصر $\mathbf{x}_{(m+1)}$ محاسبه نشده‌اند به‌کارنبریم. روشی ازاین‌نوع روش **تکرار ژاکوبی** است که‌شبیه روش‌تکرار گاوس‌ـسیدل‌است اما درآن‌تاقبل ازکامل شدن هرمرحله‌مقادیرتصحیح شده به‌کار برده‌نمی‌شوندوسپس‌برای چرخهٔ بعد $\mathbf{x}_{(m+1)}$ رابه‌جای $\mathbf{X}_{(m)}$ قرارمی‌دهند. بنابراین اگر $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را به صورت $\mathbf{x}=\mathbf{b}+(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}$ بنویسیم تکرار ژاکوبی با نمادگذاری ماتریسی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{x}_{(m+1)}=\mathbf{b}+(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}_{(m)}. \tag{۶}$$

این‌روش ازلحاظ نظری اهمیت زیادی‌دارد. روش ژاکوبی به‌ازای هر $\mathbf{x}_{(0)}$ی همگراست اگر و تنها اگر شعاع طیفی $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ کمتراز ۱ باشد؛ دراینجا بازهم فرض می‌کنیم به ازای $j=1, 2, \dots, n$، $a_{jj}=1$.

درمورد دستگاه مفروض $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ می‌توان نوشت

$$\mathbf{r}=\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b},$$

$\mathbf{r}$ را **پس‌مانده** می‌نامند. واضح است که $\mathbf{r}=0$ اگروتنها اگر $\mathbf{x}$ جواب باشد. بنابراین به‌ازای جوابهای تقریبی خواهیم داشت $\mathbf{r}\neq 0$. درتکرار گاوس ـسیدل درهرمرحله یك مؤلفه از جواب تقریبی را تغییر داده یا وامی‌هلیم به طوری‌که یك مؤلفهٔ $\mathbf{r}$ را به صفر برسانیم. از این رو تکرارگاوس ـ سیدل به دسته روشهایی تعلق داردکه معمولا **روشهای واهلشی** نامیده می‌شوند.

معکوس ماتریس وارون پذیر $\mathbf{A}$ را می‌توان با روش تکراری‌که برفکر اولیهٔ زیر

مبتنی است تعیین کرد. x ،وارون عدد داده‌شدهٔ a در رابطهٔ $xa=1$ صدق می‌کند؛هر گاه بخواهیم بدون انجام دادن عمل تقسیم x را معین کنیم ، می‌توانیم روش نیوتن را در موردتابع $f(x)=x^{-1}-a$ اعمال کنیم. چون‌داریم $f'(x)=-1/x^{2}$، تکرارنیوتن عبارت است از

$$x_{m+1}=x_m-(x_m^{-1}-a)(-x_m^{2})=x_m(2-ax_m).$$

این رابطه فرمول تکرار مشابهی را برای تعیین معکوس $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}$ ماتریس $\mathbf{A}$ تداعی می کندکه عبارت است از

$$\mathbf{X}_{(m+1)}=\mathbf{X}_{(m)}(2\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{X}_{(m)}). \qquad (7)$$

این فرآیند همگراست (وقتی m به سمت ∞ میل می‌کند $\mathbf{A}^{-1}$ را تولید می‌کند) اگر وتنهااگر $\mathbf{X}_{(0)}$ طوری انتخاب شودکه قدرمطلق‌تمام مقادیر ویژهٔ $\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{X}_{0}$ کمتراز ۱ باشد (ر. ك. مرجع [G17] ، مندرج درضمیمهٔ ۱) . این روش برای مواردی مناسب است که ضربهای موجود درآنها ساده باشند (مثلا، صفرهای زیادی در $\mathbf{A}$ وجود داشته باشد). درعمل انتخاب مناسب $\mathbf{X}_{(0)}$، اگرغیر ممکن نباشد دشوار است واین روش بیشتر برای تصحیح معکوس غیر دقیقی که از روشهای دیگر به‌دست آمده است به‌کارمی‌رود.

مسائل بخش ۱۰.۱۹

۱. درستی جواب (۱)را که درمتن‌درس داده‌شده است تحقیق کنید. (۱) راباحذف گاوس حل کنید.

۲. دومرحلهٔ دیگر تکرار گاوس ـ سیدل متن درس را محاسبه کنید.

۳. $\mathbf{C}$ [ر. ك. (۵)] را برای دستگاه (۱) بیابید.

۴. تکرار ژاکوبی را درمورد دستگاه (۱) اعمال کنید؛ از $w_0=1$ ، $x_0=1$ ، $y_0=1$ ، $z_0=1$ آغاز کنید، دومرحله پیش بروید و دقت نتیجه را با دقت آنچه در متن درس حساب شده مقایسه کنید.

روش تکرارگاوس ـ سیدل را درمورد دستگاههای زیر به کار برید. سه مرحله پیش روید ، از ۱، ۱، ۱ شروع کنید .

۵.
$$\begin{aligned}10x-y-z&=13\\ x+10y+z&=36\\ -x-y+10z&=35\end{aligned}$$

۶.
$$\begin{aligned}4x+y\qquad&=-8\\ 4y+z&=2\\ x\qquad+2z&=2\end{aligned}$$

۷.
$$
\begin{aligned}
4x+2y+\ z&=14\\
x+5y-\ z&=10\\
x+\ y+8z&=20
\end{aligned}
$$

۸. با شروع از ۰، ۰، ۰ نشان دهید که در مورد دستگاه زیر تکرار گاوس ـ سیدل همگراست، درحالی‌که تکرار ژاکوبی واگراست.

$$
\begin{aligned}
2x+\ y+\ z&=4\\
x+2y+\ z&=4\\
x+\ y+2z&=4
\end{aligned}
$$

۹. منطقی به‌نظر می‌رسد که تکرار گاوس ـ سیدل را بهتر از تکرار ژاکوبی تصور کنیم. در واقع این دو روش قابل مقایسه نیستند. با نشان دادن اینکه در مورد دستگاه زیر تکرار ژاکوبی همگراست درحالی‌که تکرار گاوس ـ سیدل واگراست، قابل مقایسه نبودن دو روش را تشریح کنید.

(راهنمایی. از مقادیر ویژه استفاده کنید.)

$$
\begin{aligned}
x\qquad+\ z&=2\\
-x+\ y\qquad&=0\\
x+2y-3z&=0
\end{aligned}
$$

۱۰. نشان دهید که به‌ازای $\mathbf{X}_{(m)}=\mathbf{A}^{-1}$ فرمول (۷) به $\mathbf{X}_{(m+1)}=\mathbf{A}^{-1}$ منجر می‌شود.

۱۱. تقریب $\mathbf{X}_{(0)}$ درمورد معکوس ماتریس $\mathbf{A}$ را نظر بگیرید:

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&5&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\ \text{و}\ \mathbf{X}_{(0)}=\begin{pmatrix}0.5&-0.1&0.4\\0&0.2&0\\-0.4&0.3&-1.5\end{pmatrix}
$$

به‌کمك (۷)، $\mathbf{X}_{(0)}$ را محاسبه کنید. $\mathbf{A}^{-1}$ را معین کنید و نشان دهید که انحراف هر عنصر $\mathbf{X}_{(1)}$ ازعنصرمتناظرش در $\mathbf{A}^{-1}$ حداکثر ۰٫۱ است درحالی که برای $\mathbf{X}_{(0)}$ بیشترین انحراف ۰٫۰۳ است.

۱۲. (۷) را با

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\ \text{برای ماتریس}\ \mathbf{X}_{(0)}=\begin{pmatrix}2.9&-0.9\\-4.9&1.9\end{pmatrix}
$$

به‌کاربرید. نشان دهید که شرایط همگرایی صادق است. دومرحله پیش بروید ونتایج را با وارون دقیق $\mathbf{A}$ مقایسه کنید.

۱۱.۱۹ دستگاههای معادلات خطی بدطرحی

دستگاه معادلات خطی را **خوش طرح** نامند، اگر وجود خطاهای کوچك درضرایب یا در فرآیند حل آن تأثیرکمی درجواب داشته باشد. دراین صورت به‌طورنسبی معادلات قویاً مشخص‌کنندهٔ جواب هستند.

دستگاه معادلات خطی را **بدطرح** نامند هرگاه وجود خطاهای جزئی درضرایب یا درفرآیند حل اثر زیادی در جواب داشته باشد. دراین حالت معادلات جواب را به طور ضعیف مشخص می‌کنند.

به‌عنوان مثال، نمایش‌دومعادلهٔ خطی دومجهولی دوخط راست است. چنین‌دستگاهی بدطرح است اگر وتنها اگر زاویهٔ γ ی بین دوخط‌کوچك باشد، یعنی اگر و تنها اگر دو خط تقریباً موازی باشند. در واقع، دراین حالت تغییرکوچکی در یکی ازضرایب ممکن است جابه‌جایی بزرگی درنقطهٔ تقاطع دوخط را سبب شود (ر. ك. شکل ۳۵۷). درمورد دستگاههای معادلات خطی بزرگتر دراصل همین وضعیت برقرار است، اما دیگرچنین‌تعبیر هندسی ساده‌ای ممکن نیست وما قادر به‌دنبال‌کردن جزئیات مسئله نیستیم.

مثال ۱. یك دستگاه بدطرح

می‌توان تحقیق‌کرد که جواب دستگاه

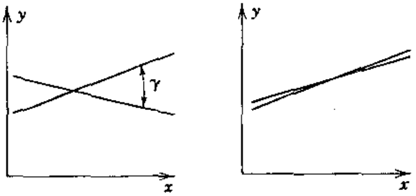
$$0.9999x - 1.0001y = 1$$
$$x - y = 1$$

عبارت است از $x = 0.5$ و $y = -0.5$، درحالی‌که دستگاه

$$0.9999x - 1.0001y = 1$$
$$x - y = 1 + \varepsilon$$

دارای جواب $x = 0.5 + 5000.5\varepsilon$ ، $y = -0.5 + 4999.5\varepsilon$ است. این‌نشان می‌دهد که دستگاه بد طرح است زیرا تغییری در ε باعث تغییری به اندازهٔ 5000ε در جواب می‌شود. ▲

بدطرحی را می‌توان رهیافتی به‌تکینی دانست. بدطرحی باکم شدن ارقام معنی‌دار درحین محاسبه همراه است و این‌کم شدن ارقام معنی‌دار طوری است که یافتن معکوس یا



شکل ۳۵۷. دستگاه دومعادلهٔ خطی دومجهولی
(الف) خوش طرح و (ب) بدطرح

جواب دقیق معادلات مربوطه را دشوار می‌کند. چندین محك برای پی‌بردن به بدطرحی پیشنهاد شده است اما کاربرد عمومی این کلمه هنوز برای بیان یك مفهوم کیفی است.

در دستگاههای بد طرح، برای آنکه جواب نهایی تعداد معینی رقم اعشاری داشته باشد باید محاسبات واسطه را باتعداد خیلی بیشتری اعشار انجام دهیم (وقتی که خطای گردکردن وجود دارد). اگربتوانیم ضرایب یك دستگاه بدطرح واعداد سمت راست آن را ازفرمولی استخراج کنیم، می‌توانیم آنهارا بامختصرکوششی بادقت دلخواه محاسبه کنیم وبنابراین باوضع دشواری روبرو نخواهیم بود. اشکال جدی مربوط به‌حالتی است که در آن ضرایب واعداد یادشده ازآزمایش وبا دقتی که الزاماً محدود است به دست می‌آیند. دراین صورت این واقعیت‌را باید بپذیریم که بی‌دقتیهای موجود در داده‌ها باعث می‌شوند که جواب حاصل دارای حدود خطای بزرگی باشد. دراین صورت چه بسا ناچار باشیم مسئلهٔ اصلی را برحسب دستگاه معادلات دیگری که به اندازهٔ لازم خوش طرح باشد بیان کنیم.

بعضی ازنشانه‌های بدطرحی به‌قرار زیرند: $|\det \mathbf{A}|$ درمقایسه بااندازهٔ ماکزیمم $|a_{jk}|$ ها و جملات سمت راست دستگاه کوچك است. تقریبهای ضعیفی که برای جواب به کار می‌بریم ممکن است باقیمانده‌های کوچکی تولید کنند (دنبالهٔ همین بخش را مطالعه کنید). قدرمطلق عناصر $\mathbf{A}^{-1}$ درمقایسه باقدرمطلق عناصرجواب بزرگند.

هرگاه قدرمطلق عناصرواقع برقطر اصلی درمقایسه با قدرمطلق سایرعناصر بزرگ باشد، دستگاه خوش طرح است. هرگاه ماتریسی مربعی که بزرگترین عناصرش بین ۱ و ۱۰ هستند معکوسی داشته باشد که بزرگترین عناصر آن هم ازمرتبهٔ یك باشند، دراین صورت دستگاه معادلات خطی وابسته به ماتریس خوش طرح است.

هنگامی که دستگاه بدطرح است امکان دارد بخواهیم جواب اصلاح شدهٔ

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

را از جواب تقریبی $\mathbf{x}_{(1)}$ به دست آوریم. **باقیماندهٔ** متناظر با $\mathbf{x}_{(1)}$ عبارت است از

$$\mathbf{r}_{(1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)}$$

داریم

$$\mathbf{Ax}_{(1)}=\mathbf{b}-\mathbf{r}_{(1)}$$

وبنابراین

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{(1)})=\mathbf{r}_{(1)} \qquad (۲)$$

واین نشان می‌دهد تصحیحی که باید در $\mathbf{x}_{(1)}$ انجام شود برای یافتن جواب(۱)،عبارت است ازجواب (۲). جزدرموردی که دستگاه خیلی بدطرح باشد مؤلفه‌های $\mathbf{r}_{(1)}$ ازمؤلفه‌های $\mathbf{b}$ کوچکترخواهند بود. تفصیل همین مطالب رادرموردمحاسبه باماشینهای خودکارمی‌توانید در مرجع [G۱۲] ، ضمیمهٔ ۱ ، پیدا کنید.

مسائل بخش ۱۱۰۱۹

۱. درمثال ۱، دستگاه را برضریبی که بزرگترین قدرمطلق را دارد تقسیم کرده دترمینان آن را پیدا کنید. بحث کنید. آیا دترمینان یك دستگاه بدطرح می‌تواند مقدار بزرگی داشته باشد؟

۲. درمثال ۱، باقرار دادن $\zeta=x+y+1$ ، $\eta=x-y-1$ دستگاه بدطرح‌دیگری به دست آورید.

۳. نشان دهید که γ زاویهٔ بین دوخطی که بامعادلات

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\ \ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

نمایش داده می‌شوند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan\gamma=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})/(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}),$$

وسپس نتایج این فرمول را درارتباط با بدطرحی شرح دهید.

۴. نشان دهید که جواب دستگاه

$$۶x_1+۷x_2+۸x_3=۲۱$$

$$۷x_1+۸x_2+۹x_3=۲۴$$

$$۸x_1+۹x_2+۹x_3=۲۶$$

عبارت است از $x_1=۱$ ، $x_2=۱$ ، $x_3=۱$ دترمینان دستگاه و باقیماندهٔ متناظر با $x_1=-۰٫۸$ ، $x_2=۲٫۹$ ، $x_3=۰٫۷$ را حساب کنید. بحث کنید.

۵. فرض کنید

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۱۱۱ & -۱۰۰ \\ -۱۱۰ & ۱۰۰ \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۱٫۰۰ & ۱٫۰۰ \\ ۱٫۰۰ & ۱٫۰۱ \end{pmatrix}$$

نشان دهیدکه **AB** تقریباً برابر با ماتریس یکه‌است، درحالی‌که **BA** چنین نیست. بحث کنید.

۶. با به‌کار بردن حذف گاوس نشان دهیدکه جواب دستگاه

$$x+\frac{۱}{۲}y+\frac{۱}{۳}z=۱$$

$$\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۳}y+\frac{۱}{۴}z=۰$$

$$\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۴}y+\frac{۱}{۵}z=۰$$

عبارت است از $x=۹$ ، $y=-۳۶$ ، $z=۳۰$. مسئله را دوباره با این فرض بررسی کنیدکه محاسبات باکامپیوتری‌که تنها دو رقم معنی‌دار را درمحاسبات به‌کار می‌برد انجام می‌گیرد. جوابهارا مقایسه‌کرده دراین باره بحث کنید. (ماتریس‌ضریب را ماتریس هیلبرت سه سطری می‌نامند.)

۷. اندازهٔ عناصرمعکوس ماتریس هیلبرت $(n\times n)$ با سرعت زیادی بزرگ می‌شود. برای روشن شدن مطلب تحقیق‌کنیدکه معکوس ماتریس هیلبرت (۴×۴)

$$\begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۶} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۷} \end{pmatrix}$$

عبارت است از

$$\begin{pmatrix} ۱۶ & -۱۲۰ & ۲۴۰ & -۱۴۰ \\ -۱۲۰ & -۱۲۰۰ & -۲۷۰۰ & ۱۶۸۰ \\ ۲۴۰ & -۲۷۰۰ & ۶۴۸۰ & -۴۲۰۰ \\ -۱۴۰ & ۱۶۸۰ & -۴۲۰۰ & ۲۸۰۰ \end{pmatrix}$$

ماتریس هیلبرت صرفاً یك پدیدهٔ صرف علمی نیست، ماتریسهای مشابهی هستندکه در رابطه با برازاندن منحنی به‌کمك حداقل مربعات، چنانچه دربخش بعد خواهیم دید، به‌کار می‌روند.

۸. تحقیق‌کنیدکه معکوس ماتریس ضریب **A** ی دستگاه

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

عبارت است از

$$\begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

و جواب عبارت است از $w=x=y=z=1$. **نشان دهید که** $w=9.2$ ، $x=-12.6$ ، $y=4.5$ ، $z=-1.1$ باخطای ± 0.1 **درمعادلات دستگاه** صدق می‌کند. نتیجه بگیرید که $\mathbf{A}$ بد طرح است. **روش تکرار گاوس ـ سیدل را با** $x_0=0$ به‌کاربرید؛ دو یا سه مرحله پیش بروید **ونشان دهید که همگرایی کند است.** (اطلاعات بیشتری درمورد این دستگاه درمرجع [G17] ،صفحهٔ **۲۴۲ یافت‌می‌شود.**)

۱۲.۱۹ روش حداقل مربعات

در **برازاندن منحنی**، n نقطه (جفت عدد) به صورت

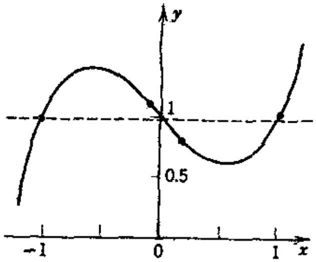
$$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$$

دراختیار داریم و می‌خواهیم تابع $f(x)$ را طوری تعیین کنیم که $f(x_j) \approx y_j$ ، $j=1, \cdots, n$. نوع تابع (مثلا چندجمله‌ای، تابع‌نمایی، تابع سینوسی‌یا کسینوسی) را می‌توان با توجه به طبیعت مسئله (مثلا قانون فیزیکی مربوطه) حدس زد؛ دربسیاری از موارد می‌توان از چندجمله‌ایها استفاده کرد.

اگربخواهیم تساوی دقیق $f(x_1)=y_1$ ، ... ، $f(x_n)=y_n$ را برقرار کنیم‌وبه‌این منظور از چندجمله‌ایهایی که درجهٔ آنها به‌اندازهٔ کافی بالاست استفاده کنیم، می‌توانیم‌یکی از روشهایی راکه دربخش ۴.۱۹ در ارتباط با درون‌یابی مورد بحث قرار‌گرفت به‌کار بریم. معذلك وضعیتهایی وجود دارند که درآنها این جواب، جواب مناسبی برای مسئلهٔ واقعی نیست. مثلا با چهار نقطهٔ

$$(1) \quad (-1.0,\ 1.000),\ (-0.1,\ 1.099),\ (0.2,\ 0.808),\ (1.0,\ 1.000)$$

چندجمله‌ای لاگرانژ $f(x)=x^3-x+1$ (شکل ۳۵۸) متناظر می‌شود، اما اگر این نقاط را رسم کنیم خواهیم دید که تقریباً روی یك خط مستقیم قرارمی‌گیرند. از این‌رو اگر این مقادیر ازآزمایشی به‌دست آمده باشند و بدین لحاظ دارای‌یك خطای‌اندازه‌گیری باشند، واگر ماهیت آزمایش رابطه‌ای خطی اقتضا کند، بهتر آن است که خط مستقیمی را از نقاط بگذرانیم (شکل ۳۵۸). ازچنین خطی می‌توان برای پیش‌بینی مقادیری که برای سایر مقادیر x انتظار می‌رود استفاده کرد. درموارد ساده خط مستقیم را می‌توان به کمك چشم برازاند، اما اگرنقاط پراکنده باشند این روش قابل اطمینان نیست و دراین صورت بهتر است ازیك اصل‌ریاضی استفاده کنیم. روشی که براین‌مبنا قرارگرفت وکاربرد بسیارزیادی



شکل ۳۵۸. برازاندن تقریبی خط مستقیم

دارد **روش حداقل مربعات** گاوس است. در حال حاضر این روش را بـه صورت زیر صورت بندی می کنیم.

روش حداقل مربعات. خط مستقیم

$$y=a+bx$$

باید طوری به نقاط (x_1, y_1)، . . .، (x_n, y_n) برازانده شود که مجموع مربعات فواصل نقاط مزبور ازاین خط مستقیم حداقل باشد؛ فاصله‌ها درامتداد قائم (امتداد y) اندازه‌گرفته می‌شوند.

عرض نقطه‌ای کـه روی خط مستقیم قرار دارد و طولش x_j است برابر است بـا $a+bx_j$. بنابراین فاصلهٔ آن از نقطهٔ (x_j, y_j) عبارت است از $|y_j-a-bx_j|$ (ر. ك. شکل ۳۵۹) ومجموع مربعات برابراست با

$$q=\sum_{j=1}^{n}(y_j-a-bx_j)^2.$$

q به a و b بستگی دارد. شرط لازم برای مینیمم بودن q این است که

$$\frac{\partial q}{\partial a}=-2\sum(y_j-a-bx_j)=0$$

(۲)

$$\frac{\partial q}{\partial b}=-2\sum x_j(y_j-a-bx_j)=0$$

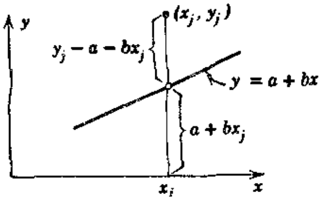
(مجموع را برای j از ۱ تا n حساب می کنیم). بنابراین

$$an+b\sum x_j=\sum y_j$$

(۳)

$$a\sum x_j+b\sum x_j^2=\sum x_jy_j$$

این معادلات را **معادلات نرمال** مسئله می‌نامند.



شکل ۳۵۹. فاصلهٔ قائم نقطهٔ (x_j, y_j) از خط مستقیم $y=a+bx$

مثال ۱. خط مستقیم

بااستفاده ازروش حداقل مربعات خط مستقیمی به‌چهار نقطهٔ (۱) برازانید. محاسبه‌می‌کنیم

$$n=۴\quad \sum x_j=۰٫۱,\quad \sum x_j^{۲}=۲٫۰۵,\quad \sum y_j=۳٫۹۰۷,\quad \sum x_j y_j=۰٫۰۵۱۷$$

ازاین رو معادلات قائم عبارتند از

$$۴a+۰٫۱۰b=۳٫۹۰۷۰$$

$$۰٫۱a+۲٫۰۵b=۰٫۰۵۱۷$$

جواب عبارت است از $a=۰٫۹۷۷۳$ ، $b=-۰٫۰۲۲۴$ ، و خط زیر را به دست می‌آوریم (شکل ۳۵۸):

$$y=۰٫۹۷۷۳-۰٫۰۲۲۴x \qquad \blacktriangle$$

برازاندن منحنی‌را می‌توان ازچندجمله‌ای $y=a+bx$ به‌چندجمله‌ای درجه mام

$$p(x)=b_۰+b_۱x+\cdots+b_mx^m$$

تعمیم داد. دراین حالت q به صورت زیر درمی‌آید:

$$q=\sum_{j=۱}^{n}(y_j-p(x_j))^۲$$

که به $m+۱$ پارامتر $b_۰$ ، . . . ، b_m بستگی دارد. دراین صورت به جای (۲)، $m+۱$ شرط

$$\frac{\partial q}{\partial b_۰}=۰,\ \ldots,\ \frac{\partial q}{\partial b_m}=۰,$$

را داریم که دستگاهی است از $m+۱$ معادلهٔ نرمال. خواننده می‌تواند نشان دهد که در مورد چندجمله‌ای درجه دوم

$$p(x)=b_۰+b_۱x+b_۲x^۲ \qquad (۴)$$

معادلات نرمال عبارتند از (جمعها از ۱ تا n)

$$
\begin{aligned}
b_0 n \quad + b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 &= \sum y_j \\
b_0 \sum x_j + b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 &= \sum x_j y_j \qquad (5) \\
b_0 \sum x_j^2 + b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 &= \sum x_j^2 y_j
\end{aligned}
$$

مسائل بخش ۱۲۰۱۹

درهرموردنقاط داده‌شده را درصفحهٔ xy مشخص کنید وخط مستقیمی را: (الف) باچشم، (ب) باروش حداقل مربعات به‌آنها برازانید.

۱. تعداد خطاهای تلگرافچیهایی که با تلگراف بی‌سیم کار می‌کنند به صورت تابعی از دمای x [°C]

x	۲۶	۲۸	۳۱	۳۳
y	۱۲٫۰	۱۱٫۵	۱۵٫۳	۱۷٫۳

۲. (۱, ۱)، (۲, ۲+k)، (۳, ۳) درحالی‌که k یك ثابت است.

۳. مقدار آهن y[%] موجود درنوع معینی از سنگ آهن به صورت تابعی از چگالی x[gr/cm³]

x	۲٫۸	۲٫۹	۳٫۰	۳٫۱	۳٫۲	۳٫۲	۳٫۲	۳٫۳	۳٫۴
y	۲۷	۲۳	۳۰	۲۸	۳۰	۳۲	۳۴	۳۳	۳۰

۴. (۲, ۵)، (۳, ۹)، (۴, ۱۵)، (۵, ۲۱)

۵. (۰, ۲٫۳)، (۲, ۴٫۱)، (۴, ۵٫۷)، (۶, ۶٫۹)

۶. (۴, ۳)، (۱۵, ۱۶)، (۳۰, ۱۳)، (۱۰۰, ۷۰)، (۲۰۰, ۹۰)

۷. اگر اتومبیلی برروی جادهٔ مستقیمی با تندی ثابت $v = b_1$[m/s] حرکت‌کند، موضع y[m] آن در زمان t[s] عبارت است از $y = b_0 + b_1 t$. فرض‌کنید مقادیر اندازه‌گرفته شده عبارت باشند از

t	۰	۳	۵	۸	۱۰
y	۰	۳۰	۴۰	۷۰	۹۰

این مقادیر را در صفحهٔ ty مشخص‌کنید. خط مستقیمی را (الف) با چشم، (ب) با

روش حداقل مربعات به این نقاط برازانید . بـاتوجه به این خط تندی حرکت را تخمین بزنید.

در هریك ازموارد زیرسهمی (۴) را با روش حداقل مربعات معین کنید.

۸. (۱, ۲) ،(۰, ۱) ،(۰, ۰) ،(—۱, ۲)

۹. (۶, ۴) ،(۴, ۱) ،(۲, ۰) ،(۱, ۱) ،(۰, ۳)

۱۰. (۱٫۴,۷۴۰۰)، (۱٫۸, ۷۵۰۰)، (۲٫۳, ۷۶۰۰)، (۳٫۰, ۷۵۰۰)، (۴٫۰, ۷۲۰۰)

۱۱. مسئلهٔ ۸ را باروش چلسکی حل کنید (بخش ۹.۱۹).

۱۲. معادلات نرمال را درمورد چندجمله‌ای درجه سه معین کنید.

۱۳. وقتی اصل حداقل مربعات را درمورد یـك چندجمله‌ای به‌کار می‌بـریم ، می‌خواهیم رابطهٔ زیر حتی‌الامکان برقرارباشد:

$$b_0+b_1x_j+b_2x_j^2+\cdots+b_mx_j^m=y_j \quad (j=1, \cdots, n).$$

ماتریس $\mathbf{C}$ را طوری تعیین کنید که بتوان نوشت $\mathbf{Cb}=\mathbf{y}$ و نشان دهید کـه دراین صورت معادلات نرمال را می‌توان به‌شکل $\mathbf{C}^T\mathbf{Cb}=\mathbf{C}^T\mathbf{y}$ نوشت.

۱۴. ماتریس ضریب (۵)، کـه آن را $\mathbf{C}$ می‌نامیم ، متقارن و معین مثبت (تعریف دربخش ۱۲.۷) است، بنابراین روش چلسکی (بخش ۹.۱۹) برای حـل (۵) بسیار مناسب است و همین وضع را دارنـد معادلات نرمال درمورد چندجمله‌ایهایی که از درجات بالاتر هستند. امـا $\mathbf{C}$ ممکن است بدطرح باشد. برای روشن شدن مطلب، به ترتیب زیرعمل کنید. نشان دهید

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad \text{که در آن} \quad c_k=\sum_{j=1}^{n} x_j^k$$

فرض کنید n بزرگ است و x_j دربازهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ قرار گرفته وبه‌طوریکنواخت توزیع شده باشد. ازتعریف انتگرال نتیجه بگیرید

$$\int_0^1 x^k dx \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k=\frac{1}{n}c_k.$$

باانتگرال گیری $\mathbf{C}=n\mathbf{H}$ راکه درآن $\mathbf{H}$ ماتریس‌هیلبرت (۳ × ۳) است به‌دست آورید (تعریف ماتریس هیلبرت دربخش۹ ۱۱.۱، مسئلهٔ ۶، آمده‌است). نتیجه‌بگیرید

که درمورد چندجمله‌ای درجه m، به ماتریس هیلبرت $(m+1)$ سطری می‌رسیم که به‌ازای mهای بزرگ بدطرح است.

۱۵. درمسائل مربوط به‌رشد اغلب برازاندن تابعی نمایی مانند $y=b_0e^{b_1x}$ باروش‌حداقل مربعات لازم می‌آید. نشان دهید که بالگاریتم گیری می‌توان این‌کار را به تعیین یك خط مستقیم تبدیل کرد.

۱۳.۱۹ اشتمال مقادیر ویژهٔ ماتریس

مقدار ویژه یا **مقدار مشخصه** (یا ریشهٔ داکد) یك ماتریس مربعی n سطری (حقیقی یا مختلط) $\mathbf{A}=(a_{jk})$، بنا به‌تعریف، عددی است مانند λ که به‌ازای آن معادلهٔ برداری

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x} \tag{۱}$$

جوابی غیربدیهی، یعنی $\mathbf{x}\neq 0$، داشته باشد؛ دراین صورت $\mathbf{x}$ را آن **بردار ویژه** یا **بردار مشخصه** $\mathbf{A}$ که با مقدار ویژهٔ λ متناظراست می‌نامند. مجموعهٔ تمام مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ را **طیف** $\mathbf{A}$ می‌نامند. مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ

$$D(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \tag{۲}$$

هستند، که درآن $\mathbf{I}$ ماتریس یکهٔ n سطری است. $D(\lambda)$ **دترمینان مشخصه** نام دارد و می‌توان آن را بایك چندجمله‌ای درجه n برحسب λ نمایش داد که **چندجمله‌ای مشخصهٔ** متناظر با $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود. نتیجه می گیریم که $\mathbf{A}$ حداقل یك و حداکثر n مقدار ویژه که عدداً متفاوتند داراست. تفصیل مطلب را می‌توانید دربخش ۱۳.۷ ببینید.

وقتی $\mathbf{A}$ را داریم می‌توانیم نخست ضرایب چندجمله‌ای مشخصه وبعد ریشه‌ها را، مثلا باروش نیوتن، تعیین کنیم. ولی اگر n بزرگ‌باشد هردومرحله متضمن محاسبات‌وقتگیر بوده و عاقلانه آن است که روش کاراتری را دنبال‌کنیم. اساساًدو دسته روش وجوددارد:

۱. روشهای به دست آوردن کرانهای مقادیر ویژه،

۲. روشهای محاسبهٔ مقادیر تقریبی برای مقادیر ویژه.

دراینجا چند مثال متعارف از این دو دسته عرضه می‌شود. در مراجع [C۲]، [C۳]، [C۱۶]، ضمیمهٔ ۱ مثالهای بیشتری می‌توان یافت.

قضیهٔ جالب زیرکه توسط گرشگورین[1] (Gershgorin) اثبات شده است ناحیه‌ای متشکل ازقرصهای دایره‌ای بسته را می‌دهد که تمام مقادیر ویژهٔ ماتریس داده شده را دربر دارد.

---

1. *Bull-Acad. Sciences de l'URSS*, Classe mathém., 7-e série, Leningrad, 1931, p. 749.

قضیهٔ ۱

فرض کنید λ یك مقدارویژهٔ ماتریس دلخواه مربعی nسطری $\mathbf{A}=(a_{jk})$ باشد. دراین‌صورت به‌ازای بعضی از مقادیر درست k $(\text{۱} \leqslant k \leqslant n)$ داریم:

$$(\text{۳}) \quad |a_{kk}-\lambda| \leqslant |a_{k\text{۱}}|+|a_{k\text{۲}}|+\cdots+|a_{k,k-\text{۱}}|+|a_{k,k+\text{۱}}|+\cdots+|a_{kn}|.$$

اثبات. فرض کنید $\mathbf{x}$ یکی از بردارهای ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ λ ی $\mathbf{A}$ باشد. دراین صورت

$$(\text{۴}) \qquad (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\text{۰} \quad \text{یا} \quad \mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

فرض کنید x_k مؤلفه‌ای از x باشد که بزرگترین قدرمطلق را دارد. دراین صورت داریم $|x_m/x_k| \leqslant \text{۱}\ (m=\text{۱}, \cdots, n)$. معادلهٔ برداری (۴) معادل است بادستگاهی متشکل‌از n معادله کـه هر کدام یکی از مؤلفه‌های بردارهـای موجود در دوطـرف (۴) را در بر می‌گیرند؛ k امین معادله ازاین n معادله عبارت است از

$$a_{k\text{۱}}x_\text{۱}+\cdots+a_{k,k-\text{۱}}x_{k-\text{۱}}+(a_{kk}-\lambda)x_k+a_{k,k+\text{۱}}x_{k+\text{۱}}+\cdots+a_{kn}x_n=\text{۰}$$

از روی این معادله داریم

$$a_{kk}-\lambda=-a_{k\text{۱}}\frac{x_\text{۱}}{x_k}-\cdots-a_{k,k-\text{۱}}\frac{x_{k-\text{۱}}}{x_k}-a_{k,k+\text{۱}}\frac{x_{k+\text{۱}}}{x_k}-\cdots-a_{kn}\frac{x_n}{x_k}$$

از دوطرف این معادله قدرمطلق گرفته نامساوی مثلثی را به‌کارمی‌بریم:

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

(دراینجا a و b اعداد مختلطند) و می‌بینیم که

$$\left|\frac{x_\text{۱}}{x_k}\right| \leqslant \text{۱}, \ \cdots, \left|\frac{x_n}{x_k}\right| \leqslant \text{۱}$$

وبنابراین (۳) به دست می‌آید وقضیه ثابت می‌شود. ▲

به‌ازای هریك ازمقادیر $k=\text{۱}, \ldots, n$ نامساوی (۳) قرص دایره‌ای بسته‌ای را درصفحهٔ مختلط λ مشخص می‌کندکه مرکز آن a_{kk} است وشعاعش ازعبارت سمت‌راست (۳) به‌دست می‌آید. بنا به قضیهٔ ۱ هریك از مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ دریکی از این n قرص قرار می‌گیرد.

مثال ۱. کاربرد قضیهٔ‌گرشگورین

ازقضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که مقادیر ویژهٔ ماتریس

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۲۶ & -۲ & ۲ \\ ۲ & ۲۱ & ۴ \\ ۴ & ۲ & ۲۸ \end{pmatrix}$$

درسه قرص زیر قرار دارند (شکل ۳۶۰):

D_1 : به مرکز ۲۶، شعاع $۴ = ۲ + |-۲|$

D_2 : به مرکز ۲۱، شعاع $۶ = ۴ + ۲$

D_3 : به مرکز ۲۸، شعاع $۶ = ۲ + ۴$

(می‌توان نشان داد که مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ عبارتند از ۳۰، ۲۵ و ۲۰.) ▲

کرانهای قدرمطلق مقادیر ویژه ازقضیهٔ زیر که از شور[1] (Schur) است وما آن‌را بدون اثبات بیان می‌کنیم به دست می‌آید.

قضیهٔ ۲

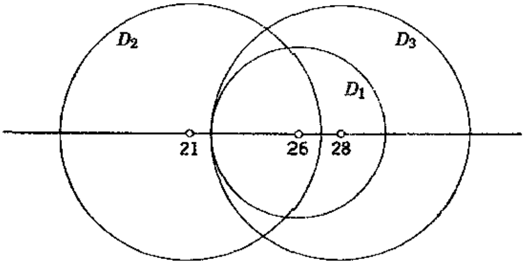
فرض‌کنید $\mathbf{A}=(a_{jk})$ ماتریسی $(n\times n)$ باشد با مقادیر ویژهٔ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. در این صورت

(نامساوی شور)
$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \qquad (۵)$$

در (۵) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\mathbf{A}$ طوری باشد که

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^T \qquad (۶)$$

ماتریسهایی که در (۶) صدق می‌کنند **ماتریسهای نرمال** نامیده می‌شوند. به آسانی می‌توان نشان داد که ماتریسهای هرمیتی، هرمیتی کج، و یکانی نرمال هستند و همین‌طورند ماتریسهای



شکل ۳۶۰. مثال ۱

1. *Mathematische Annalen*, Vol. 66, 1909, p. 488.

متقارن حقیقی، متقارن کج ومتعامد.

فرض کنید، درقضیهٔ ۲، λ_m یکی از مقادیر ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ باشد. دراین صورت $|\lambda_m|^2$ ازمجموع موجود درسمت چپ (۵) کمتر و یا باآن برابراست و اگر از (۵)جذر بگیریم به‌دست می‌آوریم

$$|\lambda_m| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2}. \qquad (۷)$$

مثال ۲. کرانهای مقادیر ویژه‌ای که ازنامساوی شور به‌دست آمده‌اند

درمورد ماتریس $\mathbf{A}$ یی که درمثال ۱ داده شده، از (۷) به‌دست می‌آوریم

$$|\lambda| \leqslant \sqrt{۱۹۴۹} < ۴۴٫۲ \ .$$

(مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ عبارتند از ۳۰، ۲۵ و ۲۰؛ بنابراین

$$۳۰^2 + ۲۵^2 + ۲۰^2 = ۱۹۲۵ < ۱۹۴۹$$

در واقع، $\mathbf{A}$ نرمال نیست.) ▲

قضیه‌های فوق درمورد هرماتریس مربعی مختلط یا حقیقی صادقند. قضیه‌های‌دیگری وجوددارندکه فقط برای رده‌های خاصی ازماتریسها صادقند. قضیهٔ زیرکه از فروبنیوس[1] (Frobenius) است یکی از این نوع قضایاست که ما در اینجا آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۳

فرض کنید $\mathbf{A}$ یك ماتریس مربعی حقیقی باشدکه تمام عناصرش مثبتند . دراین صورت $\mathbf{A}$ حداقل یك مقدار ویژهٔ حقیقی مثبت λ دارد، درضمن بردار ویژهٔ متناظر بااین مقدار ویژه را می‌توان حقیقی انتخاب کرد و به گونه‌ای که تمام مؤلفه‌هایش مثبت باشند.

از این قضیه ،کلاتس[2] نتیجهٔ مهم زیر را به‌دست آورد.

قضیهٔ ۴

فرض کنید $\mathbf{A} = (a_{jk})$ ماتریس n سطری حقیقیی باشد کــه تمام عناصرش مثبتند . $\mathbf{x}$ را برداری حقیقی بگیرید که مؤلفه‌های x_1 ، . . . ، x_n آن مثبتند و فرض‌کنید y_1 ، . . . ، y_n مؤلفه‌های بردار $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ باشند. دراین صورت فاصلهٔ بسته‌ای‌که روی محورحقیقی قرار دارد و باکوچکترین و بزرگترین مقدار از n خارج قسمت $q_j = y_j / x_j$ کراندار شده است حداقل

1. *Sitzungsberichte Preuss. Akad.Wiss.Math-Phys.Klasse*, Berlin, 1908, p.471.

2. L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1949, p. 291.

یك مقدار ویژهٔ $\mathbf{A}$ را دربرمی‌گیرد.

اثبات. $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}$ یا

$$\mathbf{y}-\mathbf{Ax}=\circ \tag{۸}$$

ترانهادهٔ $\mathbf{A}^T$ درشرایط قضیهٔ ۳ صدق می‌کند. از این رو $\mathbf{A}^T$ یك مقدار ویژهٔ مثبت λ، و متناظر با این مقدار ویژه، یك بردار $\mathbf{u}$ که تمام مؤلفه‌های u_jی آن مثبتند دارد. بنابراین $\mathbf{A}^T\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}$، و با ترانهش به دست می‌آوریم $\mathbf{u}^T\mathbf{A}=\lambda\mathbf{u}^T$. از اینجا و از (۸) نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{y}-\mathbf{Ax})=\mathbf{u}^T\mathbf{y}-\mathbf{u}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{u}^T(\mathbf{y}-\lambda\mathbf{x})=\circ$$

یا

$$\sum_{j=\text{۱}}^{n} u_j(y_j-\lambda x_j)=\circ$$

از اینکه تمام مؤلفه‌های u_j مثبت هستند نتیجه می‌شود

$$y_j-\lambda x_j \geqslant \circ \text{، یعنی } q_j \geqslant \lambda \text{ به‌ازای حداقل یك } j\text{،}$$
و
$$y_j-\lambda x_j \leqslant \circ \text{، یعنی } q_j \leqslant \lambda \text{ به‌ازای حداقل یك } j \tag{۹}$$

ازآنجاکه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^T$ مقادیر ویژهٔ یکسان دارند، λ یکی از مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ است، و از (۹) حکم قضیه نتیجه می‌شود. ▲

مثال ۳. کرانهای مقادیر ویژه ازقضیهٔ کلاتس

فرض کنید

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \text{۸} & \text{۱} & \text{۱} \\ \text{۱} & \text{۵} & \text{۲} \\ \text{۱} & \text{۲} & \text{۵} \end{pmatrix} \text{، با انتخاب } \mathbf{x}=\begin{pmatrix} \text{۱} \\ \text{۱} \\ \text{۱} \end{pmatrix} \text{ داریم } \mathbf{y}=\begin{pmatrix} \text{۱۰} \\ \text{۸} \\ \text{۸} \end{pmatrix}$$

ازاین رو $q_1=\text{۱۰}$، $q_2=\text{۸}$، $q_3=\text{۸}$، وقضیهٔ ۴ ایجاب می کندکه یکی ازمقادیرویژهٔ $\mathbf{A}$ باید درفاصلهٔ $\text{۸}\leqslant\lambda\leqslant\text{۱۰}$ قرارگیرد. البته طول چنین فاصله‌ای به انتخاب $\mathbf{x}$ بستگی دارد. می‌توان نشان دادکه $\lambda=\text{۹}$ مقدار ویژهٔ $\mathbf{A}$ است.

مسائل بخش ۱۳.۱۹

بااستفاده ازقضیهٔ ۱،قرصهایی راکه مقادیر ویژهٔ ماتریسهای زیر را دربرمی گیرند مشخص

کرده رسم کنید.

۱. $\begin{pmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & -۳ \end{pmatrix}$ **۲.** $\begin{pmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix}$ **۳.** $\begin{pmatrix} ۱/\sqrt{۲} & i\sqrt{۲} \\ -i/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} \end{pmatrix}$

۴. $\begin{pmatrix} ۶ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۶ & ۳ \\ -۳ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$ **۵.** $\begin{pmatrix} -۹ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۹ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۹ \end{pmatrix}$ **۶.** $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳i \\ ۰ & ۲-i & ۱+i \\ ۱+۲i & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$

با استفاده از (۷)، کران بالای قدرمطلق مقادیر ویژهٔ ماتریسهای زیررا به‌دست‌آورید.

۷. ماتریس مسئلهٔ ۱ **۸.** ماتریس مسئلهٔ ۲ **۹.** ماتریس مسئلهٔ ۴

۱۰. ماتریس مثال ۳ **۱۱.** ماتریس مسئلهٔ ۵ **۱۲.** ماتریس مسئلهٔ ۶

۱۳. قضیهٔ ۳ را درمورد ماتریس مسئلهٔ ۲ تحقیق کنید.

قضیهٔ ۴ را درمورد ماتریسهای زیر به‌کاربرید، بردارهای داده شده را به‌عنوان $\mathbf{x}$ انتخاب کنید.

۱۴. $\begin{pmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۲ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ۱۷ & ۸ & ۱ \\ ۸ & ۱۸ & ۸ \\ ۱ & ۸ & ۱۷ \end{pmatrix}$

۱۵. $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$

۱۶. **(دترمینان غیرصفر)** اگر در هرسطر دترمینان قدرمطلق عنصری که روی قطر اصلی قرار دارد از مجموع قدرمطلقهای بقیهٔ عناصر آن سطر بزرگتر باشد نشان دهید که مقدار دترمینان غیرصفراست. ازاین موضوع درمورد حل‌پذیری دستگاههای‌معادلات خطی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۷. **(مجموعهٔ اشتمال)** مجموعهٔ اشتمال ماتریس $\mathbf{A}$، مجموعه‌ای درصفحهٔ مختلط است که حداقل یك مقدار ویژهٔ $\mathbf{A}$ را دربرمی‌گیرد. درمورد ماتریسهای یکانی چه نوع مجموعه‌های اشتمالی‌را با ترکیب قضیهٔ ۱ وقضیهٔ ۳پ بخش ۱۴.۷ به‌دست می‌آوریم؟

۱۸. نشان دهید که ماتریس مثال ۱ نرمال نیست.

۱۹. نشان‌دهید که ماتریس‌مثال ۳ دارای مقادیر ویژهٔ ۹، ۶، ۳ است‌و (۵) باعلامت‌تساوی در مورد آن صدق می‌کند.

۲۰. با استفاده از قضایای ۱ و ۳، بخش ۱۴.۷، نشان دهید که در مورد ماتریسهای یکانی نامساوی شور با علامت تساوی صدق می‌کند.

۱۴.۱۹ تعیین مقادیر ویژه با تکرار

روش متعارف محاسبهٔ مقدار تقریبی مقادیر ویژهٔ ماتریس مربعی n سطری $\mathbf{A}=(a_{jk})$ **روش تکرار درمورد مقادیر ویژه** است. در این روش از برداری مانند $\mathbf{x}_0(\neq 0)$ که n مؤلفه دارد شروع کرده و متوالیاً مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{A}\mathbf{x}_0 ، \mathbf{x}_2=\mathbf{A}\mathbf{x}_1 ، \dots ، \mathbf{x}_s=\mathbf{A}\mathbf{x}_{s-1}$$

برای ساده‌کردن نمادگذاریها، $\mathbf{x}_{s-1}$ را با $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}_s$ را با $\mathbf{y}$ نشان می‌دهیم و بنابراین $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$. اگر $\mathbf{A}$ متقارن حقیقی باشد، قضیهٔ زیرکرانهای خطا وتقریب را به‌ما می‌دهد.

قضیهٔ ۱

فرض کنید $\mathbf{A}$ یك ماتریس متقارن n سطری باشد و $\mathbf{x}(\neq 0)$ برداری حقیقی با n مؤلفه. همچنین فرض کنید

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x} ، m_0=\mathbf{x}^T\mathbf{x} ، m_1=\mathbf{x}^T\mathbf{y} ، m_2=\mathbf{y}^T\mathbf{y}$$

دراین صورت خارج قسمت

(خارج قسمت رایلی[۱]) $$q=\frac{m_1}{m_0}$$

تقریبی برای مقدار λ ی $\mathbf{A}$ است[۲]، و اگر قرار دهیم $q=\lambda+\varepsilon$، که درآن ε خطای q است، آنگاه

$$|\varepsilon|\leqslant\sqrt{\frac{m_2}{m_0}-q^2}. \qquad (1)$$

اثبات. در (۱)، عبارت زیر رادیکال را با δ^2 نشان‌دهید. دراین صورت، چون $m_1=qm_0$

۱. **لرد رایلی** (جان ویلیام استرات) Lord Rayleigh (John William Strutt) (۱۸۴۲–۱۹۱۹)، فیزیکدان و ریاضیدان انگلیسی که در رشته‌های مختلف ریاضیات کاربردی و فیزیك نظری مخصوصاً درنظریهٔ امواج، کشسانی و ئیدرودینامیك نقش مهمی ایفا کرده است.

۲. معمولا این همان λ یی است که بزرگترین قدرمطلق را دارد اما حکم کلی نمی‌توان صادر کرد.

داریم

$$(۲) \quad (\mathbf{y}-q\mathbf{x})^T(\mathbf{y}-q\mathbf{x})=m_2-2qm_1+q^2m_0=m_2-q^2m_0=\delta^2m_0 \ .$$

چون $\mathbf{A}$ متقارن حقیقی است، مجموعهٔ متعامدی از n بردار ویژهٔیکهٔ حقیقی $z_1, \ldots, z_n$ که به‌ترتیب بامقادیرویژهٔ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (که بعضی ازآنها ممکن است باهم برابرباشند) متناظرند دارد. (اثبات درمرجع[C۱۴] داده شده است.) دراین صورت $\mathbf{x}$ را به صورت زیرنمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{x}=a_1\mathbf{z}_1+\cdots+a_n\mathbf{z}_n$$

اما $\mathbf{A}\mathbf{z}_1=\lambda_1\mathbf{z}_1$، و به‌همین ترتیب. بنابراین به دست می‌آوریم

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}=a_1\lambda_1\mathbf{z}_1+\cdots+a_n\lambda_n\mathbf{z}_n$$

وچون $\mathbf{z}_j$ ها بردارهای یکهٔ متعامدند،

$$(۳) \qquad m_0=\mathbf{x}^T\mathbf{x}=a_1^2+\cdots+a_n^2.$$

نتیجه اینکه در (۲)،

$$\mathbf{y}-q\mathbf{x}=a_1(\lambda_1-q)\mathbf{z}_1+\cdots+a_n(\lambda_n-q)\mathbf{z}_n.$$

چون $\mathbf{z}_j$ ها بردارهای یکهٔ متعامدند، از (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\delta^2m_0=a_1^2(\lambda_1-q)^2+\cdots+a_n^2(\lambda_n-q)^2$$

باقرار دادن کوچکترین این جملات به جای $(\lambda_j-q)^2$ وبا استفاده از (۳) داریم

$$\delta^2m_0 \geqslant (\lambda_c-q)^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)=(\lambda_c-q)^2m_0$$

که درآن λ_c نزدیکترین مقدارویژه به q است. ازاینجا (۱) نتیجه می‌شود وقضیهٔ به‌اثبات می‌رسد. ▲

مثال ۱. کاربردی ازقضیهٔ ۱

همانند مثال ۳ ی بخش قبل ماتریس متقارن حقیقی

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ را درنظر گرفته وانتخاب می کنیم $$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دراین صورت متوالیاً به دست می آوریم

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}۱۰\\۸\\۸\end{pmatrix}،\ \mathbf{x}_۲=\begin{pmatrix}۹۶\\۶۶\\۶۶\end{pmatrix}،\ \mathbf{x}_۳=\begin{pmatrix}۹۰۰\\۵۵۸\\۵۵۸\end{pmatrix}،\ \mathbf{x}_۴=\begin{pmatrix}۸۳۱۶\\۴۸۰۶\\۴۸۰۶\end{pmatrix}.$$

با فرض $\mathbf{x}=\mathbf{x}_۳$ و $\mathbf{y}=\mathbf{x}_۴$ داریم

$$m_۰=\mathbf{x}^T\mathbf{x}=۱۴۳۲۷۲۸،\ m_۱=\mathbf{x}^T\mathbf{y}=۱۲۸۴۷۸۹۶،\ m_۲=\mathbf{y}^T\mathbf{y}=۱۱۵۳۵۱۱۲۸$$

واز اینجا مقادیر زیرمحاسبه می‌شوند:

$$q=\frac{m_۱}{m_۰}=۸٫۹۶۷،\ |\varepsilon|\leqslant\sqrt{\frac{m_۲}{m_۰}-q^۲}=۰٫۳۱۱.$$

این نشان می‌دهد که $q=۸٫۹۶۷$ مقدار تقریبی مقدار ویژه‌ای است که باید بین ۸٫۶۵۶ و ۹٫۲۷۸ قرار گیرد. دانشجو می‌تواند نشان دهد که $\lambda=۹$ یك مقدار ویژه است.

مسائل بخش ۱۴۰۱۹

۱. فرض کنید

$$A=\begin{pmatrix}۱&-۱&۲\\۲&۳&-۱\\۳&۲&۱\end{pmatrix}\ \text{و انتخاب کنید}\ \mathbf{x}_۰=\begin{pmatrix}۱\\۱\\۱\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، و $\mathbf{x}_۳$ را محاسبه کنید. به‌جای $\mathbf{x}$، $\mathbf{x}_۲$ و به‌جای $\mathbf{y}$، $\mathbf{x}_۳$ قرار دهید. نشان دهید که انحراف q از ۵ (مقداردقیق بزرگترین مقدار ویژهٔ $\mathbf{A}$) تقریباً ۱٫۷٪ است. از (۱) برای q کران خطایی پیدا کنید.

$\mathbf{A}$ ماتریس داده شده درمسئلهٔ ۱ باشد. $\mathbf{x}_۱$، q ی‌متناظربا آن، وکران خطایی را با انتخابهای زیرمحاسبه کنید.

۲. $\mathbf{x}_۰=\begin{pmatrix}۱\\۰\\۰\end{pmatrix}$ ۳. $\mathbf{x}_۰=\begin{pmatrix}۰\\۱\\۰\end{pmatrix}$ ۴. $\mathbf{x}_۰=\begin{pmatrix}۰\\۱\\۱\end{pmatrix}$

۵. نشان دهید که مقادیر ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}$، در مسئلهٔ ۱، عبارتند از ۰، ۳، ۵، ومقدار ویژه‌ای را که با نتایج مسائل ۲ — ۴ تقریب زده می‌شود مشخص کنید.

$\mathbf{x}_۰$ را برداری ستونی با مؤلفه‌های ۱، ۱، ۱، ۱ انتخاب کنید، $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$ و تقریبهای

$q = \mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_0/\mathbf{x}_0^T\mathbf{x}_0$ ، $q = \mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1$ و کرانهای خطای متناظرشان را برای یکی ازمقادیر ویژهٔ هریك ازماتریسهای متقارن زیرحساب کنید.

۶. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

۷. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

۸. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

۹. با استفاده از $\mathbf{x}_0^T = (3\ \ 1\ \ 2)$ و با به‌کاربردن تکرار درمورد

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

نشان دهیدکه $\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ ونتایج را مورد بحث قراردهید.

۱۰. آیا می‌توان (۱) را درمورد ماتریس مسئلهٔ ۹ به‌کاربرد؟

۱۱. نشان دهیدکه در (۱) اگر $\mathbf{x}$ یکی از بردارهای ویژه باشد، آنگاه $\varepsilon = 0$.

۱۲. برای پی‌بردن به‌اهمیت‌کران خطای (۱)، ماتریس

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ را درنظر گرفته و فرض کنید $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

ونشان دهیدکه به‌ازای‌تمام s ها داریم $q = 0$. مقادیر ویژه را بیابید وآنچه راکه اتفاق می‌افتد تشریح کنید. باانتخاب $\mathbf{x}_0$ دیگری این‌کار را تکرار کنید.

۱۳. برای درك اینکه چرا خارج قسمت رایلی q عموماً تقریبی برای مقدار ویژهٔ λ_1، است‌که بیشترین قدرمطلق را دارد فرض‌کنید

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{z}_1 + \cdots + c_n\mathbf{z}_n$$

(که $\mathbf{z}_1$، . . . ، $\mathbf{z}_n$ همانند آنچه دراثبات قضیهٔ ۱ گفته شد هستند) و نشان دهید که

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_{s-1}=c_1\lambda_1^{s-1}\mathbf{z}_1+\cdots+c_n\lambda_n^{s-1}\mathbf{z}_n$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}_s=c_1\lambda_1^{s}\mathbf{z}_1+\cdots+c_n\lambda_n^{s}\mathbf{z}_n$$

و بنابراین

$$q=\frac{m_1}{m_0}=\frac{c_1^2\lambda_1^{2s-1}+\cdots}{c_1^2\lambda_1^{2s-2}+\cdots}\approx\lambda_1.$$

تحت چه شرایطی این تقریب، تقریب خوبی است؟

۱۴. نشان دهید که درمثال ۱، ماتریس $\mathbf{A}$ دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_1=9$، $\lambda_2=6$، $\lambda_3=3$ است. تکرار را برای $\mathbf{A}-4.5\mathbf{I}$ به‌کار برید، از $\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}=(1\ \ 1\ \ 1)$ شروع کرده و در (۱)، $\mathbf{x}=\mathbf{x}_3$ و $\mathbf{y}=\mathbf{x}_4$ منظور کنید. نشان دهید $q=4.4995$ و بنابراین تقریب ۸٫۹۹۹۵، λ_1 را با خطای $|\varepsilon|\leqslant 0.0393$ تقریب می‌زند. آیا می‌توانید دلیل بهترشدن نتیجهٔ مثال ۱ را ذکر کنید؟ (برای بررسی تفصیلی چگونگی بهتر کردن روش تکرار، [G8] ضمیمهٔ ۱ را ببینید.)

۱۵. فرض $\mathbf{A}$ متقارن بوده مقادیر ویژه‌اش $\lambda_1>\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}>\lambda_n$ باشند و $|\lambda_1|>|\lambda_n|$، واینکه α برآورد خوبی از λ_1 است. اگر با این مفروضات تکرار را درمورد $\mathbf{B}=\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I}$ به‌کار بریم عموماً بسه تقریبهای λ_n می‌رسیم. چرا چنین است ودراینجا «عموماً» چه معنایی دارد؟ روش فوق را درمورد $\mathbf{A}$ درمثال ۱ به‌کار برید، فرض کنید $\alpha=4.9$ (کــه همان جواب مسئلهٔ ۱ است) و $\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}=(1\ \ 1\ \ 1)$ و به‌جای $\mathbf{x}$ در (۱) قرار دهید $\mathbf{x}_1$ و به‌جای $\mathbf{y}$ قرار دهید $\mathbf{x}_2$.

۱۵.۱۹ بسطهای مجانبی

بسطهای مجانبی سریهایی (عموماً واگرا) هستند که درمحاسبهٔ مقادیر تابع $f(x)$ به‌ازای x های بزرگ ازاهمیت عملی زیادی برخوردارند. واضح است که سری مك‌لورن $f(x)$، اگر به‌ازای مقادیر بزرگ x موجود و همگرا باشد، برای این منظورمناسب نیست زیرا تعداد جملات لازم برای به‌دست آوردن تعداد معینی ازارقام معنی‌دار باافزایش x سریعاً زیـاد می‌شود. همین مطلب درمورد سری تیلوری به مرکز a وبـا $|x-a|$ ی بزرگ صادق است. خواهیم دید که هرقدر x بزرگتر باشد جملات کمتری از بسط مجانبی را برای به‌دست آوردن دقت موردنظر لازم داریم. ازطرف دیگر دقت محدود است وباکم شدن x کم می‌شود وبنابراین بسطهای مجانبی را فقط برای مقادیر بزرگ x می‌توان به‌کار برد. متغیرها وتوابعی که دراین بخش مورد بحث قرار می گیرند حقیقی فرض می‌شوند.

سری

$$c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots \qquad (c_0 \text{ ، } c_1 \text{ ، } \ldots \text{ ثابتند})$$

(که لزومی ندارد به‌ازای تمام مقادیر x همگرا باشد) **بسط مجانبی یا سری مجانبی** تابع $f(x)$ کـه به‌ازای هرمقدار به‌اندازهٔ کافـی بزرگ x تعریف شده است نامیده می‌شود اگر به ازای هرمقدار مشخص $n=0,1,2,\ldots$ داشته باشیم

$$\left[f(x)-\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}\right)\right]x^n \to 0 \quad \text{وقتی که } x\to\infty \qquad (1)$$

ودراین صورت می‌نویسیم

$$f(x)\sim c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots$$

اگر تـابع $f(x)$ دارای بسط مجانبی بـاشد، آنگـاه این بسط یکتاست، زیرا ضرایب c_0 ، c_1 ، ... آن به طور یکتا از (۱) تعیین می‌شود. در واقع از (۱) به دست می‌آوریم

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} &c_0=\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{یا} \quad f(x)-c_0\to 0\\ &c_1=\lim_{x\to\infty}[f(x)-c_0]x \quad \text{یا} \quad \left[f(x)-c_0-\frac{c_1}{x}\right]x\to 0 \quad \text{و به‌همین ترتیب} \end{aligned}$$

ازطرف دیگرممکن است توابع مختلف یك بسط مجانبی داشته باشند. مثلاً، فرض کنید $f(x)=e^{-x}$. در این صورت چون $e^{-x}\to 0$ ، $xe^{-x}\to 0$ و به همین ترتیب، از (۱*) معلوم است که $c_0=0$ ، $c_1=0$ وغیره. از این رو

$$e^{-x}\sim 0+\frac{0}{x}+\cdots.$$

بنابراین اگـر $g(x)$ دارای بسط مجانبی باشد دراین صورت $g(x)+e^{-x}$ یقیناً همان بسط مجانبی را خواهد داشت.

از نظر کاربردی خوب است که به ترتیب زیر تعریف را توسعه دهیم:

$$f(x)\sim g(x)+h(x)\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots\right)$$

هر گاه مطابق تعریف قبل داشته باشیم

$$\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}\sim c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots.$$

فقط درحالات نادری می‌توان ضرایب بسط مجانبی را مستقیماً از(* ۱) حساب کرد. عموماً روشهای دیگری نظیر انتگرالگیری جزء به‌جزء متوالی مناسبترند.

مثال ۱. سری مجانبی تابع خطا

تابع خطای x $(\operatorname{erf} x)$ با انتگرال (ر. ك. شکل ۴۰۶، ضمیمهٔ ۳)

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{۲ الف}$$

تعریف می‌شود وتابع مکمل آن با

$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau \tag{۲ ب}$$

که درآن $\tau=t^2$ و $\operatorname{erf}\infty=1$. با انتگرالگیری جزء به جزء مکرر به انتگرال زیر می‌رسیم:

$$F_n(x)=\int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-(2n+1)/2}\,d\tau, \qquad n=0,\ 1,\ \cdots. \tag{۳}$$

توجه داشته‌باشید که $\operatorname{erfc} x=F_0(x)/\sqrt{\pi}$. باانتگرالگیری‌جزء جزء به‌دست می‌آوریم

$$F_n(x)=-e^{-\tau}\tau^{-(2n+1)/2}\Big|_{x^2}^\infty-\frac{2n+1}{2}\int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-(2n+3)/2}\,d\tau.$$

انتگرال سمت راست عبارت است از $F_{n+1}(x)$ و بنابراین

$$e^{x^2}F_n(x)=\frac{1}{x^{2n+1}}-\frac{2n+1}{2}e^{x^2}F_{n+1}(x), \qquad n=0,\ 1,\ \cdots.$$

کاربرد مکرر این فرمول نتیجه می‌دهد

$$e^{x^2}F_0(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\,e^{x^2}F_1(x)$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$=\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\times 3}{2^2x^5}-+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\cdots\times(2n-3)}{2^{n-1}x^{2n-1}}\right]$$

$$+(-1)^n\frac{1\times 3\cdots\times(2n-1)}{2^n}e^{x^2}F_n(x).$$

نشان می‌دهیم سریی که بدین طریق به دست آمد یك بسط مجانبی است،

$$e^{x^2}F_0(x) \sim \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\times 3}{2^2x^5}-+\cdots. \qquad (5)$$

فرض کنید S_{2n-1} عبارت داخل کروشه در (۴) باشد. دراین صورت از (۴) به دست می‌آوریم

$$[e^{x^2}F_0(x)-S_{2n-1}]x^{2n-1}=K_n e^{x^2}x^{2n-1}F_n(x), \qquad (6)$$

که درآن $K_n=(-2)^{-n}1\times 3\cdots\times(2n-1)$. باید نشان دهیم که به‌ازای هر $n=1, 2, \ldots$ ی مشخص عبارت سمت راست وقتی x به بینهایت میل کند به‌سمت صفر میل می‌کند. در (۳) داریم

$$\frac{1}{\tau^{(2n+1)/2}} \leqslant \frac{1}{x^{2n+1}} \qquad \text{به‌ازای هر } \tau \geqslant x^2$$

ازاین رو نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$F_n(x)=\int_{x^2}^{\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau^{(2n+1)/2}}\,d\tau < \frac{1}{x^{2n+1}}\int_{x^2}^{\infty}e^{-\tau}\,d\tau=\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}} \qquad (7)$$

ازاین معادله بلافاصله نتیجه می‌شود

$$|K_n|e^{x^2}x^{2n-1}F_n(x)<\frac{|K_n|}{x^2}\to 0 \qquad (x\to\infty).$$

بدین ترتیب اثبات می‌شود که سری (۵) یك بسط مجانبی تابع سمت چپ (۵) است. چون $\operatorname{erf} x=1-\operatorname{erfc} x=1-F_0(x)/\sqrt{\pi}$ نتیجه می‌شود که سری مجانبی تابع خطا عبارت است از

$$\operatorname{erf} x \sim 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1\times 3}{2^2x^5}-\frac{1\times 3\times 5}{2^3x^7}+-\cdots\right). \qquad (8)$$

به‌ازای مقادیر بزرگ x تقریب سادهٔ زیررا داریم:

$$\operatorname{erf} x \approx 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x}e^{-x^2} \qquad (8^*)$$

از (۶) و (۷) نتیجه می‌شود

$$|e^{x^2}F_0(x)S_{2n-1}|=\frac{1\times 3\cdots\times(2n-1)}{2^n}e^{x^2}F_n(x)<\frac{1\times 3\cdots\times(2n-1)}{2^n}\frac{1}{x^{2n+1}},$$

و به‌ازای x های به‌اندازهٔ کافی بزرگ عبارت سمت راست خیلی کوچك است. ازاین‌رو به‌ازای چنین x هایی S_{2n-1} تقریب خیلی‌خوبی برای $e^{x^2}F_0(x)$ است، وبنابراین، به‌ازای

xهای بزرگ، تابع خطا را می‌توان با استفاده از (۷) خیلی دقیق حساب کرد. نتیجه اینکه حتی درمواردی‌که $|x|$ نسبتاً کوچك است نتایج به طرز شگفت‌انگیزی دقیقند. به عنوان نمونه، (*۸) نتیجه می‌دهد

$$\operatorname{erf} ۵ \sim ۱ - \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-۲۵}}{۵} = ۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۸۴۳۳ \qquad ;$$

سیزده رقم اعشاری اول صحیح هستند وخطا برابر ۳ واحد از اعشار چهاردهم است. با این حال به خواننده هشدار می‌دهیم که این مورد ممکن است گمراه‌کننده باشد؛ برای سایر بسطهای مجانبی وضعیتهای مشابهی ممکن است وجود داشته باشد اما نه به‌ازای $x=۵$ بلکه به‌ازای مقادیر خیلی بزرگتر x، مثلا $x=۲۰$ یا $x=۱۰۰$. ▲

درکاربردهای عملی دانستن این مطلب که سریهای مجانبی را می‌توان جمع‌وضرب کرد و تحت شرایط معینی روی آنها انتگرالگیری و مشتق‌گیری جمله به جمله انجام داد مفید است. این خواص را به‌روشی دقیق صورت‌بندی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱ (جمع وضرب)

اگر

$$f(x) \sim a_۰ + \frac{a_۱}{x} + \frac{a_۲}{x^۲} + \cdots \quad \text{و} \quad g(x) \sim b_۰ + \frac{b_۱}{x} + \frac{b_۲}{x^۲} + \cdots$$

آنگاه تابع $Af+Bg$، که درآن A و B ثابتهایی هستند، دارای بسط مجانبی

$$(۹) \qquad Af(x)+Bg(x) \sim Aa_۰ + Bb_۰ + \frac{Aa_۱+Bb_۱}{x} + \frac{Aa_۲+Bb_۲}{x^۲} + \cdots$$

خواهد بود و تابع fg دارای بسط مجانبی

$$(۱۰) \qquad f(x)g(x) \sim c_۰ + \frac{c_۱}{x} + \frac{c_۲}{x^۲} + \cdots,$$

است که ضرایب آن از فرمول زیر به‌دست می‌آیند:

$$c_n = a_۰ b_n + a_۱ b_{n-۱} + \cdots + a_n b_۰ .$$

اثبات. اثبات سادهٔ (۹) به خواننده واگذار می‌شود. حکم آخر را اثبات می‌کنیم. باید نشان دهیم که به‌ازای هرعدد صحیح مشخص غیرمنفی n

$$(۱۱) \qquad \text{وقتی } x \to \infty \text{ آنگاه } (fg - S_n)x^n \to ۰،$$

که در آن

$$S_n(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\dots+\frac{c_n}{x^n}$$

باضرایب c_0 ، . . . ، c_n ی که درقضیه داده شده است.
عدد دلخواه مشخص n را انتخاب کرده ومی نویسیم

$$f(x)=s_n(x)+\frac{h(x)}{x^n} \quad \text{که درآن} \quad s_n(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\dots+\frac{a_n}{x^n}$$

پس

$$[f(x)-s_n(x)]x^n=h(x).$$

ازاین رابطه وازتعریف بسط مجانبی نتیجه می‌شود که وقتی x به سمت ∞ می‌رود $h(x)$ باید به سمت صفرمیل کند. به‌همین ترتیب، اگربنویسیم

$$g(x)=s_n{}^*(x)+\frac{l(x)}{x^n} \quad \text{که درآن} \quad s_n{}^*(x)=b_0+\frac{b_1}{x}+\dots+\frac{b_n}{x^n}$$

دراین صورت $l(x) \to 0$ وقتی که $x \to \infty$. باتوجه به‌این روابط به‌دست می‌آوریم

$$fg=s_n s_n{}^*+\frac{h+l}{x^n}+\frac{hl}{x^{2n}}$$

باضرب جمله به جمله و گردآوری توانهای مساوی x ، می‌توان تحقیق کرد که

$$s_n s_n{}^*=S_n+T_n$$

T_n مجموع جملاتی است که شامل توانهای $1/x^{n+1}$ ، . . . ، $1/x^{2n}$ هستند. واضح است که $x^n T_n \to 0$ وقتی که $x \to \infty$. حال در (۱۱) داریم

$$fg-S_n=T_n+\frac{h+l}{x^n}+\frac{hl}{x^{2n}}$$

هردوطرف رابطهٔ اخیر را در x^n ضرب می کنیم. دراین صورت وقتی کـه x به ∞ میل کند طرف راست رابطهٔ جدید به سمت صفرمیل می کند زیرا $x^n T_n \to 0$ ، $l \to 0$ و $h \to 0$. بنابراین عبارت سمت چپ (۱۱) به صفرمیل می کند و بدین ترتیب اثبات کامل می شود. ▲

قضیهٔ ۲ (انتگرالگیری)

فرض کنید $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ x پیوسته باشد وفرض کنید

$$f(x)\sim\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{x^3}+\dots .$$

دراین صورت به‌ازای چنین x هایی داریم

$$\int_x^\infty f(t)\,dt \sim \frac{c_2}{x}+\frac{c_3}{2x^2}+\frac{c_4}{3x^3}+\cdots. \qquad (12)$$

اثبات. انتگرال (۱۲) را با $F(x)$ و انتگرال

$$s_n(x)=\frac{c_2}{x^2}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}$$

را با $S_{n-1}(x)$ نشان دهید، یعنی

$$S_{n-1}(x)=\int_x^\infty s_n(t)\,dt=\frac{c_2}{x}+\frac{c_3}{2x^2}+\cdots+\frac{c_n}{(n-1)x^{n-1}}.$$

بنابه‌تعریف بسط مجانبی، به‌ازای هریك ازمقادیر $n=0, 1, \ldots$ داریم

وقتی‌که $x \to \infty$. $\qquad |f(x)-s_n(x)|x^n \to 0$

به دلیل پیوستگی f، به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض می‌توان یك x_0 یافت به گونه‌ای که به‌ازای هر $x > x_0$

$$|f(x)-s_n(x)|x^n < \varepsilon \quad \text{یا} \quad |f(x)-s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

ازاینجا به‌ازای هر $x > x_0$ به‌دست می‌آوریم

$$|F(x)-S_{n-1}(x)| = \left|\int_x^\infty f(t)\,dt-\int_x^\infty s_n(t)\,dt\right| = \left|\int_x^\infty [f(t)-s_n(t)]\,dt\right|$$

$$\leqslant \int_x^\infty |f(t)-s_n(t)|\,dt < \varepsilon\int_x^\infty \frac{dt}{t^n}=\frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}}.$$

با ضرب کردن طرفین این رابطه درمقدار مثبت x^{n-1} داریم

وقتی که $x > x_0(\varepsilon)$ $\qquad |F(x)-S_{n-1}(x)|x^{n-1} < \dfrac{\varepsilon}{n-1}$

چون $\varepsilon(>0)$ را هرقدرکه بخواهیم می‌توانیم کوچك انتخاب‌کنیم نتیجه می‌شود که

وقتی‌که $x \to \infty$ $\qquad |F(x)-S_{n-1}(x)|x^{n-1} \to 0$

وبدین ترتیب اثبات‌کامل می‌شود.

اگر $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ x پیوسته باشد و

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots,$$

آنگاه ازقضیهٔ ۲ نتیجه می گیریم که

$$(۱۲^*) \qquad \int_x^\infty \left[f(t) - c_0 - \frac{c_1}{t} \right] dt \sim \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \frac{c_4}{3x^3} + \cdots.$$

اگر $f(x)$ بسط مجانبی داشته باشد نمی‌توان نتیجه گرفت که مشتق $f'(x)$ بسط مجانبی دارد. مثلا، از $(^*۱)$ به دست می‌آوریم

$$f(x) = e^{-x} \sin(e^x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots$$

اما مشتق $f(x)$ که ازفرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(x) = -e^{-x} \sin(e^x) + e^{-x} \cos(e^x) e^x = -f(x) + \cos(e^x)$$

دارای بسط مجانبی نیست. (چرا؟) با وجود این اگـرمشتق $f'(x)$ تابع $f(x)$ دارای بسط مجانبی باشد با مشتق گیری جمله به‌جمله از $f(x)$ می‌توان آن را به دست‌آورد. در واقع قضیهٔ زیرصادق است.

قضیهٔ ۳ (مشتق‌گیری)

اگر

$$(۱۳) \qquad f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

و $f(x)$ مشتقی پیوسته مانند $f'(x)$ که دارای بسط مجانبی است باشد، آنگاه این‌بسط عبارت است از

$$(۱۴) \qquad f'(x) \sim -\frac{c_1}{x^2} - \frac{2c_2}{x^3} - \frac{3c_3}{x^4} - \cdots.$$

اثبات. بنابه‌فرض

$$(۱۵) \qquad f'(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

و باید نشان دهیم که ضرایب a_n طوری هستند که (۱۴) و (۱۵) را همانند می کنند. نخست نشان می‌دهیم که $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$. از (۱۳) و تعریف بسط مجانبی داریم

$$\text{(الف)}\ \lim_{x\to\infty} f(x)=c_{\circ}\ ،\qquad \text{(ب)}\ \lim_{x\to\infty}[f(x)-c_{\circ}]x=c_{1} \qquad (16)$$

برای سری مجانبی (۱۵) روابط متناظر عبارتند از

$$\text{(الف)}\ \lim_{x\to\infty} f'(x)=a_{\circ}\ ،\qquad \text{(ب)}\ \lim_{x\to\infty}[f'(x)-a_{\circ}]x=a_{1} \qquad (17)$$

می‌توان f و f' را بافرمول زیر به‌هم مربوط کرد:

$$[x_{\circ}(>\circ)\ \text{و}\ k\ \text{ثابت هستند}] \qquad f(x)=\int_{x_{\circ}}^{x} f'(t)dt+k \qquad (18)$$

ازاین فرمول و (۱۶ الف) نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x_{\circ}}^{x} f'(t)\,dt+k=c_{\circ}$$

اما (۱۷الف) نشان می‌دهدکه اگر $a_{\circ}$ صفرنمی‌بود، حد انتگرال وجودنمی‌داشت. ازاین‌رو $a_{\circ}=\circ$. بنابراین (۱۷ ب) می‌شود

$$\lim_{x\to\infty} xf'(x)=a_{1} \qquad (\text{۱۷ب}^{*})$$

بنابه‌تعریف این‌بدان معنی است‌که به‌ازای هر $\varepsilon>\circ$ و هر x به‌اندازهٔ کافی‌بزرگ‌داریم

$$\frac{a_{1}-\varepsilon}{x}<f'(x)<\frac{a_{1}+\varepsilon}{x}\ \ \text{یا}\ \ a_{1}-\varepsilon<xf'(x)<a_{1}+\varepsilon \qquad (19)$$

از (۱۶ ب) و (۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_{x_{\circ}}^{x} f'(t)dt+k-c_{\circ}\right)=c_{1}\,.$$

از (۱۹) معلوم می‌شودکه به‌ازای $a_{1}\neq\circ$ این حد وجود ندارد. بنابراین $a_{1}=\circ$ و (۱۵) می‌شود

$$f'(x)\sim\frac{a_{2}}{x^{2}}+\frac{a_{3}}{x^{3}}+\cdots.$$

همچنین از (۱۸) وقضیهٔ ۲ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_{x_{\circ}}^{\infty} f'(t)\,dt-\int_{x}^{\infty} f'(t)\,dt+k \\ &\sim\int_{x_{\circ}}^{\infty} f'(t)\,dt+k-\frac{a_{2}}{x}-\frac{a_{3}}{2x^{2}}-\cdots, \end{aligned} \qquad (20)$$

توجه کنید که اولین انتگرال سمت راست یك ثابت است. اگر تابع مفروضی دارای بسط مجانبی باشد، این بسط مجانبی یکتاست. بنابراین می‌توانیم جملات متناظر موجود در (۱۳) و (۲۰) را باهم مقایسه کرده دریابیم که $c_1 = a_2$، $a_3 = -2c_2$، وغیره. با این ضرایب سریهای (۱۴) و (۱۵) یکسانند وقضیهٔ اثبات شده است. ▲

اگر بدانیم که تابع $f(x)$ در مفروضات قضیهٔ ۳ صدق می کند وجوابی ازیك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول است، آنگاه با قراردادن (۱۳) و (۱۴) درمعادلهٔ دیفرانسیل می‌توانیم ضرایب بسط مجانبی آن را معلوم کنیم.

مثال ۲. انتگرال نمایی

انتگرال نمایی $\mathrm{Ei}(x)$ بافرمول زیرتعریف می‌شود

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \qquad (x > 0)$$

برای به‌دست‌آوردن بسط مجانبی $\mathrm{Ei}(x)$ تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$y = f(x) = e^x \mathrm{Ei}(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \qquad (x > 0)$$

بامشتق‌گیری می‌بینیم که $f(x)$ درمعادلهٔ دیفرانسیل خطی

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0 \qquad (۲۱)$$

صدق می‌کند. می‌توان ثابت کرد که این معادله تنها دارای یك جواب y است به‌طوری که y و y' به‌ازای xهای مثبت وجود داشته ویك بسط مجانبی داشته باشند. باقراردادن (۱۳) و (۱۴) در (۲۱) وبا صفر قراردادن ضریب تمام توانهای x به‌دست می‌آوریم

$$-c_0 = 0,\ -c_1 + 1 = 0,\ -c_1 - c_2 = 0,\ \ldots,\ -nc_n - c_{n+1} = 0\ \ldots,$$

یعنی،

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ \ldots,\ c_{n+1} = (-1)^n n!,\ \ldots$$

و بنابراین

$$\mathrm{Ei}(x) = e^{-x} f(x) \sim e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + - \cdots\right). \qquad (۲۲)$$

مسائل بخش ۱۵۰۱۹

۱. نشان دهید که سری $[1 + 1/x + 1/2!x^2 + \ldots$ که به‌ازای $|x| > 0$ همگراست

و $e^{1/x}$ را نمایش می‌دهد] بسط مجانبی $e^{1/x}$ است.

۲. نشان دهید که $\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{5!x^5}-+\dots$

باانتگرالگیری جزء به‌جزء بسط مجانبی را درهرمورد بیابید.[1]

۳. $\mathrm{ci}(x)=\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt$ **(انتگرال کسینوس)**

۴. $\mathrm{si}(x)=\int_x^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt$ **(انتگرال سینوس مکمل)**

۵. $\mathrm{c}(x)=\int_x^\infty\cos t^2\,dt$ **(انتگرال فرنل مکمل)**

۶. $\mathrm{s}(x)=\int_x^\infty\sin t^2\,dt$ **(انتگرال فرنل مکمل)**

۷. $Q(\alpha,\ x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt$ **(تابع گامای ناکامل)**

با استفاده از نتایج مسائل ۴، ۵ و ۷، بسط مجانبی را درموارد زیر بیابید.

۸. $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$ **(انتگرال سینوس).** از $\mathrm{si}(0)=\frac{\pi}{2}$ استفاده کنید.

۹. $\mathrm{C}(x)=\int_0^x\cos t^2\,dt$ **(انتگرال فرنل).** از $\mathrm{c}(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ استفاده کنید.

۱۰. $P(\alpha,\ x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt$ **(تابع گامای ناکامل)**

۱۱. با نشان دادن اینکه $y=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{x^2}\,\mathrm{erfc}\,x$ در $y'-2xy+1=0$ صدق می‌کند
بسط مجانبی $\mathrm{erf}\,x$ را به‌دست آورید.

---

۱. بعضی از فرمولهایی که درمورد این توابع و توابع مربوط به آنها به‌کارمی‌روند درضمیمهٔ ۳ آمده‌اند. فرمولهای دیگر را می‌توان درمرجع [A5] (ر. ك. ضمیمهٔ ۱) ومراجع مربوط به جداول مقادیر عددی موجود در مرجع [A6] یافت. هرچند اطلاق ۱انتگرال کسینوس به انتگرالی که درمسئلهٔ ۳ دیدیم مرسوم است باید توجه‌کنیم که این انتگرال از ۰ تا x وجود ندارد. (چرا؟)

۱۲. بسط مجانبی $Q(1/2,\ x)$ را با اثبات اینکه $y=e^{x}\sqrt{x}Q(1/2,\ x)$ در $y'=(1/2x+1)y-1$ صدق می‌کند به‌دست آورید.

۱۳. بسط مجانبی $Q(\alpha,\ x)$ را ازمعادلهٔ دیفرانسیلی که برای $y=e^{x}x^{1-\alpha}Q(\alpha,\ x)$ نوشته می‌شود به‌دست آورید.

۱۴. نشان دهید که

$$\mathrm{Ei}(x)=e^{-x}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u+x}\,du$$

واز روی آن با بسط $1/(u+x)$ برحسب توانهای $1/x$ وانتگرالگیری جمله به جمله، سری (۲۲) را به‌دست آورید.

۱۵. نشان دهید که $\mathrm{Ei}(ix)=\mathrm{ci}(x)-i\,\mathrm{si}(x)$. سپس در (۲۲) به‌جای x قرار دهید ix و در دوطرف قسمتهای حقیقی وموهومی را از یکدیگر جدا کنید؛ نشان دهید که این‌کار به بسطهای مجانبی $\mathrm{ci}(x)$ و $\mathrm{si}(x)$، که درمسائل ۳ و ۴ به‌دست آمدند، منجرمی‌شود.

۲۰

احتمال و آمار

اهمیت آمار ریاضی درمهندسی، به‌ویژه درتولید انبوه و درتحلیل داده‌های تجربی رو به تزاید است. دراین فصل موضوع را به‌اجمال بررسی می‌کنیم. مطلب را با نمایش جدولی ونموداری داده‌ها شروع می‌کنیم (بخشهای ۲.۲۰ و ۳.۲۰). سپس برخی مفاهیم وروابط بنیادی نظریهٔ احتمال را که پایهٔ آمار ریاضی است مورد بحث قرار می‌دهیم (بخشهای ۴.۲۰ الی ۱۱.۲۰). بقیهٔ بخشهای این فصل (۱۲:۲۰ تا ۲۰.۲۰) به برخی ازمهمترین روشهای آماری اختصاص دارد.

پیشنیاز این فصل: حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی.
بخشهایی که در دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۱۷.۲۰ الی ۲۰.۲۰.
مراجع: ضمیمهٔ ۱، قسمت H.
جواب مسائل: ضمیمهٔ ۲.

۱.۲۰ طبیعت وهدف آمار ریاضی

درآمارمهندسی با روشهایی سروکار داریم که برای طرح تجربیات وبررسی نتایج آنها به منظورکسب اطلاعات در زمینهٔ مسائل عملی به‌کارمی‌روند، این مسائل معمولا عبارتند از بررسی کیفیت مواد خام یا محصولات ساخته شده، مقایسهٔ ماشینها وابزارها یا روشهای مورد استفاده درتولید نتیجهٔ کار کارگران، عکس‌العمل مصرف کننده درمقابل محصولات جدید، تأثیر شرایط مختلف دریك فرایند شیمیایی، رابطهٔ بین مقدار آهن درسنگ آهن و چگالی سنگ آهن، کارآیی سیستمهای تهویه در دماهای مختلف، رابطهٔ بین سختی راکولی

ومقدار کربن موجود درفولاد وغیره.

مثلاً درفرایند تولید انبوه (پیچ ومهره، لامپ الکتریکی، دگمه‌های ماشین تحریر و غیره) معمولا هم کالای بی‌عیب، یعنی کالایی که دارای شرایط کیفی مورد نظراست داریم وهم کالای معیوب، یعنی کالایی که دارای شرایط کیفی موردنظر نیست. این‌شرایط می‌توانند بیشترین وکمترین قطرمیله‌های انتقال‌حرکت، حداقل طول‌عمرلامپهای الکتریکی، مقادیرحدی مقاومتهای مصرف شده در رادیو وتلویزیون، حداکثر وزن بسته‌های پستی، حداقل‌مقدارمحتویات بطریهای پرشده به‌طوراتوماتیك، بیشترین زمان‌عکس‌العمل کلیدها و حداقل استحکام نخ بافندگی باشند.

تفاوت درکیفیت محصولات به تغییر درعوامل متعددی مربوط است (مثلا تغییر در مواد خام عملکرد ماشینهای اتوماتیك، مهارت کارگر وغیره) که میزان تأثیر آنها قابل پیش‌بینی نیست به‌طوری‌که تغییر را باید تغییر تصادفی درنظرگرفت. درمورد ارزیابی کارآیی روشهای تولید و دیگر مثالهایی که ذکرشد وضع به همین منوال است.

دراکثر موارد بررسی همهٔ نمونه‌های کالای تولید شده به قدری‌گران و وقت‌گیر است‌که مقرون به صرفه نیست و درصورتی‌که این عمل بررسی منجر به ازبین رفتن خود جنس شود حتی این‌کار غیرممکن است. ازاین‌رو به‌جای بررسی تك تك محصولات یك کارخانه فقط تعدادکمی ازآنها (یك «نمونه») را مورد بررسی قرار داده، ازاین‌بررسی نتایجی درمورد‌کل («جامعه») می‌گیرند. هرگاه ازمیان یك مجموعهٔ ۱۰۰۰ پیچی ۱۰۰ عدد را جداکرده مشاهده‌کنیم که ۵ عدد آنها معیوبند درآن صورت تمایل داریم نتیجه بگیریم که حدود ۵٪ پیچهای مجموعه معیوبند مشروط برآنکه پیچها «به‌تصادف» انتخاب شوند، یعنی «شانس» انتخاب هرپیچ با هرپیچ دیگر برابر باشد. واضح است‌که این یك نتیجه‌گیری مطلقاً قطعی نیست، یعنی نمی‌توان‌گفت‌که دقیقاً ۵٪ کل پیچها معیوبند، اما در اکثرموارد به‌هیچ وجه چنین حکم دقیقی دارای اهمیت عملی خاصی نیست. همچنین به نظرمی‌رسدکه هرقدر انتخاب نمونه تصادفیتر باشد، نتیجه‌ای که می‌گیریم مطمئنتراست، خواهیم دید که به‌کمك نظریهٔ احتمال ریاضی می‌توان مفاهیم شهودی مبهم را دقیق‌کرد. به علاوه، این نظریه معیارهایی برای سنجش قابلیت اطمینان نتایجی که توسط روشهای آماری ازنمونه‌ها درمورد جامعه‌گرفته می‌شود به‌دست می‌دهد.

به همین نحو، برای به‌دست آوردن اطلاع درمورد μ، مقدارآهن موجود درسنگ آهن، می‌توان n نمونه ازسنگ آهن را به‌طور تصادفی اختیارکرده وآهن موجود در آنها را اندازه‌گرفت. این اندازه‌گیری یك نمونهٔ n عددی $x_1, \dots, x_n$ (n نتایج اندازه‌گیری) به‌دست می‌دهدکه میانگین‌آن $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ تقریبی‌برای μ است.

ممکن است مسائلی که طبیعتهای متفاوتی دارند نیاز به‌روشها و تکنیکهای متفاوت داشته‌باشند. امامراحلی‌که ازفرمولبندی‌کردن تارسیدن به‌جواب طی می‌کنیم تقریباً درتمام مواردیکسان است. این مراحل عبارتند از

۱. فرمولبندی مسئله. این اهمیت دارد که مسئله‌را به‌روشی دقیق‌فرمولبندی کرده جستجو برای حل مسئله را محدود کنیم، به طوری که با توجه به‌هزینهٔ تحقیق آماری، مهارت جستجوگر، و وسایل موجود بتوان انتظارجواب خوبی‌رادرفاصلهٔ زمانی معین‌داشت. این مرحله همچنین باید شامل خلق مدلی ریاضی برمبنای مفاهیم روشن باشد. (مثلا، باید منظور ازکالای معیوب را درمسئلهٔ خاصی که باآن سروکار داریم روشن کنیم.)

۲. طرح آزمایش. این مرحله شامل انتخاب روش آماری مورد استفاده درمرحلهٔ آخر، انتخاب حجم نمونهٔ n (تعداد عناصری که باید استخراج و بررسی شوند یا تعداد آزمایشهایی که باید صورت گیرند وغیره)، وانتخاب روشهای فیزیکی و تکنیکهایی است که درآزمایش مورد استفاده قرارمی گیرند، هدف نهایی به‌دست‌آوردن بیشترین اطلاعات باصرف حداقل هزینه و وقت است.

۳. آزمایش کردن یاگردآوری داده‌ها. این مرحله‌باید درچهارچوب قوانین دقیق‌ومشخصی تحقق پذیرد.

۴. جدول بندی. دراین مرحله داده‌های آزمایشی را درجدولی ساده و روشن تنظیم می کنیم و آنها را به‌صورت دیاگرام، نمودارمیله‌ای، وغیره نمایش می‌دهیم‌واعدادی را هم که معرف حجم میانگین وپراکندگی نمونه هستند محاسبه می کنیم.

۵. استنباط آماری. دراین مرحله بااستفاده ازنمونه، روش آماری مناسبی‌برای پی‌بردن به‌خواص نامعلوم جامعه به‌کارمی‌بریم تاجواب مسئله را به‌دست آوریم.

۲.۲۰ نمایش جدولی ونموداری نمونه‌ها

معمولا درآزمایشهای آماری رشته‌ای ازمشاهدات (دربیشتر موارد به‌صورت اعداد)داریم، این مشاهدات را به‌ترتیبی که اتفاق می‌افتند می نویسیم. یك مثال‌نوعی درجدول۱.۲۰ آمده است. داده‌های مندرج دراین جدول باساختن استوانه‌های آزمون استاندارد (به قطر ۱۵ و ارتفاع ۳۰ سانتیمتر) از بتون و اندازه گیری میزان شکنندگی آنها بعد از ۲۸ روز حاصل شده‌اند. بنابراین **نمونه‌ای** مرکب از ۱۰۰ **مقدار نمونه‌ای** داریم، یعنی **حجم** نمونه برابراست با $n=۱۰۰$.

در این بخش چگونگی نمایش نمونه‌ها را به صورت جدولی و نموداری مناسب فراخواهیم‌گرفت. برای این منظورکافی‌است روشهای مربوطه را درمورد نمونهٔ ذکر شده درجدول ۱.۲۰ مورد بحث قراردهیم.

اکنون برای آنکه ببینیم جدول ۱.۲۰ چه اطلاعاتی دربر دارد،داده‌ها را مرتب می کنیم. دریك ستون ۳۰۰(کوچکترین مقدار)، ۳۱۰، ۳۲۰، ...، ۴۴۰ (بزرگترین مقدار) را می‌نویسیم. سپس جدول ۱.۲۰ را سطر به سطر بررسی کرده وبا مشاهدهٔ‌هرعدد،

مقابل آن درجدول یك خط نشان می‌گذاریم. بدین طریق یك‌جدول **خط‌نشانی** برای نمونه به‌دست می‌آید که مرکب از دوستون اول جدول ۲.۲۰ است. تعداد خط نشانها درستون سوم جدول ۲.۲۰ آمده است. هرعدد ذکرشده درستون سوم نشان دهندهٔ تعداد دفعاتی‌است که مقدار x درنمونه روی داده است و فراوانی مطلق یا به اختصار **فراوانی** مقدار x درنمونه نامیده می‌شود. با تقسیم این اعداد بر n، حجم نمونه، **فراوانی نسبی** حاصل می‌شود که آن‌را درستون چهارم می‌نویسیم. درجدول ۲.۲۰، n را ۱۰۰ گرفته‌ایم؛ بنابراین $x = ۳۳۰$ دارای فراوانی ۶ وفراوانی نسبی ۰٫۰۶ یا ۶٪ است.

اگر به ازای یك مقدارمعین x همهٔ فراوانیهای مربوط به مقادیر نمونه‌ای کوچکتر از x یا مساوی با x را جمع کنیم، **فراوانی تجمعی** نظیر x حاصل می‌شود. ستون پنجم جدول ۲.۲۰ به این ترتیب به‌دست آمده‌است. مثلا با $x = ۳۵۰$ فراوانی تجمعی ۳۷ نظیر می‌شود، واین بدان معنی است که ۳۷ مقدارنمونه‌ای کوچکتر از، یامساوی با ۳۵۰هستند. باتقسیم فراوانی تجمعی بر n، حجم نمونه، **فراوانی نسبی تجمعی** حاصل می‌شود که در ستون ۶ جدول ۲.۲۰ آمده است. مثلا باتوجه به‌ستون ششم جدول ملاحظه می‌کنیم که ۷۶٪ مقادیرنمونه‌ای کوچکتر ازیا مساوی با ۳۸۰ هستند.

روش خط نشان با خطا همراه بوده کنترل آن دشوار است. بهتر آن است که داده‌ها را روی‌کارتهای جداگانه نوشته، آنهارا دسته‌بندی‌کرده تعدادکارتهای هردسته رابشماریم این عمل را می‌توان بادست وبا روشی‌کاملا مکانیکی انجام داد.

جدول ۱.۲۰

نمونهٔ ۱۰۰ مقداری مقاومت کششی درمقابل شکنندگی ($lb/in^۲$) برای استوانه‌های بتونی

۳۷۰	۳۲۰	۳۵۰	۳۶۰	۳۴۰	۳۸۰	۴۱۰	۳۴۰	۳۸۰	۳۲۰
۴۲۰	۳۰۰	۳۷۰	۳۸۰	۳۵۰	۳۷۰	۳۶۰	۳۵۰	۳۴۰	۳۵۰
۳۷۰	۴۰۰	۳۶۰	۳۳۰	۳۹۰	۳۳۰	۴۴۰	۳۹۰	۳۹۰	۳۷۰
۳۴۰	۳۸۰	۳۹۰	۳۵۰	۳۵۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۶۰	۳۵۰	۳۲۰
۴۲۰	۳۷۰	۳۴۰	۳۶۰	۳۵۰	۴۰۰	۳۹۰	۳۵۰	۳۶۰	۴۰۰
۳۷۰	۴۰۰	۳۸۰	۳۹۰	۳۲۰	۳۳۰	۳۷۰	۳۵۰	۴۰۰	۴۲۰
۳۶۰	۳۶۰	۳۰۰	۳۶۰	۳۳۰	۳۵۰	۳۸۰	۳۶۰	۳۳۰	۳۹۰
۳۴۰	۳۷۰	۳۷۰	۳۹۰	۳۵۰	۳۷۰	۳۷۰	۳۵۰	۳۹۰	۳۶۰
۳۷۰	۳۳۰	۳۴۰	۳۶۰	۳۸۰	۳۸۰	۳۵۰	۳۶۰	۴۵۰	۳۷۰
۳۶۰	۳۴۰	۴۰۰	۳۶۰	۴۱۰	۳۷۰	۴۰۰	۳۹۰	۳۶۰	۳۴۰

D. L. IVEY, Splitting tensile tests on structural lightweight aggregate concrete. Texas Transportation Institute, College Station, Texas, 1965.

جدول ۲.۲۰

جدول فراوانی نمونهٔ ذکرشده درجدول ۱.۲۰

۱ مقاومت کششی $x(\text{lb/in}^2)$	۲ خط نشان	۳ فراوانی مطلق	۴ فراوانی نسبی	۵ فراوانی تجمعی	۶ فراوانی نسبی تجمعی
۳۰۰	ǀǀ	۲	۰ر۰۲	۲	۰ر۰۲
۳۱۰		۰	۰ر۰۲	۲	۰ر۰۲
۳۲۰	ǀǀǀǀ	۴	۰ر۰۴	۶	۰ر۰۶
۳۳۰	卌 ǀ	۶	۰ر۰۶	۱۲	۰ر۱۲
۳۴۰	卌 卌 ǀ	۱۱	۰ر۱۱	۲۳	۰ر۲۳
۳۵۰	卌 卌 ǀǀǀǀ	۱۴	۰ر۱۴	۳۷	۰ر۳۷
۳۶۰	卌 卌 卌ǀ	۱۶	۰ر۱۶	۵۳	۰ر۵۳
۳۷۰	卌 卌 卌	۱۵	۰ر۱۵	۶۸	۰ر۶۸
۳۸۰	卌 ǀǀǀ	۸	۰ر۰۸	۷۶	۰ر۷۶
۳۹۰	卌 卌	۱۰	۰ر۱۰	۸۶	۰ر۸۶
۴۰۰	卌 ǀǀǀ	۸	۰ر۰۸	۹۴	۰ر۹۴
۴۱۰	ǀǀ	۲	۰ر۰۲	۹۶	۰ر۹۶
۴۲۰	ǀǀǀ	۳	۰ر۰۳	۹۹	۰ر۹۹
۴۳۰		۰	۰ر۰۰	۹۹	۰ر۹۹
۴۴۰	ǀ	۱	۰ر۰۱	۱۰۰	۱ر۰۰

اگر یك مقدار عددی معین درنمونه‌ای روی ندهد، فراوانی آن صفرخواهد بود. هرگاه تمام n مقدار نمونه ازنظرعددی مساوی باشند، آنگاه فراوانی این عدد n وفراوانی نسبی آن $n/n = 1$ است. چون این دومورد حالتهای فرین هستند، داریم

قضیهٔ ۱ (فراوانی نسبی)

فراوانی نسبی حداقل برابر ۰ و حداکثر برابر ۱ است.

فرض می‌کنیم نمونه‌ای با حجم n دارای m مقدار عددی مختلف

$$x_{۱},\ x_{۲},\ \cdots,\ x_m \qquad (m \leqslant n)$$

با فراوانیهای نسبی

$$\tilde{f}_{۱},\ \tilde{f}_{۲},\ \cdots,\ \tilde{f}_m$$

باشد. آنگاه می‌توان تابعی به‌صورت[1]

$$(۱) \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \tilde{f}_j & x = x_j \quad (j = ۱,\ ۲,\ \cdots,\ m) \\ ۰ & \text{به‌ازای هرمقدار } x \text{ که متعلق به‌نمونه نباشد} \end{cases}$$

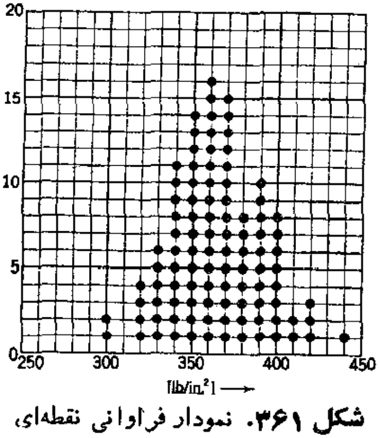
تعریف کرد. این تابع که **تابع فراوانی نمونه** نام دارد چگونگی توزیع مقادیر نمونه را نشان می‌دهد. بنابراین می‌گوییم که این تابع **توزیع فراوانی** نمونه را مشخص می‌کند.

مثلاً، درجدول ۲.۲۰ مقادیر تابع فراوانی درستون ۴ نشان داده شده‌اند، و چنانکه مشاهده می‌شود $\tilde{f}(۳۰۰) = ۰/۰۲$ ، $\tilde{f}(۳۱۰) = ۰$ ، $\tilde{f}(۳۲۰) = ۰/۰۴$ و الی آخر.

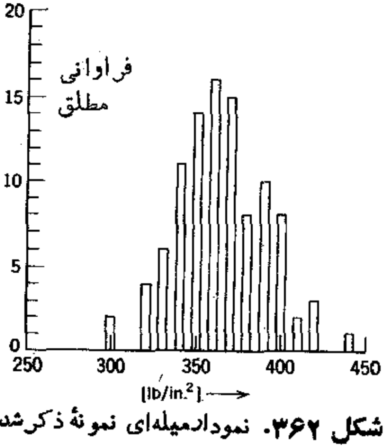
درنمونه‌ای به حجم n ، باید مجموع تمام فراوانیها برابر n باشد. (چرا؟) از اینجا نتیجه می‌شود

قضیهٔ ۲ (مجموع فراوانیهای نسبی)

در هرنمونه مجموع تمام فراوانیهای نسبی برابر ۱ است، یعنی



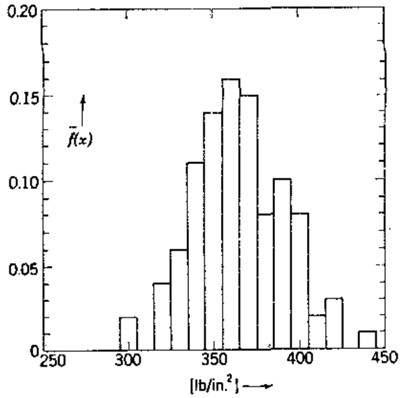
شکل ۳۶۱. نمودار فراوانی نقطه‌ای، نمونه ذکرشده درجدول ۲.۲۰



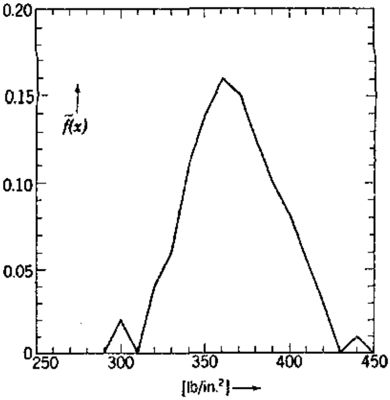
شکل ۳۶۲. نمودارمیله‌ای نمونهٔ ذکرشده درجدول ۲.۲۰

---

۱. ازآن جهت $\tilde{f}$ را به‌کاربرده‌ایم که نماد ساده‌تر f را برای نمایش تابع فراوانی لازم‌داریم. دراین کتاب f بیشتر به‌کارخواهد رفت.



شکل ۳۶۳. بافت نگارفراوانی نمونهٔ ذکرشده درجدول ۲.۲۰



شکل ۳۶۴. چند ضلعی فراوانی‌نمونهٔ ذکر شده درجدول ۲.۲۰

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{f}(x_j)=\tilde{f}(x_1)+\tilde{f}(x_2)+\cdots+\tilde{f}(x_m)=1$$

مثالی از **نمایش نموداری** نمونه‌ها را درشکلهای ۳۶۱ تا ۳۶۴ می‌بینید. درشکل ۳۶۳ مساحت هرمستطیل برابر فراوانی نسبی متناظر با آن است. ازاین‌رو محورعرضها را برای نمایش «فراوانی نسبی برفاصلهٔ واحد» به‌کار می‌بریم. چون دراین حالت مستطیلها هم عرض هستند، مقادیر روی محور عرضها متناسب با $\tilde{f}(x)$ است و می‌توان این محور را برحسب $\tilde{f}(x)$ مدرج کرد. درموردی که عرض مستطیلها با هم برابر نباشند این مطلب درست نیست. درشکل ۳۶۴ نیز وضع به همین منوال است.

اکنون تابع زیر را معرفی می‌کنیم:

$\tilde{F}(x)=$ مجموع فراوانیهای نسبی تمام مقادیری‌که کوچکتر ازیا مساوی با x هستند.

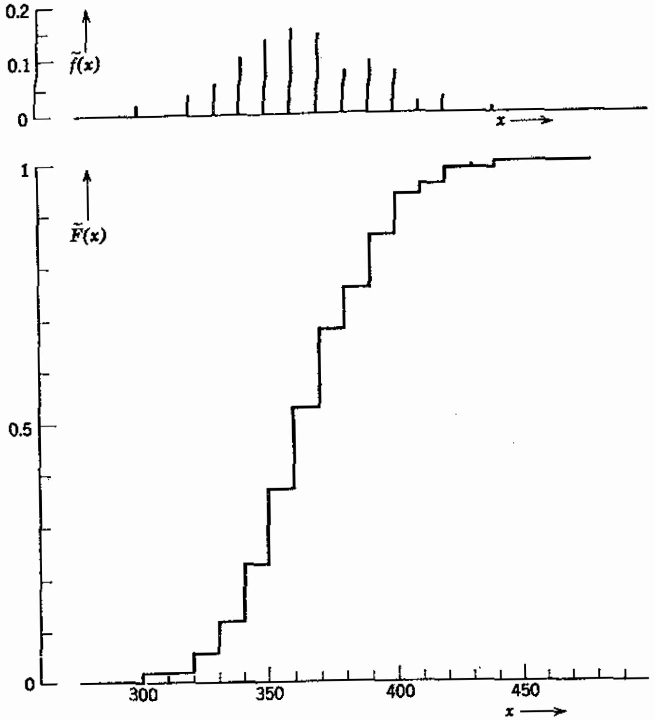
این تابع را **تابع فراوانی تجمعی نمونه** یا **تابع توزیع نمونه** می‌نامند. درشکل ۳۶۵ مثالی ازاین تابع آورده‌ایم.

$\tilde{F}(x)$ یك تابع پله‌ای (تابع تکه‌ای ثابت) است‌که پرشهایی به اندازهٔ $\tilde{f}(x)$ درنقاطی که درآنها $\tilde{f}(x)\neq 0$ دارد. اولین پرش مربوط به‌کوچکترین مقدار و آخرین آن مربوط به بزرگترین مقدار نمونه است. پس ازآن، $\tilde{F}(x)=1$.

رابطهٔ بین $\tilde{f}(x)$ و $\tilde{F}(x)$ عبارت است از

$$\tilde{F}(x)=\sum_{t\leqslant x}\tilde{f}(t) \tag{2}$$

که درآن $t \leqslant x$ بدین معنی است‌که به ازای x باید مجموع تمام مقادیر $\tilde{f}(t)$ راکه در آن t نابیشتر از x است تشکیل دهیم.



شکل ۳۶۵. تابع فراوانی $\tilde{f}(x)$ و تابع فراوانی‌تجمعی $\tilde{F}(x)$ نمونهٔ ذکرشده درجدول ۲.۲۰

هرگاه نمونه‌ای شامل تعداد زیادی مقادیر نمونه‌ای مختلف باشد، آنگاه نمایشهای جدولی و نموداری آن پیچیده می‌شوند، بررسی چنین نمونه‌هایی را می‌توان با فرایند **گروه‌بندی** به‌شرح زیرساده‌ترکرد.

برای یك نمونهٔ مفروض، فاصله‌ای مانند I که شامل همهٔ مقادیر نمونه‌ای است انتخاب می‌کنیم. I را به‌زیر فاصله‌هایی‌که **فاصلهٔ رده‌ای** نامیده می‌شوند تقسیم‌می‌کنیم. نقاط وسط این فاصله‌ها را **نقاط میان رده‌ای** یا **نمایندهٔ رده** می‌نامند. مقادیرنمونه‌ای درهریك ازاین فاصله‌ها یك رده تشکیل می‌دهند. تعداد آنها **فراوانی رده‌ای** مربوطه نامیده می‌شود. ازتقسیم فراوانی رده‌ای بر n، حجم نمونه، فراوانی نسبی رده‌ای‌حاصل می‌شود. این فراوانی، وقتی به صورت تابعی مانند $\tilde{f}(x)$ از نماینده‌های رده‌ها مورد بررسی قرارگیرد **تابع فراوانی نمونهٔ‌گروه‌بندی شده** نامیده می‌شود، و فراوانی نسبی رده‌ای تجمعی، تابعی مانند $\tilde{F}(x)$ از نمایندهٔ رده‌ها است. این تابع را **تابع توزیع نمونهٔ گروه‌بندی شده** می‌نامند. مثالی دراین مورد در جدول ۳.۲۰ و ۴.۲۰ ارائه شده است.

هرقدر تعداد رده‌هایی‌که انتخاب می‌کنیم‌کمترباشد، توزیع نمونه‌های‌گروه‌بندی شده ساده‌ترمی‌شود اما درعوض اطلاعات بیشتری‌را ازدست می‌دهیم، زیرا مقادیرنمونه‌ای

اصلی دیگر به‌صورت صریح ظاهر نمی‌شوند. گروه‌بندی باید طوری انجام شود که فقط جزئیات غیرضروری حذف شوند. برای اجتناب از پیچیدگیهای غیرضروری در استفاده‌های بعدی از یك نمونهٔ گروه‌بندی شده باید از قواعد زیر پیروی کرد.

۱. تمام فاصله‌های رده‌ای باید هم‌طول باشند.

۲. فاصله‌های رده‌ای باید طوری انتخاب شوند که نماینده‌های رده‌ها اعداد ساده‌ای باشند (اعدادی که رقمهای غیرصفرشان کم است).

۳. هرگاه مقدار نمونه‌ای x_j برنقطهٔ انتهایی مشترك دوفاصلهٔ رده‌ای منطبق باشد، آن را در رده‌ای قرار می‌دهیم که درسمت راستش قرار دارد

جدول ۳.۲۰

مقاومتهای مربوط به ۵۰ عدل پنبه (نیروی لازم برای ازهم‌گسستن کلاف برحسب پوند)

۱۱۴	۱۱۸	۸۶	۱۰۷	۸۷	۹۴	۸۲	۸۱	۹۸	۸۴
۱۲۰	۱۲۶	۹۸	۸۹	۱۱۴	۸۳	۹۴	۱۰۶	۹۶	۱۱۱
۱۲۳	۱۱۰	۸۳	۱۱۸	۸۳	۹۶	۹۶	۷۴	۹۱	۸۱
۱۰۲	۱۰۷	۱۰۳	۸۰	۱۰۹	۷۱	۹۶	۹۱	۸۶	۱۲۹
۱۳۰	۱۰۴	۸۶	۱۲۱	۹۶	۹۶	۱۲۷	۹۴	۱۰۲	۸۷

جدول ۴.۲۰

جدول فراوانی نمونهٔ ذکرشده درجدول ۳.۲۰ (گروه‌بندی شده)

فاصلهٔ رده‌ای	نمایندهٔ رده x	خط نشانها	فراوانی مطلق	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{F}(x)$
۶۵ — ۷۵	۷۰	||	۲	۰٫۰۴	۰٫۰۴
۷۵ — ۸۵	۸۰	卌 |||	۸	۰٫۱۶	۰٫۲۰
۸۵ — ۹۵	۹۰	卌 卌 |	۱۱	۰٫۲۲	۰٫۴۲
۹۵ — ۱۰۵	۱۰۰	卌 卌 ||	۱۲	۰٫۲۴	۰٫۶۶
۱۰۵ — ۱۱۵	۱۱۰	卌 |||	۸	۰٫۱۶	۰٫۸۲
۱۱۵ — ۱۲۵	۱۲۰	卌	۵	۰٫۱۰	۰٫۹۲
۱۲۵ — ۱۳۵	۱۳۰	||||	۴	۰٫۰۸	۱٫۰۰
		مجموع	۵۰	۱٫۰۰	

مسائل بخش ۲۰۲۰

درهریك از مسائل زیرجدول فراوانی نمونهٔ داده شده را تشکیل دهید و نمودار فراوانی نقطه‌ای، نمودارمیله‌ای وبافت نگارآن را رسم کنید.

۱. مقاومت [برحسب اهم]

۹۹ ۱۰۰ ۱۰۲ ۱۰۱ ۹۸ ۱۰۳ ۱۰۰ ۱۰۲ ۹۹ ۱۰۱

۱۰۰ ۱۰۰ ۹۹ ۱۰۱ ۱۰۰ ۱۰۲ ۹۹ ۱۰۱ ۹۸ ۱۰۰

۲. اعدادی که درپرتاب تاس می‌آیند

۶ ۲ ۴ ۱ ۲ ۴ ۳ ۳ ۲ ۱ ۶ ۵ ۶ ۳ ۴

۳. زمان رسیدن به‌وضع عادی یك رله (برحسب ثانیه)

۱٫۳ ۱٫۵ ۱٫۴ ۱٫۲ ۱٫۳ ۱٫۴ ۱٫۵ ۱٫۱ ۱٫۴ ۱٫۳

۱٫۴ ۱٫۱ ۱٫۵ ۱٫۳ ۱٫۶ ۱٫۴ ۱٫۴ ۱٫۵ ۱٫۳ ۱٫۲

۴. مقدارکربن موجود [%] درذغال

۸۷ ۸۶ ۸۵ ۸۷ ۸۶ ۸۷ ۸۶ ۸۱ ۷۷ ۸۵

۸۶ ۸۴ ۸۳ ۸۳ ۸۲ ۸۴ ۸۳ ۷۹ ۸۲ ۷۳

۵. مقاومت کششی (کیلوگرم برمیلیمتر مربع) فولاد ورق

۴۴ ۴۳ ۴۱ ۴۱ ۴۴ ۴۴ ۴۳ ۴۴ ۴۲ ۴۵ ۴۳ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶

۴۲ ۴۵ ۴۱ ۴۴ ۴۴ ۴۳ ۴۴ ۴۶ ۴۱ ۴۳ ۴۵ ۴۵ ۴۲ ۴۴ ۴۴

۶. مقدار «مازاد» یا «کسری ازصد» ورقه‌های کاغذ هربسته درفرایند بسته‌بندی

۰ ۱— ۰ ۰ ۱ ۱ ۲ ۰ ۱ ۰

۷. مقدار بنزین مصرف شده (برحسب لیتر) درفاصلهٔ معین توسط ۶ اتومبیل ازیك نوع

۱۵٫۰ ۱۵٫۵ ۱۴٫۵ ۱۵٫۰ ۱۵٫۵ ۱۵٫۰

۸. وزن پاکتهای پرشده (برحسب گرم) دریك فرایند بسته‌بندی اتوماتیك

۲۰۰ ۲۰۳ ۱۹۹ ۱۹۸ ۲۰۱ ۲۰۰ ۲۰۱ ۲۰۱

۹. زمان توقف (برحسب دقیقه، گرد شده) یك قطار درایستگاههای مختلف

۳ ۴ ۱ ۰ ۲ ۲ ۳ ۱ ۵ ۳

۱۰. نمودار تابع فراوانی تجمعی نمونهٔ ذکرشده درمسئله ۳ را رسم کنید.

۱۱. نمودار میله‌ای، بافت نگار، وچند ضلعی فراوانی نمونهٔ گروه‌بندی شدهٔ جدول ۴.۲۰ را بیابید.

۱۲. بافت نگارنمونهٔ مربوط به طول عمر [برحسب ساعت] لامپهای الکتریکی راکه در جدول زیرآمده‌اند رسم کنید

فراوانی مطلق	طول عمر	فراوانی مطلق	طول عمر	فراوانی مطلق	طول عمر
۴	۹۵۰—۱۰۵۰	۵۱	۱۳۵۰—۱۴۵۰	۲۰	۱۷۵۰—۱۸۵۰
۹	۱۰۵۰—۱۱۵۰	۵۸	۱۴۵۰—۱۵۵۰	۹	۱۸۵۰—۱۹۵۰
۱۹	۱۱۵۰—۱۲۵۰	۵۳	۱۵۵۰—۱۶۵۰	۳	۱۹۵۰—۲۰۵۰
۳۶	۱۲۵۰—۱۳۵۰	۳۷	۱۶۵۰—۱۷۵۰	۱	۲۰۵۰—۲۱۵۰

۱۳. نمونهٔ داده شده درجدول ۱.۲۰ را گروه‌بندی کنید، بااستفاده از فاصله‌های رده‌ای که نقاط میانی آنها ۳۰۰، ۳۲۰، ۳۴۰، ... هستند جدول فراوانی مربوطه را تشکیل دهید. بافت‌نگار را رسم کرده وآن را باشکل ۳۶۳ مقایسه کنید. تابع‌فراوانی تجمعی را رسم کنید.

۱۴. نمونهٔ ارائه شده درجدول ۳.۲۰ را، با استفاده از فاصله‌های رده‌ایی که نقاط میانیشان ۷۵، ۸۵، ۹۵، ... هستند گروه‌بندی کنید. جدول فراوانی مربوطه راتشکیل دهید. بافت نگار را رسم کرده وبا بافت نگارمسئلهٔ ۱۱ مقایسه کنید.

۱۵. در ۱۵۰۰ اندازه‌گیری، کوچکترین و بزرگترین عددهای به دست آمده به ترتیب ۱۰٫۸، ۱۱٫۹ سانتیمتر بوده‌اند. فاصله‌های ردهٔ مناسبی برای گروه بندی این داده‌ها پیشنهاد کنید.

۳.۲۰ میانگین نمونه و واریانس نمونه

تابع فراوانی (یا تابع توزیع) جزئیات یک نمونه را مشخص می‌کند. بااستفاده از این

تابع می‌توان معیارهایی، مانند اندازهٔ متوسط مقادیر نمونه‌ای، «پراکندگی» «عدم‌تقارن» وغیره برای‌خواص معین‌نمونه محاسبه‌کرد. دراین بخش‌مهمترین این معیارها یعنی دوکمیتی راکه میانگین نمونه و واریانس نمونه نامیده می‌شوند، مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

مقدار میانگین نمونهٔ x_1، x_2، ...، x_n، یا اجمالاً **میانگین نمونه**، کـه با $\bar{x}$ نمایش داده می‌شود، چنین تعریف می‌شود:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \qquad (1)$$

این مقدار ازتقسیم مجموع تمام مقادیر نمونه‌ای بر n، حجم نمونه، حاصل‌می‌شود. واضح است‌که $\bar{x}$ معیاری است برای اندازهٔ متوسط مقادیر نمونه‌ای وگاهی‌کلمهٔ متوسط برای نامیدن آن مورد استفاده قرارمی گیرد.

واریانس نمونهٔ x_1، ...، x_n یا اجمالاً، واریانس نمونه،با s^2 نشان داده می‌شود وچنین تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} s^2&=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2 \\ &=\frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]. \end{aligned} \qquad (2)$$

این مقدار ازتقسیم مجموع مربعات انحراف مقادیـر نمونه‌ای از میانگین $\bar{x}$، بر $n-1$ حاصل می‌شود. واریانس پراکندگی یا پخش مقادیرنمونه‌ای را اندازه می گیرد وجز در حالت‌نادری‌که تمام مقادیر نمونه‌ای باهم برابرند (وبنابراین با $\bar{x}$ نیز برابرهستند) مثبت است. جذرمثبت s^2 را **انحراف معیار** نمونه می‌نامند وبا s نشان می‌دهند.

مثال ۱. میانگین نمونه و واریانس نمونه

ده میخ باطولهای (برحسب سانتیمتر)

۰٫۸۰ ۰٫۸۱ ۰٫۸۱ ۰٫۸۲ ۰٫۸۱ ۰٫۸۲ ۰٫۸۰ ۰٫۸۲ ۰٫۸۱ ۰٫۸۱

به تصادف انتخاب شده‌اند. باتوجه به (۱)، میانگین این نمونه عبارت است از

$$\bar{x}=\frac{1}{10}(0.80+0.81+0.81+0.82+\cdots+0.81)=0.811 \text{ سانتیمتر}$$

بااستفاده از (۲) دیده می‌شودکه واریانس نمونهٔ مزبور برابراست با

$$s^2=\frac{1}{9}[(0.800-0.811)^2+\cdots+(0.810-0.811)^2]=0.000054$$

سانتیمترمربع

هر گاه مقادیر نمونه‌ای برابر را باهم درنظربگیریم، این محاسبه ساده‌ترخواهد شد. آنگاه

$$\bar{x} = \frac{۱}{۱۰}(۲ \times ۰٫۸۰ + ۵ \times ۰٫۸۱ + ۳ \times ۰٫۸۲) = ۰٫۸۱۱$$

درون پرانتزمجموع سه‌مقدار نمونه‌ای عدداً متفاوت $x_۱ = ۰٫۸۰$ ، $x_۲ = ۰٫۸۱$ ، $x_۳ = ۰٫۸۲$ را داریم، که هریك درفراوانی مربوط به خود ضرب شده‌اند. همین‌طور

$$s^۲ = \frac{۱}{۹}[۲(۰٫۸۰۰ - ۰٫۸۱۱)^۲ + ۵(۰٫۸۱۰ - ۰٫۸۱۱)^۲$$

$$+ ۳(۰٫۸۲۰ - ۰٫۸۱۱)^۲] = ۰٫۰۰۰۰۵۴. \qquad \blacktriangle$$

این مثال چگونگی محاسبهٔ $\bar{x}$ و $s^۲$ با استفاده از تابع فراوانی $\tilde{f}(x)$ نمونه را تشریح می‌کند. هر گاه نمونه‌ای n مقداری درست شامل n مقدار عدداً متفاوت

$$x_۱, x_۲, \cdots, x_m \qquad (m \leqslant n),$$

باشد. آنگاه فراوانیهای نسبی متناظر عبارتند از

$$\tilde{f}(x_۱), \tilde{f}(x_۲), \cdots, \tilde{f}(x_m).$$

درنتیجه فراوانیهای مربوطه که درمحاسبه مورد نیازند برابرند با

$$n\tilde{f}(x_۱), n\tilde{f}(x_۲), \cdots, n\tilde{f}(x_m),$$

و (۱) و (۲) به صورت

$$\bar{x} = \frac{۱}{n}\sum_{j=۱}^{m} x_j n\tilde{f}(x_j) \qquad (۳)$$

و

$$s^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{j=۱}^{m}(x_j - \bar{x})^۲ n\tilde{f}(x_j) \qquad (۴)$$

درمی‌آیند. توجه کنید که در (۱) و (۲) جمع روی تمام مقادیر نمونه‌ای انجام می‌گیرد، وحال آنکه دراینجا جمع برروی مقادیرعدداً متفاوت نمونه صورت می‌پذیرد. فراوانیهای مطلق $nf(x_j)$ اعداد صحیح هستند، و حال آنکه فراوانیهای نسبی $f(x_j)$ ممکن است اعشاری باشند، مثلا هرگاه $n = ۲۳$ یا $n = ۸۴$ و غیره باشد.

فرمولهای مربوط به $s^۲$ درعمل به‌کارنمی‌روند زیرا $x_j - \bar{x}$ ها ممکن است ازنظر قدرمطلق درمقایسه بامقادیر نمونه‌ای کوچك باشند، و این ممکن است سبب ازبین رفتن ارقام معنی‌دار شود (درمحاسبه با ماشینهای محاسبه ممکن است این ارقام ظاهر نشوند). حال می‌خواهیم برای $s^۲$ فرمولی را به دست آوریم که در محاسبه مورد استفاده قرار می‌گیرد. با درج

$$(x_j-\bar{x})^۲=x_j^۲-۲x_j\bar{x}+\bar{x}^۲$$

در (۲) و تبدیل آن به سه‌مجموع داریم

$$\sum(x_j-\bar{x})^۲=\sum x_j^۲-۲\bar{x}\sum x_j+\sum\bar{x}^۲$$

مجموع آخر برابر $n\bar{x}^۲$ است. باجایگزین‌کردن $\bar{x}$ از (۱) به‌دست می‌آوریم

$$n\bar{x}^۲=\frac{۱}{n}(\sum x_j)^۲,\quad -۲\bar{x}\sum x_j=-\frac{۲}{n}(\sum x_j)^۲$$

ازاین دوعبارت به‌دست می‌آوریم

$$s^۲=\frac{۱}{n-۱}\left[\sum_{j=۱}^{n}x_j^۲-\frac{۱}{n}\left(\sum_{j=۱}^{n}x_j\right)^۲\right] \qquad (۵)$$

همین طور، (۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$s^۲=\frac{۱}{n-۱}\left[\sum_{j=۱}^{m}x_j^۲nf(x_j)-\frac{۱}{n}\left(\sum_{j=۱}^{m}x_jnf(x_j)\right)^۲\right] \qquad (۶)$$

برای نمونه، درمثال ۱، مانند قبل، از (۳) و (۶) (ر. ك. جدول ۵.۲۰) مقادیر
$\bar{x}=۸٫۱۱/۱۰=۰٫۸۱۱$ و

$$s^۲=\frac{۱}{۹}\left(۶٫۵۷۷۷-\frac{۸٫۱۱^۲}{۱۰}\right)=\frac{۰٫۰۰۰۴۹}{۹}=۰٫۰۰۰۰۵۴$$

حاصل می‌شوند.

جدول ۵.۲۰

محاسبهٔ میانگین وواریانس مثال ۱ بااستفاده از (۳) و (۶)

x_j	$۱۰\tilde{f}x_j$	$x_j۱۰\tilde{f}(x_j)$	$x_j^۲$	$x_j^۲\times۱۰\tilde{f}(x_j)$
۰٫۸۰	۲	۱٫۶۰	۰٫۶۴۰۰	۱٫۲۸۰۰
۰٫۸۱	۵	۴٫۰۵	۰٫۶۵۶۱	۳٫۲۸۰۵
۰٫۸۲	۳	۲٫۴۶	۰٫۶۷۲۴	۲٫۰۱۷۲
	مجموع	۸٫۱۱		۶٫۵۷۷۷

مسائل بخش ۳.۲۰

۱. مطلوب است محاسبهٔ میانگین و واریانس نمونهٔ ذکرشده در مسئلهٔ ۲ بخش ۲.۲۰.

۲. مطلوب است محاسبهٔ میانگین و واریانس نمونهٔ ذکرشده درمسئلهٔ ۲ بخش ۲.۲۰.

۳. بافت نگارنمونه ۲، ۱، ۴، ۵ را رسم کنید و بـه کمك آن $\bar{x}$ و s را حدس بزنید. سپس $\bar{x}$، $s^{۲}$، و s را محاسبه کنید.

۴. نشان دهید که $\bar{x}$ بین کوچکترین و بزرگترین مقادیر نمونه‌ای قرار دارد.

۵. (**بردنمونه**) اختلاف بین بزرگترین وکوچکترین مقادیر نمونه‌را برد نمونه می‌نامند مطلوب است برد نمونهٔ مندرج درمثال ۱.

۶. (**صدك، میانه**) pامین **صدك** یك نمونه، عددی است مانند Q_p، به طوری که لااقل p% مقادیرنمونه‌ای نابیشتر از Q_p و همچنین لااقل $(۱۰۰-p)$% از مقادیرنمونه‌ای ناکمتر از Q_p باشند. هرگاه ازاین اعداد بیش ازیکی وجود داشته باشد. (درچنین حالتی‌فاصله‌ای از نقاط داریم)، p امین صدك برابرمیانگین این اعداد گرفته‌می‌شود (نقطهٔ میانی فـاصله). بخصوص، $Q_{۵۰}$ **چارك میانی** یـا **میانه** نـامیده شده بـا $\tilde{x}$ نمایش داده می‌شود. مطلوب است x برای نمونهٔ ذکرشده درجدول ۲.۲۰.

۷. صدکهای $Q_{۲۵}$ و $Q_{۷۵}$ نمونه را **چارکهای تحتانی و فوقانی** نمونه مـی‌نـامند، $Q_{۷۵}-Q_{۲۵}$، که معیاری برای پراکندگی است، **برد میان چارکی** نامیده‌می‌شود. مطلوب است $Q_{۲۵}$، $Q_{۷۵}$، $Q_{۷۵}-Q_{۲۵}$ برای نمونه‌ای که درجدول ۳.۲۰ داده‌شده است.

۸. مسائل ۶ و ۷ را برای نمونه‌ای که درجدول ۳.۲۰ داده شده است حل کنید.

۹. (**مد**) مد نمونه مقداری ازنمونه است که بیشتر ازسایر مقادیر درنمونه ظاهرمی‌شود. مطلوب است میانگین، میانه، مدنمونهٔ زیر. نتایج را تعبیرکنید.

مقدار موجودی شخصی	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰٫۰۰۰
فراوانی	۱۰۰	۹۰	۲۰

۱۰. (**مبدأکارآمد**) هرگاه $x_j = x_j{}^* + c$ که درآن $j = ۱, \ldots, n$ و c ثابت‌دلخواهی باشد، نشان دهید

$$\bar{x} = c + \bar{x}^* \quad \left(\bar{x}^* = \frac{۱}{n}\sum_{j=۱}^{n} x_j{}^*\right), \quad s^{۲} = s^{*۲},$$

که درآن $s^{*۲}$ واریانس $x_j{}^*$ ها است. (درعمل، c طوری انتخاب می‌شودکه قدر

مطلق x_j^*ها کوچك باشد. از نقطه نظر هندسی این انتقال مبدأ است و روش مبدأ کارآمد نامیده می‌شود.

۱۱. روش مبدأ کارآمد را درمورد نمونهٔ ذکرشده درمثال ۱ به‌کاربرید.

۱۲. **(کدگذاری کامل)** هرگاه $x_j=c_1x_j^*+c_2$ که‌درآن $j=1, \ldots, n$ و c_1 و c_2 ثابت هستند، نشان دهید

$$\bar{x}=c_1\bar{x}^*+c_2,\ s^2=c_1^2s^{*2},$$

که درآن $\bar{x}^*$ و s^{*2} همان معانی مسئلهٔ ۱۰ را دارند. (این روش‌را روش کدگذاری کامل می‌نامند. واضح است که این روش درمحاسبات غیرالکترونیکی، مثلا برای کنترل سریع باارزش است.)

۱۳. کدگذاری‌کامل را درمورد نمونهٔ ذکرشده درمثال ۱ به‌کاربرید.

۱۴. هرگاه نمونه‌ای گروه‌بندی شود، میانگین آن، درحالت‌کلی، تغییرخواهدکرد. نشان دهید مقدار این تغییر از $l/2$، که درآن l طول فاصله‌های رده‌ای است، تجاوز نخواهدکرد.

۱۵. میانگین و واریانس نمونهٔ گروه‌بندی نشدهٔ ذکرشده درجدول ۳.۲۰ (بخش ۲.۲۰) و نمونهٔ‌گروه‌بندی شده درجدول ۴.۲۰ را محاسبه‌کرده ونتایج را مقایسه‌کنید.

۴.۲۰ آزمایش تصادفی، برآمد، پیشامد

آزمایشها یامشاهدات آماری، نمونه‌هایی راکه قصد داریم نتایج مربوط به جامعه را از آنها استخراج‌کنیم به دست می‌دهند. برای آنکه بتوانیم چنین‌کاری بکنیم نخست باید مدلهای ریاضی جامعه را بااستفاده ازنظریهٔ احتمال ریاضی توسعه دهیم. بنابراین، نظریهٔ احتمال یکی ازمبانی مهم آمار ریاضی است وما آن را تاحدی که نیازهایمان رابرآورده کند بررسی خواهیم‌کرد. دراین بخش برخی مفاهیم بنیادی را تعریف می‌کنیم.

آزمایش تصادفی یا مشاهدهٔ تصادفی ویا اجمالا **آزمایش** یا **مشاهده** فرایندی‌است که خواص زیر را دارد:

۱. طبق مجموعه قواعدی‌که انجام‌آزمایش‌را به‌طورکامل معین می‌کند صورت‌می‌پذیرد.

۲. هرقدرکه بخواهیم می‌توانیم تکرارش‌کنیم.

۳. نتیجهٔ هراجرای‌آزمایش به «شانس» بستگی دارد (یعنی، تحت‌تأثیر عواملی است که ازکنترل ما خارجند) و بنابراین به‌طوریکتا قابل پیش‌بینی نیست.
نتیجهٔ هراجرای‌یك‌آزمایش **برآمدن**آن اجرا نامیده می‌شود.

مثالهایی که ارائه می‌شوند بازیهای شانسی هستند، چیزهایی ازقبیل ریختن تاس و پرتاب سکه، یا آزمایشهای فنی مانند انتخاب تصادفی و بازرسی ۱۰ پیچ ازجعبه‌ای محتوی ۱۰۰ پیچ، تعیین نتیجهٔ یك فرایند شیمیایی تحت شرایط مختلف، یا آزمایشهای دیگری مثل انتخاب تصادفی ۲۰ نفراز یک گروه و تعیین فشارخون آنها یا عقیده‌شان در مورد یك فیلم سینمایی.

مجموعهٔ تمام برآمدهـای ممکن یك آزمایش، **فضای نمونهٔ** آن آزمـایش نامیده می‌شود وآن رابا S نمایش می‌دهند. هر برآمد رایك عضو یایك نقطهٔ S می‌نامند. فضای نمونه را متناهی یا نامتناهی گویند، هرگاه به‌ترتیب مرکب ازتعدادی متناهی یا نامتناهی عضو باشد.

مثلاً می‌توان با آزمایش تصادفی ریختن یك تاس، فضای نمونهٔ

$$S=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

مرکب از ۶ عدد درمقابل ۶ وجه تاس، را متناظرقرارداد.

درتولید صنعتی برای پی‌بردن به معیوب یا نامعیوب بودن کالا می‌توان کالا را بـه تصادف انتخاب کرد. دراین صورت S مرکب از دو عضو D (معیوب) و N (نامعیوب) است، کـه می‌توان آنها را بـا عدد نیـزنمایش داد، مثلاً ۰ (معیوب) و ۱ (نامعیوب). هرگاه بتوان‌بین انواع عیب تمایزقایل شده، فضای نمونه‌ای خواهیم داشت که‌بیش‌از دو نقطه دارد.

فضای نمونهٔ آزمایش اندازه‌گیری استحکام پنبه (ر. ك. جدول ۳.۲۰ بخش ۲.۲۰) نامتناهی است، زیرا برآمد می‌تواند هرعدد مثبتی ازیك برد معین باشد.

دراغلب مسائل عملی خود برآمدها مورد نظرمـا نیستند، بلکه می‌خواهیم‌بدانیم که یك برآمد به مجموعهٔ معینی از برآمدها تعلق دارد (یا نه). واضح است که اگر A چنین مجموعه‌ای باشد، زیرمجموعهٔ فضای نمونهٔ S خواهد بود. ایـن مجموعه یـك **پیشامد** نامیده می‌شود.

ازآنجا که هر برآمد زیـر مجموعه‌ای از S است، هر برآمد یـك پیشامد است، منتهی پیشامدی خاص، کـه گاه پیشامد مقدماتی نامیده می‌شود. بـه همین تـرتیب S، تمامی فضا، نیز پیشامد خاصی است.

مثال ۱

هرگاه ۲ واشرازیك مجموعهٔ ۵ واشری (که اعضای‌آن از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند) برداریم، فضای نمونه مرکب از ۱۰ رویداد زیرخواهد بود

۱, ۲ ۱, ۳ ۱, ۴ ۱, ۵ ۲, ۳ ۲, ۴ ۲, ۵ ۳, ۴ ۳, ۵ ۴, ۵

ولی امکان دارد تنها تعداد واشرهای معیوبی‌که بیرون می‌کشیم موردنظرما باشد، دراین صورت سه پیشامد خواهیم داشت:

A : هیچ واشری معیوب نباشد، B: ۱ واشر معیوب باشد، C: ۲ واشر معیوب باشد.
چنانچه فرض کنیم ۳ واشر مثلاً ۱، ۲، ۳ معیوب باشند، آنگاه مشاهده می‌کنیم که

A اتفاق می‌افتد، هرگاه ۴، ۵ را برداریم

B اتفاق می‌افتد، هرگاه ۱، ۴ ؛ ۱، ۵ ؛ ۲، ۴ ؛ ۲، ۵ ؛ ۳، ۴ یا ۳، ۵ را برداریم

C اتفاق می‌افتد، هرگاه ۱، ۲ ؛ ۱، ۳ ؛ یا ۲، ۳ را برداریم. ▲

فضای نمونهٔ S و پیشامدهای یك تجربه را می‌توان با ترسیم به وسیلهٔ **نمودار ون** به‌صورت زیر نمایش داد. فرض می‌کنیم که مجموعهٔ نقاط داخل مستطیل شکل ۳۶۶ نمایش S باشد. آنگاه درون منحنی بسته‌ای که داخل مستطیل قرار دارد نمایش یك پیشامد است و ما آن را با E نشان می‌دهیم. مجموعهٔ تمام عناصر برآمدهای غیر واقع در E را **مکمل** E در S نامیده و با E^C نشان می‌دهند.[1]

مثلاً، درآزمایش ریختن یك تاس، مکمل پیشامد

E : آوردن عدد زوج

عبارت است از

E^C : آوردن عدد فرد.

پیشامدی را که شامل هیچ عنصری نباشد **پیشامد غیرممکن** یا **پیشامد تهی** نامیده، با $\varnothing$ نمایش می‌دهند.

اگر A و B دو پیشامد دلخواه در یك تجربه باشند. آنگاه پیشامد مرکب از همهٔ اعضای فضای نمونهٔ S در A یا B، یا هردو را، **اجتماع** A و B نامیده و با

$$A \cup B$$

نشان می‌دهند، پیشامد مرکب از همهٔ اعضای S که هم در A و هم در B باشند **اشتراك** A و B نامیده می‌شود و با

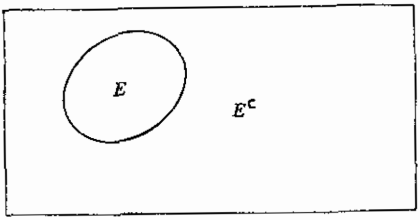
$$A \cap B$$

نمایش داده می‌شود. شکل ۳۶۷ چگونگی نمایش این دو پیشامد را به وسیلهٔ نمودار ون نشان می‌دهد. هرگاه A و B دارای عضو مشترکی نباشند، آنگاه $A \cap B = \varnothing$، و A و B را **پیشامدهای دو به دو ناسازگار** یا **پیشامدهای جدا ازهم** می‌نامند.

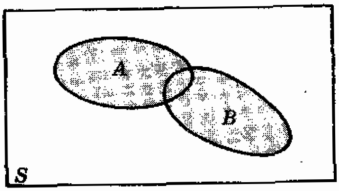
برای نمونه، درمثال ۱، $B \cap C = \varnothing$ و $B \cup C$: ۱ یا ۲ واشر معیوب.

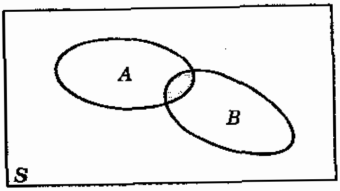
---

۱. یا با $\bar{E}$ نمایش می‌دهند، ولی ما نمی‌خواهیم ازایـن نماد استفاده کنیم زیرا این نماد در نظریهٔ مجموعه‌ها برای منظور دیگری به‌کار می‌رود (برای نشان دادن بستاریك مجموعه).



شکل ۳۶۶. نمودار ون نمایش دهندهٔ فضای نمونهٔ S و پیشامدهای E و E^C





شکل ۳۶۷. نمودارهای ون نمایش دهندهٔ دو پیشامد A و B درفضای نمونهٔ S واجتماع $A \cup B$ (هاشورخورده) واشتراك $A \cap B$ (هاشورخورده)

مثال ۲

درآزمایش تصادفی ریختن یك تاس، پیشامدهای

A : عدد تاس کمتر از ۴ نباشد

B : عدد تاس بر ۳ بخشپذیر باشد

دارای اجتماع $A \cup B = \{۳, ۴, ۵, ۶\}$ واشتراك $A \cap B = \{۶\}$ هستند (شکل۳۶۸). ▲

هرگاه تمام اعضای پیشامد A عضو مجموعهٔ B باشند، آنگاه A **زیر پیشامد** B نامیده می‌شود، وچنین می‌نویسند:

$$A \subset B \qquad \text{یا} \qquad B \supset A$$

واضح است که، اگر $A \subset B$ ، آنگاه اگر B اتفاق بیفتد، A حتماً اتفاق می‌افتد. مثلاً، پیشامد $D = \{۴, ۶\}$ زیر پیشامد $E = \{۲, ۴, ۶\}$ ، این پیشامدکه عدد تاس زوج باشد، است.

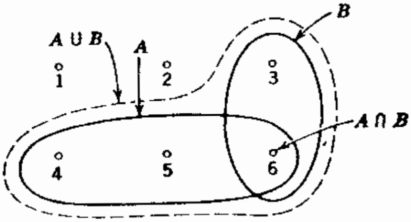
فرض می‌کنیم A_1 ، . . . ، A_m پیشامدهایی درفضای نمونهٔ S باشند. دراین‌صورت پیشامدی راکه شامل تمام عناصری که عضویك یا چندتا از این m پیشامدها هست **اجتماع** A_1 ، . . . ، A_m نامیده وبه صورت

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m, \qquad \text{یا اجمالا} \qquad \bigcup_{j=1}^{m} A_j$$

می‌نویسند. پیشامدی را که شامل تمام عناصری که متعلق به‌همهٔ m پیشامدها باشند **اشتراك** A_1 ، . . . ، A_m نامیده و به صورت

$$\bigcap_{j=1}^{m} A_j \quad \text{یا اجمالا} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$$

می‌نویسند.



شکل ۳۶۸. نمودار ون مثال ۲

به صورت کلیتر، فرض می‌کنیم A_1 ، A_2 ، . . . ، A_m ، . . . تعدادی نامتناهی پیشامد در S باشند، آنگاه **اجتماع**

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا اجمالا} \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

پیشامدی تعریف می‌شود که شامل تمام عناصری است که لااقل به یکی از پیشامدها تعلق داشته باشند، **واشتراك**

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا اجمالا} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

پیشامدی تعریف می‌شود که شامل تمام عناصری است که متعلق به همهٔ پیشامدها باشند.

هرگاه پیشامدهای A_1 ، A_2 ، . . . ، A_m ، . . . طوری باشند که وقوع هرکدام ازآنها مانع از وقوع هریك از پیشامدهای دیگر در همان زمان گردد، آنگاه به ازای هر j و $k \neq j$ داریم $A_j \cap A_k = \varnothing$ ، وچنین پیشامدهایی‌را پیشامدهای **دو به‌دوناسازگار** یا **پیشامدهای مجزا** می‌نامند.

برای نمونه، پیشامدهای A ، B ، C درمثال ۱ دو به دو ناسازگار هستند.

فرض می‌کنیم که یك تجربهٔ تصادفی n بارتکرارشود ونمونه‌ای مرکب از n مقدار به‌دست می‌آید. اگر A و B پیشامدهایی باشند که فراوانیهای نسبی آنها در n آزمایش به ترتیب $\tilde{f}(A)$ و $\tilde{f}(B)$ باشند، آنگاه پیشامد $A \cup B$ دارای فراوانی نسبی

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A \cap B) \qquad (1)$$

است. هر گاه A و B دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه $f(A\cap B)=0$ ، و

$$f(A\cup B)=f(A)+f(B)\,. \tag{۲}$$

درستی این فرمولها، باتوجه به نمودار ون شکل ۳۶۷ ، واضح است؛ اثبات صورت آنها به خواننده واگذار می‌شود (مسئلهٔ ۵) .

مسائل بخش ۴۰۲۰

۱. مطلوب است فضای نمونهٔ آزمایش تصادفی پرتاب دوسکه .

۲. در یك آزمایش ، دو تاس رابا هم می‌ریزیم. فضای نمونهٔ این آزمایش را یافته و اعضای آن را بنویسید. برروی این نمودار پیشامدهای زیررا مشخص کنید :

A : اعداد روی دو تاس مساوی باشند.

B : مجموع از ۷ تجاوز کند.

C : مجموع برابر ۵ باشد.

۳. فضای نمونهٔ آزمایش ثبت طول عمرسه قطعهٔ الکترونیکی را تعریف کنید.

۴. درآزمایش حفر سوراخی در یك صفحه واندازه گیری قطرآن ، مطلوب است مکمل E : قطرسوراخ حداقل ۲٫۹ اینچ و حداکثر ۳٫۱ اینچ است.

۵. (۱) را ثابت کنید.

۶. جعبه‌ای محتوی ۲۰ خودنویس است که ۱۰ تا ازآنها سالم، ۸ تا دارای عیب A ، ۵ تا دارای عیب B و ۳ تا دارای هر دو عیب هستند. یك خودنویس به تصادف برمی‌داریم. نمودار ون فضای نمونهٔ S راکه پیشامدهای E_A ، برداشتن خودنویسی که عیب A را دارد ، E_B ، برداشتن خودنویسی که عیب B را دارد، $E_A\cap E_B$ ، $E_A\cap E_B{}^C$ ، $E_A{}^C\cap E_B$ ، $E_A{}^C\cap E_B{}^C$ ، $E_A\cup E_B$ ، $E_A{}^C\cup E_A$ و $E_A\cup E_B{}^C$ را نشان دهد رسم کنید. هر پیشامد چند عضو (برآمد) دارد ؟

۷. نمودار ون هریك ازتساویهای زیررا رسم کرده و درستی آنها را تحقیق کنید

$$A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cup C)$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

۸. **(قوانین دمورگن)** بااستفاده ازنمودار ون ، درستی قوانین دمورگن را تحقیق کنید :

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

۹. با توجه به تعریف مکمل، نشان دهید

$$(A^C)^C = A, \ \ S^C = \varnothing, \ \ \varnothing^C = S, \ \ A \cup A^C = S, \ \ A \cap A^C = \varnothing,$$

۱۰. با استفاده از نمودار ون نشان دهید $A \subset B$، اگر و تنها اگر $A \cup B = B$. برای $A \subset B$ شرطی برحسب اشتراک $A \cap B$ بیابید.

۵.۲۰ احتمال

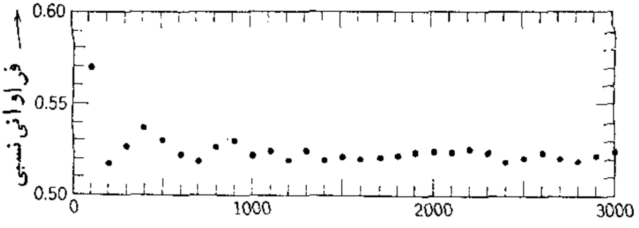
تجربه نشان می‌دهد که در اغلب آزمایشهای تصادفی نظم آماری یا پایداری فراوانیهای نسبی وجود دارد، یعنی، در دنباله‌های طولانی از چنین آزمایشهایی فراوانیهای نسبی متناظر با یك پیشامد اغلب باهم برابرند. مثالهای نوعی را در جدول ۶.۲۰ و شکل ۳۶۹ آورده‌ایم. در شکل ۳۶۹ دیده می‌شود که با افزایش تعداد تولدها نوسانات درصد پسران کمتر و کمتر می‌شود. درصد کالاهای معیوب که تحت شرایط نسبتاً ثابتی تولید شده باشند دارای رفتار مشابهی است، به‌آسانی می‌توان مثالهای دیگری نیز پیدا کرد.

چون اغلب آزمایشهای تصادفی نظم آماری دارند، می‌توان ادعا کرد که در چنین آزمایشی به ازای هر پیشامد E عددی مانند $P(E)$ موجود است به طوری که فراوانی نسبی E در تعداد زیادی اجرای آزمایش تقریباً برابر $P(E)$ است.

جدول ۶.۲۰
پرتاب سکه

آزمایش به‌وسیله	تعداد دفعات پرتاب	تعداد شیرها	فراوانی نسبی شیرها
بوفون	۴۰۴۰	۲۰۴۸	۰٫۵۰۶۹
کی. پیرشن	۱۲۰۰۰	۶۰۱۹	۰٫۵۰۱۶
کی. پیرشن	۲۴۰۰۰	۱۲۰۱۲	۰٫۵۰۰۵

بدین جهت وجود عدد $P(E)$ را که **احتمال** پیشامد E در آزمایش تصادفی مورد نظر نامیده می‌شود می‌پذیریم. توجه کنید که این عدد یك خاصیت مطلق E نیست بلکه به فضای نمونهٔ S، یعنی به آزمایش تصادفی معین بستگی دارد.



شکل ۳۶۹. فراوانی نسبی پیشامد «تولد پسر»
(داده‌ها از گرتز (Graz) اتریش، ۱۹۶۲)

بنابراین عبارت «E دارای احتمال $P(E)$ است» بدان معنی است که هرگاه آزمایش به‌دفعات زیاد تکرار شود، از نقطه نظر عملی می‌توان گفت که فراوانی نسبی $f(E)$ تقریباً برابر $P(E)$ است. (عبارت «تقریباً برابر» باید دقیقاً توضیح داده شود. این توضیح در بخش ۱۰.۲۰ آمده است.)

احتمالی که به‌این ترتیب معرفی می‌شود المثنای فراوانی نسبی است که از آزمایش به‌دست آمده، در نتیجه انتظار اینکه دارای خواص اساسی معینی از فراوانی نسبی باشد طبیعی است. این خواص را می‌توان از قضایای ۱ و ۲، بخش ۲.۲۰، و فرمول (۲)، بخش ۴.۲۰، نتیجه گرفت، و تحت عنوان اصول احتمال ریاضی به‌شرح زیر فرمولبندی کرد.

اصول احتمال ریاضی

۱. اگر E پیشامد دلخواهی درفضای نمونهٔ S باشد، آنگاه

$$0 \leqslant P(E) \leqslant 1 \tag{۱}$$

۲. برای فضای نمونهٔ تام S داریم

$$P(S)=1 \tag{۲}$$

۳. هرگاه A و B پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند (ر.ك. بخش ۴.۲۰)، آنگاه

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B). \tag{۳}$$

اگر فضای نمونه نامتناهی باشد، به‌جای اصل ۳ داریم

***۳.** هرگاه E_1، E_2، ... پیشامدهای دو به‌دو ناسازگار باشند، آنگاه

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots. \tag{۳*}$$

از اصل موضوع ۳ با استقرا نتیجه می‌شود

قضیهٔ ۱ (قانون جمع درمورد پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار)

هرگاه E_1، . . .، E_m پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند، آنگاه

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_m). \qquad (۴)$$

خواننده می‌تواند مشابه (۱)، بخش ۴.۲۰، را ثابت کند.

قضیهٔ ۲ (قانون جمع درمورد پیشامدهای دلخواه)

هرگاه A و B پیشامدهای دلخواهی درفضای نمونهٔ S باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (۵)$$

به‌علاوه، پیشامد E ومکمل آن E^C (بخش ۴.۲۰) دو به‌دو ناساز گـار هستند، و $E \cup E^C = S$. بنابراین بااستفاده از اصول موضوعهٔ ۳ و ۲ داریم

$$P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C) = ۱$$

واز اینجا نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۳ (قاعدهٔ مکمل‌گیری)

احتمال پیش آمد E و مکمل‌آن E^C در فضای نمونهٔ S با فرمول زیر به‌هم مربوط می‌شوند

$$P(E) = ۱ - P(E^C) \qquad (۶)$$

این‌فرمول وقتی مورد استفاده قرارمی گیرد کـه محاسبهٔ $P(E^C)$ ساده‌تر از محاسبهٔ $P(E)$ باشد. کاربردی ازفرمول (۶) درمثال ۲ آمده است.

چگونه می‌توان احتمالات مختلف را به پیشامدهـای گوناگون در فضای نمونهٔ S نسبت داد؟

هرگاه S متناهی، مرکب از k عنصر، باشد و طبیعت آزمایش نشان دهد که این k برآمد از نظر اتفاق افتادن مانند همند، آنگاه می‌توان به‌برآمدها احتمالهای مساوی‌نسبت داد، و بنابه اصل ۲ این احتمال بایـد برابر $۱/k$ باشد. دراین حالت محاسبهٔ احتمالهای پیشامدها به‌شمارش عناصر تشکیل دهندهٔ آنها برمی گردد.

مثال ۱. تاس سالم

یك تاس سالم، یعنی، تاس همگنی راکه‌کاملا مکعبی شکل است، یك بار می‌ریزیم . دراین آزمایش $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$. بنابراین داریم $P(۱) = ۱/۶$ ، $P(۲) = ۱/۶$ ، . . . ، $P(۶) = ۱/۶$. از اینجا و با توجه به قضیه ۱ می‌بینیم که مثلا پیشامد

A : اینکه زوج بیاید

دارای احتمال $P(A)=P(۲)+P(۴)+P(۶)=۱/۲$ است، پیشامد

B : اینکه بیشتر از ۴ بیاید

دارای احتمال $P(B)=P(۵)+P(۶)=۱/۳$ است، و الی آخر. فرمولهای مربوط به موارد پیچیده‌تر و مثالهای بیشتر در بخش بعدی ارائه خواهد شد.

مثال ۲. پرتاب سکه

پنج سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال پیشامد A : آمدن لااقل یك شیر را بیابید. چون در پرتاب هر سکه ممکن است شیر یا خط بیاید، فضای نمونه دارای $۳۲=۲^۵$ عنصر خواهد بود. با فرض آنکه سکه‌ها سالم هستند، به هر برآمد می‌توان احتمال ۱/۳۲ را نسبت داد. دراین‌صورت پیشامد A^C (هیچ شیری نیاید) تنها ازیك برآمد تشکیل شده‌است. درنتیجه $P(A^C)=۱/۳۲$ و جواب عبارت است از $P(A)=۱-P(A^C)=۳۱/۳۲$. ▲

هرگاه طبیعت آزمایش نشان ندهد که تعدادی متناهی برآمد از نظر اتفاق افتادن مثل هم هستند، یا اگر فضای نمونه متناهی نباشد، باید احتمالات را با استفاده از فراوانیهای نسبی مشاهده شده در دنباله‌های طولانی از آزمایشها طوری به دست آورد که در اصول احتمال صدق کنند.

بدین طریق تنها مقادیر تقریبی به دست می‌آید، ولی این موضوع مهم نیست. در اینجا وضع شبیه فیزیك کلاسیك است، که در آن فرض می‌کنیم هر جسمی دارای جرم معینی است ولی نمی‌توانیم این جرم را با دقت تعیین کنیم. این موضوع مانعی در راه توسعه و تکمیل نظریه ایجاد نمی‌کند.

اگر شك داشته باشیم که احتمالات را به روشی صحیح معین کرده‌ایم یا نه، می‌توانیم یك آزمون آماری را که بعداً مورد بررسی قرار می‌گیرد (در بخش ۱۸.۲۰) به‌کار بریم.

اغلب اوقات لازم است احتمال پیشامد B را با فرض آنکه پیشامد A رخ داده است پیدا کنیم. این احتمال را **احتمال شرطی** B به فرض A نامیده با $P(B|A)$ نمایش می‌دهند. دراین حالت A مانند یك فضای نمونهٔ جدید (کاهش یافته) عمل می‌کند، و احتمال کسری از $P(A)$ است که با $A\cap B$ متناظر است. بنابراین

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad [P(A)\neq ۰]. \tag{۷}$$

همین‌طور، احتمال شرطی A به فرض B عبارت است از

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad [P(B)\neq ۰]. \tag{۸}$$

اگر از (۷) و (۸)، $P(A\cap B)$ را تعیین کنیم خواهیم داشت

قضیهٔ ۴ (قاعدهٔ ضرب)

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونهٔ S باشند و $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$، آنگاه

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B). \qquad (۹)$$

اگر پیشامدهای A و B طوری باشند که

$$P(A\cap B)=P(A)P(B), \qquad (۱۰)$$

آنگاه A و B را **پیشامدهای مستقل** نامند. با فرض $P(A)\neq 0$، $P(B)\neq 0$، با توجه به (۷) الی (۹) مشاهده می‌کنیم که در این حالت

$$P(A|B)=P(A)\text{ ،}\qquad P(B|A)=P(B)$$

یعنی احتمال A به اتفاق افتادن یا اتفاق نیفتادن B بستگی ندارد، و بالعکس. این توضیح اصطلاح فوق را توجیه می‌کند.

به همین نحو، m پیشامد A_1 ، . . . ، A_m **مستقل** نامیده می‌شوند هرگاه به ازای هر k پیشامد A_{j_1} ، A_{j_2} ، . . . ، A_{j_k} (که در آن $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant m$ و $k=2, 3, \ldots, m$) داشته باشیم

$$P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_k})=P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k}). \qquad (۱۱)$$

قبل از آوردن مثالی تشریحی، یادآوری می‌کنیم که برای انتخاب شیء از یک مجموعهٔ مفروض اشیاء و به دست آوردن یک نمونه از آن دو راه وجود دارد، این کار **نمونه‌گیری ازجامعه** نامیده می‌شود و به شرح زیر است:

۱. **نمونه‌گیری با جایگذاری:** در این نمونه شیئی که به تصادف استخراج شده است به مجموعهٔ داده شده برگردانده شده و با بقیه اشیاء به‌طور کامل مخلوط می‌شود. سپس شیء بعدی به‌تصادف استخراج می‌شود.

۲. **نمونه‌گیری بدون جایگذاری:** در این نمونه گیری شیء استخراج شده به مجموعهٔ اشیاء برگردانده نمی‌شود.

مثال ۳. نمونه‌گیری با و بدون جایگذاری

جعبه‌ای محتوی ۱۰ پیچ است که سه تای آنها معیوبند. دو پیچ به تصادف استخراج می‌شود. احتمال این را که هیچ یک از دو پیچ معیوب نباشد بیابید. پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

A : اولین پیچ استخراج شده نامعیوب باشد.

B : دومین پیچ استخراج شده نامعیوب باشد.

بدیهی است که $P(A)=\frac{۷}{۱۰}$ ، زیرا ۷تا از ۱۰ پیچ سالم هستند و ما به تصادف نمونه می‌گیریم ، یعنی احتمال استخراج همهٔ پیچها یکسان و برای هرپیچ $\frac{۱}{۱۰}$ است . اگر با جایگذاری نمونه‌گیری کنیم ، وضعیت قبل ازاستخراج دومین شیء مانند آغاز کار است و $P(B)=\frac{۷}{۱۰}$. پیشامدها مستقل هستند، وجواب عبارت است از

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰٫۷\times ۰٫۷=۰٫۴۹=\%۴۹$$

اگر بدون جایگذاری نمونه‌گیری کنیم ، آنگاه مانند قبل $P(A)=\frac{۷}{۱۰}$. هرگاه A رخ داده باشد ، آنگاه ۹ پیچ درجعبه باقی می‌ماند ، ۳تای آنها معیوب هستند. بنابراین $P(B|A)=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$ ، و ازقضیهٔ (۴) نتیجه می‌شود

$$P(A\cap B)=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۲}{۳}\approx\%۴۷ .$$

مسائل بخش ۵۰۲۰

۱. ۵ سکهٔ سالم را پرتاب می‌کنیم ، احتمال اینکه لااقل یك شیر بیاید چقدراست ؟

۲. ۳ تاس سالم را می‌ریزیم ، احتمال اینکه از ۳ عدد حاصل حداقل ۲ عدد مختلف باشند بیابید.

۳. سه پیچ از ۱۰۰ پیچ که ۱۰تای آنها معیوبند به تصادف استخراج می‌شود. مطلوب است احتمال این پیشامد که هرسه پیچ سالم باشند، با فرض آنکه سه پیچ را ، (الف) با جایگذاری استخراج کنیم، (ب) بدون جایگذاری استخراج کنیم.

۴. سه گلدان درنظرمی‌گیریم که هریك محتوی ۵ مهره که روی آنها از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری‌شده هستند. مطلوب است احتمال اینکه مجموع شماره‌های مهره‌های استخراج‌شده بزرگتراز ۳ باشد.

۵. از ۱۰۰ میلهٔ آهنی ۲۵تا بزرگتراز اندازهٔ موردنظرو ۲۵تا کوچکتراز اندازهٔ مورد نظرهستند، ۵۰تای بقیه اندازهٔ مورد نظر را دارند. هرگاه دو میله به تصادف بدون جایگذاری استخراج شوند، مطلوب است احتمال اینکه (الف) دومیله دارای اندازهٔ موردنظر باشند، (ب) یکی از دومیله دارای اندازهٔ مورد نظر باشد ، (ج) هیچیك از میله‌ها دارای اندازهٔ موردنظرنباشد. (د) هردومیله کوچکتراز اندازهٔ موردنظر باشند.

۶. طی یك فرایند طولانی تولید شمع اتومبیل ، نسبت شمعهای معیوب در ۲٪ ثابت‌باقی مانده است . درهرنیم ساعت تنها دوتا ازشمعهای تولید شده مورد بازرسی قرار می‌گیرد. احتمال آنکه (الف) هیچیك‌ازشمعها معیوب نباشد، (ب) یکی ازآنهامعیوب باشد، (ج) هردومعیوب باشند چقدر است ؟ مجموع احتمالات (الف) ، (ب) ، (ج)

چقدر است ؟

۷. موتوری یك ژنراتورالکتریکی را می‌گرداند. احتمال اینکه موتورطی ۳۰ روزنیاز به تعمیر پیداکند ۵٪ واحتمال اینکه ژنراتور طی همین مدت نیاز به تعمیر پیداکند ۶٪ است. احتمال اینکه طی یك دورهٔ مفروض ، کل دستگاه نیاز به تعمیرداشته باشد چقدر است ؟

۸. یك دستگاه کنترل فشاراتوماتیك شامل ۶ لولهٔ الکترونی است. تا وقتی همهٔ لوله‌ها کار نکنند دستگاه کار نمی‌کند. هرگاه احتمال ازکار افتادن هرلوله بعداز یك فاصلهٔ زمانی ۵ر۰ باشد. احتمال ازکارافتادن دستگاه دراین فاصلهٔ زمانی چیست ؟

۹. جعبه‌ای محتوی ۱۰۰ واشراست‌که ازمیان آنها ۱۰ واشرعیب A ، ۵ واشر عیب B و ۲ واشرهردوعیب A و B را دارند. هرگاه واشری‌که از جعبه استخراج می‌شود دارای عیب A باشد. مطلوب است احتمال‌آنکه این واشردارای عیب B نیز باشد.

۱۰. مطلوب است احتمال آنکه در ریختن دو تاس سالم مجموع شماره‌های حاصل بیشتر از ۹ باشد، مشروط براینکه یکی ازتاسها ۵ آمده باشد.

۱۱. با فرض آنکه $P(A^C)=$ ۲ر۰ ، $P(B)=$ ۵ر۰ و $P(A\cap B^C)=$ ۴ر۰ ، مطلوب است $P(B|A\cup B^C)$. (راهنمایی . ازنمودار ون استفاده کنید.)

۱۲. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید.

۱۳. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۱۴. با تعمیم قضیهٔ ۴ ، نشان دهیدکه

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B).$$

۱۵. هرگاه B زیرمجموعهٔ A باشد، نشان دهیدکه $P(B)\leqslant P(A)$.

۶.۲۰ جایگشت و ترکیب

دربخش قبل آموختیم که برای فضای نمونهٔ متناهی S که از k برآمد و هم شانس، تشکیل شده است ،احتمال هررویداد $1/k$ است ، و احتمال پیشامد A با شمارش تعدادبرآمدهای تشکیل دهندهٔ A بـه دست می‌آید . بدیهی است کـه اگر ایـن تعداد m باشد ، آنگاه $P(A)=m/k$. فرمولهایی‌که ارائه خواهندشد اغلب برای شمارش رویدادها مفید واقع می‌شوند.

فرض می‌کنیم n چیز (عنصر یا شیء) داده شده باشند. می‌توانیم این چیزها را به ترتیبهای دلخواهی دریك ردیف قراردهیم. هریك ازاین ترتیبها را یك **جایگشت** چیزهای

داده شده می‌نامند.

قضیهٔ ۱ (جایگشت)

تعداد جایگشتهای n شیء متمایز، وقتی که همهٔ آنها باهم در نظر گرفته شود برابراست با

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \qquad (1)$$

(بخوانید «n فاکتوریل»)

در واقع، n امکان برای پر کردن مکان اول ردیف؛ و سپس $n-1$ امکان برای پر کردن مکان دوم، و قس‌علیهذا موجود است. به همین ترتیب به دست می‌آوریم

قضیهٔ ۲ (جایگشت)

هرگاه n شیء مفروض را بتوان به C دسته طوری تقسیم کرد که اشیاء متعلق بـه هر دسته مثل هم باشند ولی اشیاء متعلق به دسته‌های متفاوت مختلف باشند، آنگاه تعداد جایگشتها وقتی که همهٔ اشیاء با هم در نظر گرفته شوند، عبارت است از

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_c!} \qquad (n_1+n_2+\cdots+n_c=n) \qquad (2)$$

که در آن n_j تعداد اشیاء دستهٔ jام است.

جایگشت n شیء وقتی‌که k به k درنظرگرفته شوند جایگشتی است کـه تنها شامل k شیء از n شیء مفروض می‌شود. اگردوتا ازاین جایگشتها مرکب از k عنصر یکسان، با ترتیب متفاوت، باشند بنابه تعریف متمایز هستند. مثلا ۶ جایگشت مختلف از سه حرف a، b، c وقتی دو به دو در نظر گرفته شود به صورت ab، ac، bc، ba، ca، cb وجود دارد.

جایگشت n شیء وقتی‌که k به k و با تکرار درنظرگرفته شوند به این حاصل می‌شود که هرشیء مفروض را درمکان اول قرار می‌دهیم، سپس هرشیء مفروض از جمله شیئی راکه قبلا مورد استفاده قرارگرفته‌است درمکان دوم قرار می‌دهیم واین‌کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا k مکان پرشود. مثلا $9 = 3^2$ جایگشت متمایزازسه حرف a، b، c وقتی که دو به دو و با تکرار در نظر گرفته شوند موجود است کـه از ۶ جایگشت قبلی و ۳ جایگشت aa، bb، cc تشکیل می‌شود. خواننده می‌تواند قضیهٔ زیررا ثابت کند (ر. ك. مسئلهٔ ۹).

قضیهٔ ۳ (جایگشت)

تعداد جایگشتهای متمایز بدون تکرار n شیء متمایز وقتی k بـه k در نظر گرفته شوند عبارت است از

$$n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)=\frac{n!}{(n-k)!} \qquad \text{(۳الف)}$$

و با تکرار عبارت است از

$$n^k. \qquad \text{(۳ ب)}$$

در جایگشت نه تنها خود اشیاء مهم هستند، بلکه ترتیب آنها هم مهم است. یك **ترکیب** ازاشیاء مفروض انتخاب یك یاچند شیء بدون در نظرگرفتن ترتیب ازمیان آنها است. دونوع ترکیب به شرح زیرموجودند.

تعداد **ترکیبهای** n **شیء مختلف** ، k **به** k **و بدون تکرار** عبارت است از تعداد مجموعه‌هایی که می‌توان از n شیء ساخت، به‌طوری که هرمجموعه شامل k شیء مختلف باشد وهیچ دومجموعه‌ای دارای k عضو یکسان نباشند.

تعداد **ترکیبهای** n **شیء متمایز،** k **به** k **و با تکرار** ، عبارت است از تعداد مجموعه‌هایی که می‌توان با انتخاب k شیء ازمیان n شیء مفروض ساخت، به طوری که هرشیء به تعداد دلخواه تکرار شود.

مثلا ، درانتخاب ۲ حرف از ۳ حرف a ، b ، c ، ۳ ترکیب بدون تکرار ، یعنی، ab ، ac ، bc ، و ۶ ترکیب با تکرار یعنی ، ab ، ac ، bc ، aa ، bb ، cc موجود است.

قضیهٔ ۴ (ترکیب)

تعداد ترکیبهای مختلف n شیء متمایز، k به k و بدون تکرار، عبارت است از

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)}{۱\times۲\times\cdots\times k} \qquad \text{(۴الف)}$$

و تعداد ترکیبهای با تکرار برابر است با

$$\binom{n+k-۱}{k} \qquad \text{(۴ ب)}$$

حکم مربوط به (۴ الف) ازقسمت اول قضیهٔ ۳ نتیجه‌می‌شود ، با توجه به‌آنکه $k!$ جایگشت برای k شیئی که ازمیان n شیء مفروض انتخاب می‌شوند وجود دارد تفاوتشان تنها درترتیب قرارگرفتنشان است (ر. ك. قضیهٔ ۱) . ولی تنها یك ترکیب ازاین k شیء ازنوعی است که درحکم قضیهٔ ۴ آمده است. حکم آخرقضیهٔ ۴ را می‌توان با استقرا ثابت کرد (ر. ك. مسئلهٔ ۱۰) .

مثال ۱. درمورد قضایای ۱ و ۲

هرگاه ۱۰ پیچ مختلف که باید با ترتیب معینی برای سوارکردن یك محصول صنعتی به‌کار

روند درجعبه‌ای باشند و بخواهیم آنها را به تصادف ازجعبه استخراج کنیم ، P ، احتمال اینکه پیچها ترتیب موردنظررا داشته باشند بسیارکوچك خواهد بود ، در واقع (ر. ك. قضیهٔ ۱) ،

$$P=\frac{۱}{۱۰!}=\frac{۱}{۳۶۲۸۸۰۰}\approx \%۰/۰۰۰۰۳$$

هرگاه جعبه محتوی ۶ پیچ راستگرد مشابه و ۴ پیچ چپگرد مشابه باشد ونخست به ۶ پیچ راستگرد وسپس به ۴ پیچ چپگرد نیاز داشته باشیم ، P ، احتمال‌اینکه استخراج تصادفی پیچها نتیجهٔ دلخواه را بدهد عبارت است از (ر. ك. قضیهٔ ۲)

$$P=\frac{۶!\,۴!}{۱۰!}=\frac{۱}{۲۱۰}\approx \%۰/۵$$

مثال ۲. درمورد قضیهٔ ۳

در تلگرافهایی که با کد نوشته می‌شوند، حروف را در گروههای ۵تایی قرارداده هر گروه را یك کلمه می گویند. بنا به (۳ ب) نتیجه می گیریم که

$$۲۶^{۵}=۱۱۸۸۱۳۳۶$$

تا ازاین کلمات وجود دارد. بنابه (۳ الف) نتیجه می‌شود که

$$\frac{۲۶!}{(۲۶-۵)!}=۲۶\times۲۵\times۲۴\times۲۳\times۲۲=۷۸۹۳۶۰۰$$

تا ازاین کلمات وجود دارند که درآنها هرحرف حداکثریك بارآمده است.

مثال ۳. درمورد قضیهٔ ۴

تعداد نمونه‌های ۵ عضوی که می‌توان ازیك دستهٔ ۵۰۰تایی لامپ روشنایی انتخاب کرد عبارت است از [ر. ك. (۴ الف)]

$$\binom{۵۰۰}{۵}=\frac{۵۰۰!}{۵!\,۴۹۵!}=\frac{۵۰۰\times۴۹۹\times۴۹۸\times۴۹۷\times۴۹۶}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}=۲۵۵۲۴۴۶۸۷۶۰۰ \blacktriangle$$

دراینجا مطالبی دربارهٔ **تابع فاکتوریل** می‌آوریم. با تعریف

$$۰!=۱ \qquad (۵)$$

سایرمقادیررا می‌توان به کمك رابطهٔ

$$(n+۱)!=(n+۱)\,n! \qquad (۶)$$

محاسبه کرد. به‌ازای مقادیر بزرگ n ، تابع فاکتوریل خیلی بزرگ است (ر. ك. جدول A۴ ، ضمیمهٔ ۴). يك تقریب مناسب برای n بزرگ **فرمول استرلینگ**[1]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (e = 2.718\ldots), \tag{7}$$

است ، که درآن ، $\sim$ بدان معنی است کـه نسبت دوطرف وقتی n بـه سمت بینهایت میل کند به سمت ۱ میل می‌کند.

ضرایب دوجمله‌ای چنین تعریف می‌شوند :

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} \qquad (k \geqslant 0 \text{ عدد صحیح}) \tag{8}$$

صورت دارای k عامل است ، به‌علاوه ، تعریف می‌کنیم

$$\binom{a}{0} = 1 \text{ ، } \quad \text{خصوصاً} \quad \binom{0}{0} = 1 \tag{9}$$

به ازای مقدارصحیح $a = n$ باتوجه به (۸) به‌دست می‌آوریم

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (n \geqslant 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n). \tag{10}$$

ضرایب دوجمله‌ای را می‌توان به‌طور بازگشتی مجاسبه کرد ، زیرا

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \qquad (k \geqslant 0 \text{ ، صحیح}). \tag{11}$$

از (۸) همین نتیجه می‌شود

$$\binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \quad (m > 0 \text{ ، } k \geqslant 0 \text{ ، صحیح}). \tag{12}$$

روابط دیگری هم وجود دارند که ما دوتا ازآنها را دراینجا می‌آوریم

$$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad (k \geqslant 0 \text{ ، } n \geqslant 1 \text{ ، هردوصحیح}) \tag{13}$$

---

۱. جیمزاسترلینگ (James Stirling) ، ۱۶۹۲–۱۷۷۰ ، ریاضیدان انگلیسی.

و

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}=\binom{p+q}{r}. \qquad (۱۴)$$

مسائل بخش ۶.۲۰

۱. همهٔ جایگشتهای چهار رقم ۱، ۲، ۳، ۴ را وقتی که همهٔ آنها بـا هم در نظر گرفته شوند بنویسید.

۲. همهٔ جایگشتهای پنج حرف a، e، i، o، u را وقتی که سه به سه در نظر گرفته شوند بنویسید.

۳. به چند طریق می‌توان از میان ۱۰ نفر یك کمیتهٔ سه نفری انتخاب کرد.

۴. چند پلاك مختلف که روی هر یك ۵ علامت، ۲ حرف و به دنبال آن ۳ عدد حك شده باشد می‌توان ساخت؟

۵. مطلوب است تعداد نمونه‌های ۳ عضوی کـه از یك مجموعهٔ ۱۰۰ عضوی از اشیاء می‌توان انتخاب کرد.

۶. کیسه‌ای محتوی ۲ گلوله سیاه، ۳ گلوله سفید، ۴ گلوله قـرمز است. یـك گلوله به تصادف استخراج کرده و کنار می‌گذاریم. سپس گلولهٔ دیگری استخراج می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم. مطلوب است احتمال آنکه نخست ۲ گلولهٔ سیاه، سپس ۳ گلولهٔ سفید، و در پایان گلوله‌های قرمز استخراج شوند.

۷. هرگاه ۶ شیشه جوهر مختلف داشته باشیم، به چند طریق می‌توانیم دو رنگ و به چند طریق می‌توانیم چهار رنگ را برای نقاشی کردن انتخاب کنیم.

۸. درمجموعهٔ ۱۰ تایی کالایی، ۲ تا معیوب وجـود دارد. (الف) مطلوب است تعداد نمونه‌های گوناگون ۴ عضوی. مطلوب است تعداد نمونه‌های ۴ عضوی شامل (ب) هیچ عضو معیوب، (ج) یك عضو معیوب، (د) ۲ عضو معیوب.

۹. قضیهٔ ۳ را ثابت کنید.

۱۰. آخرین حکم قضیهٔ ۴ را ثابت کنید. راهنمایی. از (۱۳) استفاده کنید.

۱۱. با استفاده از (۷)، مقادیر تقریبی !۴ و !۸ را محاسبه کرده و خطاهای مطلق و نسبی را تعیین کنید.

۱۲. برای تعداد معینی از اجناس مختلف که هر بار ۴ بـه ۴ و بدون تکرار در نظر گرفته می‌شوند، تعداد ترکیبات با تعداد جایگشتها چه رابطه‌ای دارد؟

۱۳. (۱۱) را از (۸) نتیجه بگیرید.

۱۴. (قضیهٔ دو جمله‌ای) بنا به قضیهٔ دوجمله‌ای

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k},$$

بنابراین $a^k b^{n-k}$ دارای ضریب $\binom{n}{k}$ است. آیا می‌توانید این قضیه‌را از قضیهٔ۴ نتیجه بگیرید یا آنکه این شباهت صرفاً زاییدهٔ یك تصادف است ؟

۱۵. با به‌کار بردن قضیهٔ دوجمله‌ای (مسئلهٔ ۱۴) درمورد

$$(1+b)^p(1+b)^q=(1+b)^{p+q}$$

تساوی (۱۴) را ثابت کنید.

۷.۲۰ متغیرهای تصادفی. توزیعهای گسسته و پیوسته

اگردوتاس را پرتاب‌کنیم ، مجموع شماره‌های حاصل ، X ، یکی از اعداد صحیح بین ۲ و ۱۲ خواهدبود ،ولی‌نمی‌توان پیش‌بینی کرد که‌مقدار X درپرتاب بعدی‌چه خواهدشد، و می‌توان‌گفت که مقدار X به « شانس » بستگی دارد. به همین نحو، هرگاه بخواهیم ۵ پیچ را ازتعداد زیادی پیچ استخراج‌کنیم و قطرهای آنها را اندازه بگیریم، نمی‌توانیم پیش‌بینی‌کنیم که چه تعدادی از آنها معیوب خواهند بود ، معیوب بـه این معنی کـه فاقد شرایط لازم بـاشند ؛ درنتیجه X ، تعداد پیچهای معیوب ، مجدداً به « شانس » بستگی خواهند داشت. طول عمر X یك لامپ روشنایی که به‌تصادف ازمیان تعداد زیادی لامپ انتخاب می‌شود نیز به « شانس » بستگی دارد وهمین طوراست X ، محتوی یك بطری لیموناد که به تصادف از بین تعداد زیادی بطری که توسط ماشین پرشده‌اند انتخاب شده باشد .

به عبارت ساده ، **متغیر تصادفی** X **(متغیراستوکاستیك**یا **واریت)** تابعی است که مقادیرش اعداد حقیقی هستند و بـه « شانس » وابسته‌اند ؛ به‌عبارت دقیقتر، متغیرتصادفی تابعی مانند X است که خواص زیر را دارد :

۱. X بر S ، فضای نمونهٔ آزمایش، تعریف می‌شود، و مقادیرش اعداد حقیقی هستند.

۲. فـرض می‌کنیم a عددی حقیقی و I فـاصلهٔ دلخـواه باشد. آنگاه مجموعـهٔ همهٔ برآمدهای واقع در S که بـه ازای آنها $X=a$ ، دارای احتمالی خوش تعریف است ، و همین حکم در مورد مجموعهٔ همهٔ برآمدهای واقع در S که بـه ازای آنها مقادیر X در I هستند نیز برقرار است. این احتمالات ازاصول موضوعهٔ بخش ۵.۲۰

تبعیت خواهند کرد.

اگر چه این تعریف کاملا کلی است وتوابع زیادی را شامل می‌شود، خواهیم دید که درعمل تعداد انواع مهم متغیرهای تصادفی و « **توزیعهای احتمال** » مربوط بـه آنها نسبتاً کم است.

هرگاه یك آزمایش تصادفی را انجام دهیم و پیشامد مربوط به‌عدد a روی دهد، آنگاه گوییم که دراین اجرای آزمایش، X، متغیرتصادفی متناظر با آزمایش مقدار a را اختیار می کند. همچنین گوییم که مقدار $X=a$ را **مشاهده کرده‌ایم**. به جای عبارت « پیشامد متناظر با عدد a »، اجمالا می گوییم، « پیشامد $X=a$ ». احتمال مربوطه را با $P(X=a)$ نشان می‌دهیم. به همین نحو، احتمال پیشامد

X مقداری در فاصلهٔ $a<X<b$ اختیار می‌کند

را با $P(a<X<b)$ نشان می‌دهیم. احتمال پیشامد

$X\leqslant c$ (X مقداری کوچکتر از c یا مساوی با c را اختیار می‌کند)

رابا $P(X\leqslant c)$، واحتمال پیشامد

$X>c$ (X مقداری بزرگتر از c را اختیار می‌کند)

رابا $P(X>c)$ نشان می‌دهیم.

دو پیشامد اخیردو به دو ناسازگارند. ازاصل موضوع ۳، بخش ۵.۲۰ بـه دست می‌آوریم

$$P(X\leqslant c)+P(X>c)=P(-\infty<x<\infty).$$

باتوجه به اصل موضوع ۲، مشاهده می‌کنیم کـه طرف راست مساوی ۱ است، زیـرا $-\infty<X<\infty$ بـا کل فضای نمونه متناظراست. از اینجا فرمول مهم زیرنتیجه می‌شود:

$$P(X>c)=1-P(X\leqslant c) \qquad (c \text{ دلخواه}) \qquad (1)$$

مثلا، هرگاه X عددی باشد که هنگام ریختن یك‌تاس می‌آید $P(X=1)=1/6$، $P(X=2)=1/6$ و غیـره. $P(1<X<2)=0$، $P(1\leqslant X\leqslant 2)=1/3$، $P(0\leqslant X\leqslant 3.2)=1/2$، $P(X>4)=1/3$، $P(X\leqslant 0.5)=0$، وغیره.

در بیشتر موارد عملی متغیرهای تصادفی، گسسته هستند یا پیوسته. اکنون این دو مفهوم مهم را یکی بعد از دیگری مورد بررسی قرار می‌دهیم.

متغیرتصادفی X وتوزیع مربوط بدآن را **گسسته** می‌نامند، هرگاه X دارای خواص زیر باشد.

۱. تعداد مقادیری که بـه ازای آنها X دارای احتمالی مخالف صفراست متناهی یـا حداکثر نامتناهی شمارش‌پذیر باشد.
۲. اگـر فـاصله‌ای مـانند $a < X \leqslant b$ شـامل چنین مقـداری نبـاشد، آنگاه $P(a < X \leqslant b) = ۰$.

فرض می کنیم

$$x_۱, \quad x_۲, \quad x_۳, \quad \cdots$$

مقادیری باشند که به ازای آنها X دارای احتمال مثبت باشد، و فرض می کنیم

$$p_۱, \quad p_۲, \quad p_۳, \quad \cdots$$

احتمالات متناظر با آنها باشند. درآن صورت $P(X = x_۱) = p_۱$ و غیره. اکنون تابع

$$f(x) = \begin{cases} p_j & x = x_j \qquad (j = ۱, ۲, \cdots) \\ ۰ & \text{در غیراین صورت} \end{cases} \tag{۲}$$

را تعریف می کنیم. $f(x)$ **تابع احتمال** X نامیده می‌شود.

چون $P(S) = ۱$ (ر. ك. اصل موضوع ۲، بخش ۵.۲۰)، باید داشته باشیم

$$\sum_{j=۱}^{\infty} f(x_j) = ۱. \tag{۳}$$

هرگاه تـابع احتمال يك متغیر تصادفی گسستهٔ X را بشناسیم، آنگـاه به سادگی می‌توانیم احتمال $P(a < X \leqslant b)$ را کـه متناظر بـا فاصلهٔ دلخواه $a < X \leqslant b$ است محاسبه کنیم. در واقع

$$P(a < X \leqslant b) = \sum_{a < x_j \leqslant b} f(x_j) = \sum_{a < x_j \leqslant b} p_j. \tag{۴}$$

این مقدار مجموع تمام احتمالات $f(x_j) = p_j$ است که به ازای آنها x_j درفاصلهٔ مورد نظرقرار دارد. درمورد فاصلهٔ بستهٔ، باز، یـا نامتناهی وضع کاملا بـه همین منوال است. می گوییم تابع احتمال $f(x)$ **توزیع احتمال** یا اجمالا، **توزیع** متغیرتصادفی X را بـه طریقی یکتا مشخص می کند.

هرگاه X متغیری تصادفی، که الزاماً گسسته هم نیست، باشد، آنگاه به ازای هر عدد حقیقی x احتمال $P(X \leqslant x)$ که با

$$X \leqslant x \; (X \text{ مقادیر کوچکتر از } x \text{ یا مساوی با } x \text{ را اختیار می‌کند})$$

متناظراست وجود دارد. واضح است که $P(X \leqslant x)$ به انتخاب x وابسته است؛ ایـن

احتمال تابعی از x است که **تابع توزیع**[1] X نامیده می‌شود و آن را با $F(x)$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$F(x) = P(X \leqslant x). \qquad (۵)$$

چون به‌ازای هر a و $b > a$ داریم

$$P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a),$$

پس

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a). \qquad (۶)$$

این تساوی نشان می‌دهد که تابع توزیع به‌طور یکتا توزیع X را معین می کند و می‌توان از آن برای محاسبهٔ احتمالات استفاده کرد.

فرض می‌کنیم که X یك متغیر گسسته باشد. دراین صورت تابع توزیع $F(x)$ را می‌توان برحسب تابع احتمال $f(x)$ نمایش داد. در واقع، باجایگزین کردن $a = -\infty$ و $b = x$ در (۴)، به‌دست می‌آوریم

$$F(x) = \sum_{x_j \leqslant x} f(x_j) \qquad (۷)$$

که در آن طرف راست، مجموع تمام $f(x_j)$ هایی است که به ازای آنها $x_j \leqslant x$. مثالهای ساده در شکلهای ۳۷۰ و ۳۷۱ ارائه شده‌اند. $f(x)$ در هر دو شکل با نمودار میله‌ای نمایش داده شده است. درشکل ۳۷۰ به ازای $x = ۱, ۲, \ldots, ۶$ داریم $f(x) = ۱/۶$ و به‌ازای xهای دیگر داریم $f(x) = ۰$. درشکل ۳۷۱ تابع $f(x)$ دارای مقادیر زیر است:

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f(x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

چون $۳۶ = ۶ \times ۶$ برآمد هم‌شانس وجود دارد، هر برآمد دارای احتمال ۱/۳۶ خواهد بود؛ تنها به‌ازای یك برآمد داریم $X = ۲$ و آن (۱ ,۱) (عدد اول به‌تاس اول وعدددوم به‌تاس دوم مربوط می‌شود) است درمورد برآمد (۲ ,۱) و (۱ ,۲) داریم $X = ۳$؛ و داریم $X = ۴$ اگر یکی از سه برآمد (۳ ,۱)، (۲ ,۲)، (۱ ,۳) را داشته باشیم، و الی آخر.

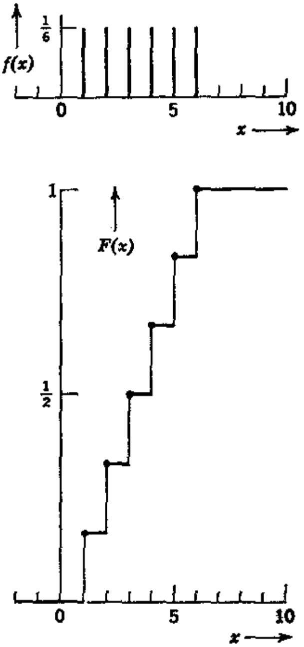
مقادیر x_1، x_2، x_3، ... که به‌ازای آنها متغیر تصادفی X دارای احتمال مثبت

---

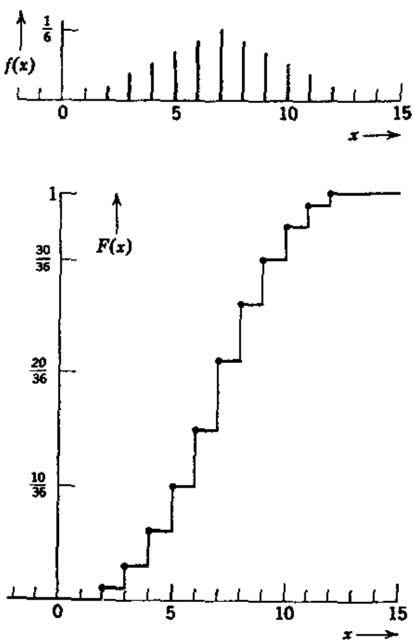
۱. توجه کنید که برخی ازمؤلفین $F(x)$ را **تابع توزیع تجمعی** می‌نامند. خصوصاً آنهایی که‌عبارت تابع توزیع را برای تابع احتمال $f(x)$ مورد استفاده قرارمی‌دهند.

باشد (وتنها این مقادیر) **مقادیر ممکن** X نامیده می‌شوند. درهر فاصله‌ای که هیچ یك از مقادیر ممکن نباشد تابع توزیع $F(x)$ ثابت است. ازاین رو $F(x)$ یك **تابع پله‌ای** (تابع تکه‌ای ثابت) است که پرشی به‌اندازهٔ $P_j = P(X = x_j)$ در $x = x_j$ دارد و بین دومقدار ممکن متوالی ثابت است. شکلهای ۳۷۰ و ۳۷۱ مثالهای توضیحی هستند.

اکنون متغیرهای تصادفی پیوسته را تعریف وبررسی می‌کنیم. متغیرتصادفی X و توزیع متناظر باآن از نوع پیوسته، یا اجمالاً، **پیوسته** نامیده می‌شوند هرگاه تابع‌توزیع مربوط به‌آنها، $F(x) = P(X \leqslant x)$، را بتوان باانتگرالی به صورت زیرنمایش داد[1]:



شکل ۳۷۰. تابع احتمال $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ متغیرتصادفی X، عددی که درپرتاب یك تاس سالم می‌آید



شکل ۳۷۱. تابع احتمال $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ متغیرتصادفی X، مجموع اعدادی که در پرتاب دوتاس سالم می‌آیند

۱. $F(x)$ پیوسته است، ولی پیوستگی $F(x)$ وجود نمایشی به صورت (۸) را لازم نمی‌آورد. چون توابع توزیع پیوسته‌ای که نمی‌توان آنها را به صورت (۸) نمایش داد، در عمل بسیارکم هستند، عبارات «متغیرتصادفی پیوسته» و «توزیع پیوسته» راکه به‌طور وسیع جا افتاده‌اندنباید باهم اشتباه کرد.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv \tag{۸}$$

که درآن انتگران، به‌جز احتمالا به‌ازای حداکثر تعدادی متناهی ازمقادیر v پیوسته ومنفی است. انتگران f راچگالی احتمال، یا اجمالا، **چگالی** توزیع می‌نامند. با مشتقگیری از (۸) به‌دست می‌آوریم

$$F'(x)=f(x),$$

به‌ازای xهایی که $f(x)$ درآنها پیوسته است. به‌مفهومی که گفته شد چگالی مشتق تابع توزیع است.

از (۸) واصل موضوع ۲، بخش ۵.۲۰ داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv=1 \tag{۹}$$

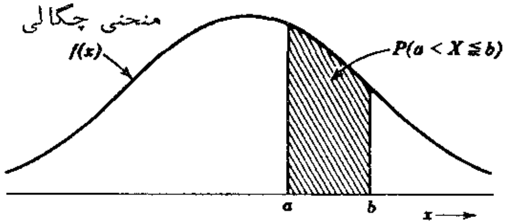
به‌علاوه، از (۶) و (۸)، فرمول

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(v)\,dv \tag{۱۰}$$

را به‌دست می‌آوریم. پس این احتمال با مساحت زیر منحنی چگالی $f(x)$ درفاصلهٔ بین $x=a$ و $x=b$ برابراست.

واضح است که به ازای هر دومقدار ثابت a و $b(>a)$، احتمالات مربوط بـه فواصل $a<X\leqslant b$، $a<x<b$، $a\leqslant X<b$، و $a\leqslant X\leqslant b$ همه با هم برابرند و این با آنچه در مورد توزیعهای گسسته دیدیم متفاوت است.

مثالهای توزیعهای پوسته درمجموعهٔ مسائل آینده وبخشهای بعدی ارائه خواهدشد.



شکل ۳۷۲. مثال برای فرمول (۱۰)

مسائل بخش ۷.۲۰

۱. نمودار تابع احتمال $f(x)=x^2/14$ $(x=1,\ 2\ ,\ 3)$ وتابع‌توزیع آن را رسم کنید.

۲. هر گاه X دارای تابع احتمال $f(2)=1/2$، $f(3)=1/4$، $f(4)=f(5)=1/8$ باشد، احتمال آنکه X مقداری کمتر از ۴ اختیار کند چقدر است؟

۳. فرض می‌کنیم X تعداد سالهایی باشد که پس از آن لازم است نوع خاصی ماشین تعویض شود. هر گاه X دارای تابع احتمال $f(1)=0.3$ ، $f(2)=0.4$ ، $f(3)=0.2$ ، $f(4)=0.1$ باشد، نمودارهای f و F را رسم کنید.

۴. نمودار چگالی $f(x)=1/4\ (1<x<5)$ و تابع توزیع آن را رسم کنید.

۵. تقاضای بنزین روزانه برحسب لیتر در یك پمپ بنزین، متغیر تصادفی X است.

فرض می‌کنیم X دارای چگالی
$$f(x)=\begin{cases} k & 2000<x<6000 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$
باشد.

تابع توزیع را یافته رسم کنید.

۶. فرض کنید $f(x)=ce^{-x}$ به‌ازای $x\geqslant 0$، و $f(x)=0$ به‌ازای $x<0$. مقدار c را بیابید و f ، E را رسم کنید.

۷. مطلوب است تعیین و رسم $f(x)$، تابع احتمال متغیر تصادفی
$X=$ مجموع ۳ عددی که در ریختن ۳ تاس سالم می‌آیند.

۸. فرض می‌کنیم X (میلیمتر) نشان دهندهٔ ضخامت واشرهای تولید شده در یك کارخانه باشد. هر گاه X دارای چگالی

$$f(x)=\begin{cases} kx & 1.9<x<2.1 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد، مقدار k را بیابید. احتمال آنکه ضخامت واشری بین ۱٫۹۵ میلیمتر و ۲٫۰۵ میلیمتر باشد چقدر است؟

۹. نشان دهید که متغیر تصادفی
$X=$ تعداد دفعاتی که یك سکهٔ سالم باید پرتاب شود تا یك شیر بیاید دارای تابع احتمال $f(x)=2^{-x}\ (x=1, 2, \ldots)$ است. نشان دهید که $f(x)$ در (۳) صدق می‌کند.

۱۰. فرض می‌کنیم
$$f(x)=\begin{cases} kx^2 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}$$
، k را بیابید. c را طوری بیابید که $P(X\leqslant c)=72.9\%$.

۱۱. مطلوب است احتمال آنکه هیچیك از ۳ لامپ چراغ راهنمایی تا ۱۲۰۰ ساعت نیاز به‌تعویض پیدا نکنند، درصورتی‌که طول عمر X یك لامپ متغیری تصادفی با چگالی

$$f(x)=\begin{cases} ۶[۰٫۲۵-(x-۱٫۵)^۲] & ۱\leqslant x\leqslant ۲ \\ ۰ & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد؛ که در آن x برحسب ۱۰۰۰ ساعت است.

۱۲. فرض می‌کنیم X نسبت فروش به سود یك شرکت تجارتی باشد. هرگاه X دارای

تابع توزیع
$$F(x)=\begin{cases} ۰ & x<۲ \\ \dfrac{x^۲-۴}{۵} & ۲\leqslant x<۳ \\ ۱ & x\geqslant ۳ \end{cases}$$
باشد، چگالی را بیابید و نمودار آن را رسم کنید. احتمال آنکه X مقداری بین ۲٫۵ (۴۰٪ سود) و ۵ (۲۰٪ سود) اختیار کند چیست؟

۱۳. فرض می‌کنیم X یك متغیر تصادفی باشد که هرمقدار حقیقی را اختیار می‌کند. مکمل هر یك از پیشامدهای $X\leqslant b$، $X<b$، $X\geqslant c$، $X>c$، $b\leqslant X\leqslant c$، $b<X\leqslant c$ را تعیین کنید.

۱۴. جعبه‌ای محتوی ۴ پیچ راستگرد و ۶ پیچ چپگرد است. دو پیچ به تصادف و بدون جایگذاری استخراج می‌شود. فرض می‌کنیم X تعداد پیچهای چپگرد استخراج‌شده باشد. مطلوب است هر یك از احتمالات $P(X=۰)$، $P(X=۱)$، $P(x=۲)$، $P(۱<X<۲)$، $P(X\leqslant ۱)$، $P(X\geqslant ۱)$، $P(X>۱)$، و $P(۰٫۵<X<۱۰)$.

۱۵. نشان دهید که از $b<c$ نتیجه می‌شود $P(X\leqslant b)\leqslant P(X\leqslant c)$.

۸.۲۰ میانگین و واریانس یك توزیع

مقدار میانگین یا **میانگین** یك توزیع که با μ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(توزیع گسسته) $$\text{(الف)}\quad \mu=\sum_j x_j f(x_j)$$

(۱)

(توزیع پیوسته) $$\text{(ب)}\quad \mu=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

تابع $f(x)$ در (۱ الف) تابع احتمال متغیر تصادفی X است، وعمل جمع برروی کلیهٔ مقادیر ممکن صورت می‌گیرد (ر. ك. بخش ۷۰۲۰). تابع $f(x)$ در (۱ ب) چگالی X است. میانگین به امید ریاضی X نیز معروف است و گاهی با $E(X)$ نمایش داده می‌شود. بنا به تعریف فرض می‌شود که سری (۱ الف) همگرای مطلق است و انتگرال $|x|f(x)$ از $-\infty$ تا ∞ وجود دارد. اگرچنین نباشد، گوییم که توزیع دارای میانگین نیست؛ چنین حالتی بندرت درکاربردهای مهندسی پیش می‌آید.

یك توزیع نسبت به‌عدد $x=c$ **متقارن** نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هرعددحقیقی x داشته باشیم

$$f(c+x)=f(c-x) \qquad (۲)$$

خواننده می‌تواند قضیهٔ زیر را ثابت کند (ر. ك. مسئلهٔ ۱).

قضیهٔ ۱ (میانگین توزیع متقارن)

هرگاه توزیعی که میانگین آن μ است نسبت به $x=c$ متقارن باشد، آنگاه $\mu=c$.

واریانس توزیع را با σ^2 نمایش می‌دهند وبا فرمولهای زیرتعریف می‌کنند:

$$\text{(الف)}\quad \sigma^2=\sum_j (x_j-\mu)^2 f(x_j) \qquad \text{(توزیع گسسته)}$$

$$(۳)$$

$$\text{(ب)}\quad \sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx \qquad \text{(توزیع پیوسته)}$$

دراین فرمولها، بنابه‌تعریف، فرض می‌شود که سری (۳ الف) همگرای مطلق است و انتگرال (۳ ب) وجود دارد.

درمورد توزیع گسسته‌ای با $f(x)=1$ در یك نقطه و $f(x)=0$ درسایر نقاط، داریم $\sigma^2=0$. این مورد هیچگونه فایدهٔ عملی ندارد. درسایر موارد

$$\sigma^2>0. \qquad (۴)$$

ریشهٔ دوم مثبت واریانس را **انحراف معیار** نامیده وبا σ نمایش می‌دهند.

به عبارت ساده، واریانس معیاری است برای گستردگی یا پراکندگی مقادیری که متغیر تصادفی X می‌تواند اختیارکند.

مثال ۱. میانگین و واریانس

متغیر تصادفی

$X=$ تعداد شیرهایی که در یك پرتاب سکه‌ای سالم می‌آید

دارای مقادیر ممکن $X=0$ و $X=1$ با احتمالات $P(X=0)=1/2$ و

$P(X=1)=1/2$ است. بنابراین از (۱ الف) مقدار میانگین به دست می‌آید: $\mu=0\times 1/2+1\times 1/2=1/2$ و (۳ الف) نتیجه می‌دهد

$$\sigma^2=\left(0-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

مثال ۲. توزیع یکنواخت

توزیعی که چگالی

$$f(x)=\begin{cases} 1/(b-a) & a<x<b \\ 0 & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}$$

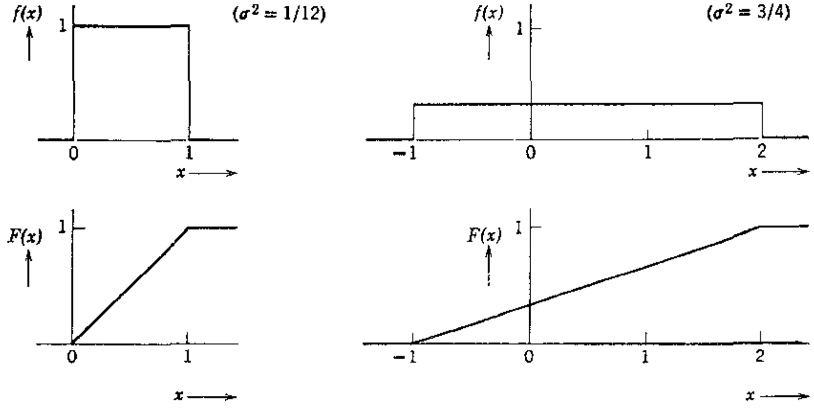
را دارد، یکنواخت یا توزیع مستطیلی برفاصله $a<x<b$ نامیده می‌شود. ازقضیهٔ ۱ یا از (۱ ب) به دست می‌آوریم $\mu=(a+b)/2$، واز (۳ب) مقدار واریانس نتیجه‌می‌شود:

$$\sigma^2=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

شکل ۳۷۳ موارد خاصی را نشان می‌دهد که در آنها σ^2 گستردگی را اندازه می‌گیرد. ▲

قضیهٔ ۲ (تبدیل خطی)

اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، متغیر تصادفی



شکل ۳۷۳. توزیعهای یکنواختی که دارای میانگین یکسان (۵ر۰) وواریانسهای متفاوت σ^2 هستند

دارای میانگین $X^*=c_1X+c_2(c_1\neq 0)$

$$\mu^*=c_1\mu+c_2 \qquad (۵)$$

و واریانس

$$\sigma^{*2}=c_1^2\sigma^2 \qquad (۶)$$

است.

اثبات. (۵) را برای حالت پیوسته، نخست با فرض $c_1>0$ ثابت می‌کنیم. برای x و $x^*=c_1x+c_2$ چگالیهای $f(x)$ و $f^*(x^*)$ مربوط به X و X^* در رابطهٔ $f^*(x^*)=f(x)/c_1$ صدق می‌کنند، زیرا بافاصلهٔ کوچکی به‌طول Δx روی محور X، احتمال $f(x)\Delta x$ (باتقریب) متناظرمی‌شود واین باید برابر $f^*(x^*)\Delta x^*$ باشد که درآن $\Delta x^*=c_1\Delta x$ طول فاصلهٔ متناظر روی محور X^* است. چون $dx^*/dx=c_1$، $dx^*=c_1dx$، داریم $f^*(x^*)dx^*=f(x)dx$. ازاین‌رو

$$\mu^*=\int_{-\infty}^{\infty}x^*f^*(x^*)\,dx^*=\int_{-\infty}^{\infty}(c_1x+c_2)f(x)\,dx$$

$$=c_1\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx+c_2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx.$$

انتگرال آخر برابر ۱ است، ر. ک. (۹)، بخش ۲۰.۷، وفرمول (۵) ثابت می‌شود. چون

$$x^*-\mu^*=(c_1x+c_2)-(c_1\mu+c_2)=c_1x-c_1\mu,$$

ازتعریف واریانس نتیجه می‌شود

$$\sigma^{*2}=\int_{-\infty}^{\infty}(x^*-\mu^*)^2f^*(x^*)dx^*=\int_{-\infty}^{\infty}(c_1x-c_1\mu)^2f(x)\,dx=c_1^2\sigma^2.$$

اگر $c_1<0$، نتایج عوض نمی‌شوند، زیرا دوعلامت منها داریم که یکی از تغییر جهت انتگرالگیری نسبت به x (توجه کنید که $x^*=-\infty$ با $x=\infty$ متناظراست) و دیگری از $f^*(x^*)=f(x)/(-c_1)$ نتیجه می‌شود؛ در اینجا باید داشته باشیم $-c_1>0$، زیرا چگالیها غیرمنفی هستند.

درمورد توزیع گسسته، اثبات قضیهٔ ۲ به نحومشابهی انجام می‌گیرد. ▲

از (۵) و (۶) به سادگی نتیجهٔ زیررا به دست می‌آوریم:

قضیهٔ ۳ (متغیراستاندارد شده)

هرگاه متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه متغیر متناظر با آن، $Z=(X-\mu)/\sigma$، دارای میانگین ۰ و واریانس ۱ است.

Z **متغیر استاندارد شدهٔ متناظر با** X نامیده می‌شود.

اگر X یك متغیر تصادفی باشد و $g(X)$ تابع پیوسته‌ای باشد که برای تمام Xهای حقیقی تعریف شده است، آنگاه عدد

$$E(g(X))=\sum_j g(x_j)f(x_j) \quad \text{(گسسته } X\text{)} \qquad \text{(الف)} \qquad (۷)$$

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx \quad \text{(پیوسته } X\text{)} \qquad \text{(ب)}$$

امید ریاضی $g(X)$ نامیده می‌شود. دراینجا f به ترتیب تابع احتمال یا چگالی است. با انتخاب $g(X)=X^k(k=۱, ۲, \ldots)$ در (۷)، به ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$(۸) \qquad E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx \qquad \text{و} \qquad E(X^k)=\sum_j {x_j}^k f(x_j)\,.$$

$E(X^k)$ را k امین **گشتاور** X می‌نامند. با قراردادن $g(X)=(X-\mu)^k$ در (۷)، به ترتیب، خواهیم داشت

$$(۹) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k f(x)\,dx \qquad \text{و} \qquad E([X-\mu]^k)=\sum_j (x_j-\mu)^k f(x_j).$$

این بسط k **امین گشتاور مرکزی** X نام دارد. خواننده می‌تواند نشان دهد که

$$(۱۰) \qquad E(۱)=۱$$

$$(۱۱) \qquad \mu=E(X)$$

$$(۱۲) \qquad \sigma^۲=E([X-\mu]^۲)$$

مسائل بخش ۸.۲۰

۱. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۲. مطلوب است میانگین و واریانس توزیعی با چگالی $f(x)=۱/۲e^{-|x|}$.

۳. فرض می‌کنیم که X دارای چگالی
$$f(x)=\begin{cases} ۰/۵x & ۰\leqslant x\leqslant ۲ \\ ۰ & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}$$
باشد.
نشان دهید که X دارای میانگین ۴/۳ و واریانس ۲/۹ است.

۴. مطلوب است میانگین و واریانس $Y=-۲X+۵$. متغیر تصادفی X درمسئلهٔ ۳ داده شده است.

۵. مطلوب است متغیر تصادفی استاندارد شدهٔ متناظر با X درمسئلهٔ ۳ .

۶. قضیهٔ ۲ را برای حالت گسسته ثابت کنید.

۷. قضیهٔ ۳ را از (۵) و (۶) نتیجه بگیرید.

۸. فرض کنید حداکثر مسافتی (برحسب هزار کیلومتر) که با نوع معینی لاستیك اتومبیل می‌توان طی کرد متغیری تصادفی مانند X باشد که تابع چگالی‌آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} & x>0\\ 0 & \text{درجاهای دیگر}\end{cases}$$

است. دراینجا، $\theta(>0)$ یك پارامتراست. (الف) راننده انتظار دارد چه مسافتی را با یکی ازاین نوع لاستیکها طی کند؟ (ب) فرض کنید $\theta=0.05$. مطلوب است احتمال آنکه لاستیك پس ازطی ۳۰۰۰۰ کیلومترفرسوده شود.

۹. فرض کنید X [سانتیمتر] قطر پیچهای یك محصول صنعتی دارای تابع چگالی

$$f(x)=\begin{cases}k(x-0.9)(1.1-x) & 0.9<x<1.1\\ 0 & \text{درجاهای دیگر}\end{cases}$$

باشد. k را تعیین کنید، نمودار $f(x)$ را رسم کنید و μ و σ^2 را بیابید.

۱۰. درمسئلهٔ ۹ فرض می‌کنیم پیچی معیوب است که قطرآن درهر ۱٫۰۰ سانتیمتر بیش‌از ۰٫۰۶ سانتیمترانحراف داشته‌باشد. انتظارداریدچه درصدی از پیچها معیوب باشد؟

۱۱. یك پمپ بنزین کوچك را هر بعدازظهرشنبه پرمی‌کنند. فرض می‌کنیم X مقدار بنزین فروخته شده برحسب هزارلیتردارای چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

باشد. میانگین و واریانس X را تعیین کنید.

۱۲. مخزن پمپ بنزین ذکرشده درمسئلهٔ ۱۱ چه ظرفیتی داشته باشد تا احتمال خالی‌شدن مخزن دریك هفته برابر ۱۰٪ باشد.

۱۳. (۱۰) و (۱۱) را ثابت کنید.

۱۴. (۱۲) را ثابت کنید.

۱۵. نشان دهید که $E(X-\mu)=0$.

۱۶. نشان دهید که $\sigma^۲=E(X^۲)-\mu^۲$.

۱۷. فرض می‌کنیم X دارای چگالی

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. همهٔ گشتاورها را بیابید. $\sigma^۲$ را به کمك فرمول ذکرشده درمسئلهٔ ۱۶ محاسبه کنید.

۱۸. نشان دهید که $\sigma^۲=E(X[X-۱])+\mu-\mu^۲$.

۱۹. نشان دهید که $E(ag(X)+bh(X))=aE(g(X))+bE(h(X))$ ؛ [a و b ثابت هستند].

۲۰. $E([X-c]^۲)$ را گشتاور دوم X نسبت به c می‌نامند. نشان دهید این گشتاور، اگر وجود داشته باشد، به ازای $c=\mu$ مینیمم است.

۲۱. مطلوب است گشتاورهای توزیع یکنواخت برفاصلهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۱$.

۲۲. **(چاولگی)** عدد

$$\gamma=\frac{۱}{\sigma^۳}E([X-\mu]^۳)$$

چاولگی X نامیده می‌شود. نشان دهید درصورت متقارن‌بودن X نسبت‌به μ، گشتاور مرکزی سوم، اگروجود داشته باشد، برابرصفراست وبا توجه به این مسئله چاولگی را توجیه کنید.

۲۳. مطلوب است چاولگی توزیعی با چگالی

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & x>۰ \\ ۰ & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}$$

نمودار $f(x)$ را رسم کنید.

۲۴. مطلوب است چاولگی توزیعی با چگالی

$$f(x)=\begin{cases} ۲(۱-x) & ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}.$$

۲۵. **(تابع مولدگشتاور)** تابع مولد گشتاور متغیرتصادفی گسسته یا پیوستهٔ X به ترتیب

با فرمولهای زیرداده می‌شود:

$$G(t)=E(e^{tX})=\sum_j e^{tx_j} f(x_j) \quad و \quad G(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx \;.$$

با فرض اینکه، مشتقگیری زیرعلامت جمع وعلامت انتگرال مجازاست، نشان دهید که $E(X^k)=G^{(k)}(0)$، خصوصاً $\mu=G'(0)$، در اینجا $G^{(k)}(t)$ مشتق k ام G نسبت به t است.

۹.۲۰ توزیعهای دوجمله‌ای، پواسن، و فوق هندسی

هم‌اکنون به بررسی توزیعهای گسستهٔ خاصی‌که به ویژه درآمار مهم هستند می‌پردازیم. از توزیع دوجمله‌ای آغازمی‌کنیم، این توزیع را وقتی به دست می‌آوریم که دفعات وقوع پیشامد A در n اجرای مستقل آزمایش موردنظرما باشد، بافرض اینکه پیشامد A درهر آزمایش دارای احتمال $P(A)=p$ باشد. آنگاه $q=1-p$ احتمال رخ ندادن پیشامد A درهر آزمایش است. فرض می کنیم آزمایش n بارتکرارشود، متغیرتصادفی

$$X = \text{تعداد دفعاتی که } A \text{ روی می‌دهد}$$

را درنظرمی گیریم دراین صورت X می‌تواند هریك ازمقادیر ۰، ۱، ...، n را اختیار کند، وما می‌خواهیم احتمالهای متناظربا آنها را تعیین‌کنیم. برای این منظور هریك از این مقادیر، مثلا x، $X=x$، رابررسی‌می کنیم، $X=x$ بدان معنی‌است‌که در n آزمایش x بار A روی می‌دهد و $n-x$ بار A روی نمی‌دهد. این را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\underbrace{AA\cdots A}_{x\ \text{تا}}\ \underbrace{BB\cdots B}_{n-x\ \text{تا}} \qquad (1)$$

دراینجا $B=A^C$، یعنی A روی نمی‌دهد. فرض می کنیم‌که آزمایشها مستقل باشند، یعنی روی هم اثرنگذارند. آنگاه نظر به اینکه $P(A)=p$ و $P(B)=q$، مشاهده می کنیم‌که (۱) دارای احتمال

$$\underbrace{pp\cdots p}_{x\ \text{تا}}\ \underbrace{qq\cdots q}_{n-x\ \text{تا}}=p^x q^{n-x}$$

است. واضح است‌که (۱) تنها یك ترتیب x تا A و $n-x$ بار B است، و بنابراین احتمال $P(X=x)$ برابراست با حاصل ضرب $p^x q^{n-x}$ در همهٔ ترتیبهای x تا A و $n-x$ تا B، قضیهٔ ۱ بخش ۵.۲۰ نیزهمین‌نتیجه رامی‌دهد. می‌توان این n آزمایش را

از ۱ تا n شماره‌گذاری کرده x تا ازآنها را که متناظر با اجرایی هستند که در آنها A روی می‌دهد جدا کرد. چون درجدا کردن این x تا آزمایش ترتیب اهمیتی ندارد، از (۴ الف) بخش ۶.۲۰ نتیجه می‌شود که انتخاب x از n تنها به $\binom{n}{x}$ روش مختلف امکان دارد. ازاین‌رو احتمال $P(X=x)$، متناظر با $X=x$، برابراست با

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad (x=0,1,\cdots,n) \tag{۲}$$

و $f(x)$ به ازای سایرمقادیر x برابرصفراست. این احتمال رویداد پیشامدی مانند A به تعداد دقیقاً x بار در n آزمایش مستقل است، درصورتی‌که p احتمال A دریك آزمایش و $q=1-p$ است. توزیعی که با تابع احتمال (۲) مشخص می‌شود. **توزیع دوجمله‌ای** یا توزیع برنولی نامیده می‌شود. روی دادن A موفقیت، و عدم روی دادن آن شکست نامیده می‌شود. p احتمال موفقیت در یك آزمایش نامیده می‌شود. شکل ۳۷۴ باچند مثال مطلب را روشنتر می‌کند.

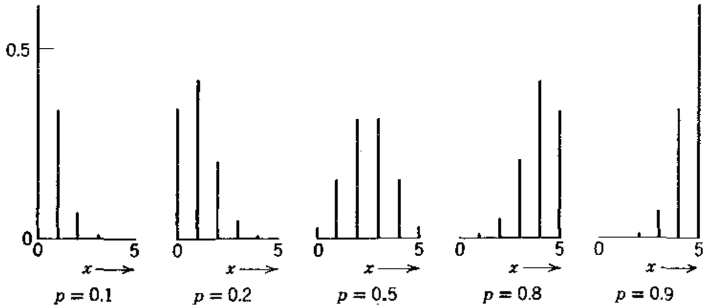
توزیع دوجمله‌ای دارای میانگین (ر. ك. مسئلهٔ ۲۱)

$$\mu=np \tag{۳}$$

و واریانس (ر. ك. مسئلهٔ ۲۲)

$$\sigma^2=npq \tag{۴}$$

است. توجه کنید که وقتی $p=0.5$، توزیع نسبت به μ متقارن است.



شکل ۳۷۴. تابع احتمال (۲)ی توزیع دوجمله‌ای به ازای $n=5$ و مقادیر گوناگون p

جدولی ازتوزیع دوجمله‌ای درضمیمهٔ ۴ آمده است. برای دیدن جدولهای مفصلتر به‌مرجع [۱۰ [] ضمیمهٔ ۱ مراجعه کنید.

توزیعی که با تابع احتمال

$$f(x)=\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} \qquad (x=0,\ 1,\ \ldots) \tag{۵}$$

داده می‌شود، به‌افتخار اس. دی. پواسن (ر. ك. بخش ۴۰۱۸) نامگذاری شده است. شکل ۳۷۵ تابع‌احتمال (۵) را به‌ازای‌برخی ازمقادیر μ نشان می‌دهد. ثابت می‌شود که‌توزیع پواسن را می‌توان با حدگیری از توزیع دو جمله‌ای به‌دست آورد، اگر $p\to 0$ و $n\to\infty$ و میانگین $\mu=np$ به مقداری متناهی میل کند. توزیع پواسن دارای میانگین μ و واریانس (ر. ك. مسئلهٔ ۲۳)

$$\delta^2=\mu \tag{۶}$$

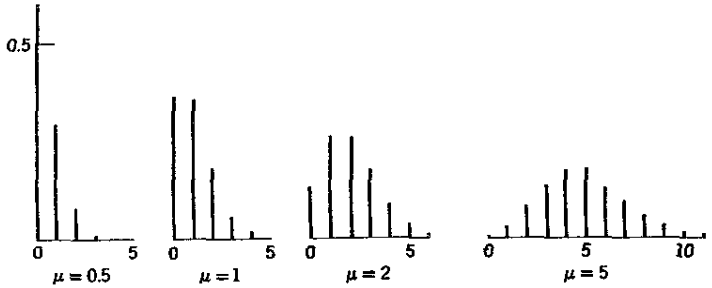
است. این توزیع احتمالهایی را نشان می‌دهد ازقبیل تعداد اتومبیلهایی که در واحد زمان ازتقاطعی می گذرند، تعداد عیبهایی که نوعی سیم درواحد طول یانوعی‌کاغذ یا پارچه در واحد مساحت دارد وغیره.

مثال زیرنشان می‌دهد که توزیع دوجمله‌ای در **نمونه باجایگذاری** (ر. ك. مثال۳، بخش ۵۰۲۰) اهمیت دارد. فرض می‌کنیم جعبه‌ای محتوی N شیء، مثلاً، N پیچ باشد، که M تای‌آنها معیوبند. هرگاه بخواهیم پیچی‌را به‌تصادف انتخاب‌کنیم، احتمال به‌دست آوردن یك پیچ معیوب عبارت است از

$$p=\frac{M}{N}$$

ازاین رو دراستخراج یك نمونهٔ nتایی ازپیچها با جایگذاری، احتمال‌آنکه‌درست x پیچ از n پیچ معیوب باشند عبارت است از [ر.ك. (۲)]

$$f(x)=\binom{n}{x}\left(\frac{M}{N}\right)^x\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-x} \quad (x=0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{۷}$$



شکل ۳۷۵. تابع احتمال (۵) توزیع پواسن به‌ازای مقادیرگوناگون μ

در **نمونه‌گیری بدون جایگذاری** این احتمال برابر است با

$$f(x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (x=0,\ 1\ \ldots,\ n). \tag{۸}$$

این توزیع که تابع احتمال آن (۸) است **توزیع فوق هندسی** نامیده می‌شود.[۱]

برای تحقیق درستی این حکم، با توجه به (۴ الف)، بخش ۶.۲۰ یادآوری می‌کنیم که

(الف) $\binom{N}{n}$ راه مختلف برای استخراج n شیء از N

(ب) $\binom{M}{x}$ راه مختلف برای استخراج x شیء معیوب از M

(ج) $\binom{N-M}{n-x}$ راه مختلف برای استخراج $n-x$ شیء نامعیوب از $N-M$

وجود دارد. اگر یکی از راههای (ب) را با یکی از راههای (ج) ترکیب کنیم تعداد کل راههای دو به‌دو ناسازگار برای به دست آوردن x شیء معیوب در n استخراج بدون جایگذاری حاصل می‌شود. چون (الف) تعداد کل برآمدها است و استخراج به تصادف انجام می‌گیرد، هریك از این راهها دارای احتمال $1/\binom{N}{n}$ است. از آنچه گفته شد، (۸) نتیجه می‌شود.

توزیع فوق هندسی دارای میانگین (ر. ك. مسئلهٔ ۲۵)

$$\mu=n\frac{M}{N} \tag{۹}$$

و واریانس

---

۱. این نامگذاری بدان علت است که تابع مولدگشتاور (ر. ك. مسئلهٔ ۲۵، بخش ۸.۲۰) این توزیع را می‌توان به صورت تابع فوق هندسی نمایش داد.

$$\sigma^{۲}=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^{۲}(N-۱)} \tag{۱۰}$$

است.

مثال ۱. نمونه‌گیری با و بدون جایگذاری

می‌خواهیم از جعبه‌ای محتوی ۱۰ واشر که ۳ تایشان معیوبند ۲ واشر به‌تصادف استخراج کنیم. تابع احتمال متغیر تصادفی

$$X = \text{تعداد اشیاء معیوب درنمونه}$$

را بیابید. داریم $N=۱۰$، $M=۳$، $N-M=۷$، $n=۲$. درمورد نمونه گیری با جایگذاری، از فرمول (۷) نتیجه می‌شود

$$f(x)=\binom{۲}{x}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{x}\left(\frac{۷}{۱۰}\right)^{۲-x}, \quad f(۲)=۰٫۰۹, \quad f(۱)=۰٫۴۲, \quad f(۰)=۰٫۴۹$$

هرگاه N، M و $N-M$ نسبت به n بزرگ باشند، آنگاه نمونه‌گیری با جایگذاری یا بدون جایگذاری بایکدیگر تفاوت چندانی ندارند، و دراین حالت توزیع فوق هندسی را می‌توان به‌کمك توزیع دوجمله‌ای با $(p=M/N)$ که تااندازه‌ای ساده‌تر است محاسبه‌کرد.

ازاین‌رو درنمونه‌گیری ازیك جامعهٔ بسیار بزرگ (**«جامعهٔ نامتناهی»**) می‌توان توزیع دوجمله‌ای را بدون توجه به اینکه نمونه گیری با جایگذاری است یا بدون جایگذاری به کاربرد.

مسائل بخش ۹.۲۰

۱. فرمولهایی برای $f(x)$، μ، و $\sigma^{۲}$ درحالتی که توزیع‌دوجمله‌ای است و $p=۰٫۵$، بیابید.

۲. ۵ سکه را باهم پرتاب می‌کنیم. تابع احتمال متغیرتصادفی

$$X = \text{تعداد شیرها}$$

را پیداکنید و به‌ترتیب احتمال به‌دست آوردن هیچ شیر، درست یك شیر، لااقل یك شیر، وحداکثر ۴ شیر را حساب کنید.

۳. اگر دریك تجربه، شانس رسیدن به مقادیرمثبت ومنفی یکسان باشد، احتمال به‌دست آوردن حداکثر یك مقدار منفی در ۹ آزمایش چیست؟

۴. اگر احتمال برخورد به هدف ۱۰٪ باشد و ۱۰ گلوله بـه طورمستقل شلیك شوند،

احتمال آنکه حداکثر یکی از گلوله‌ها به هدف بخورد چیست؟

۵. فرض می‌کنیم $p=1\%$ احتمال سوختن نوعی لامپ در یك آزمون ۲۴ ساعته باشد. چقدر احتمال دارد در تابلویی که در آن ۱۰ تا از این لامپها به‌کار رفته پس از ۲۴ ساعت‌کارمداوم هیچ لامپی نسوزد.

۶. فرض می‌کنیم ۳ درصد پیچهایی که یك‌کارخانه می‌سازدمعیوب باشند. پیچهای معیوب به‌تصادف تولید می‌شوند. اگر پیچها در جعبه‌های ۵۰ تایی بسته‌بندی شوند، تقریب پواسن احتمال‌آنکه جعبه‌ای شامل x پیچ معیوب باشد چیست؟

۷. فرض می‌کنیم درتولید مقاومتهای ۵۰ اهمی برای رادیو، کالای غیرمعیوب به‌آنهایی اطلاق شود که مقاومتشان بین ۴۵ و ۵۵ اهم باشد و فرض می‌کنیم احتمال اینکه مقاومتی معیوب باشد ۲٫۰٪ است. مقاومتها را درجعبه‌های ۱۰۰ تایی باتضمین آنکه به تمامی غیرمعیوبند به فروش می‌رسانند. احتمال آنکه ضمانت درمورد جعبه‌ای درست نباشد چیست؟ (ازتوزیع پواسن استفاده‌کنید.)

۸. فرض می‌کنیم تابلوی راهدهی یك مرکز تلفن دریك ساعت پرمشغله به‌طور متوسط به ۳۰۰ تلفن راه دهد، و درهر دقیقه بتواند حداکثر ۱۰ ارتباط برقرار کند. بااستفاده ازتوزیع پواسن، احتمال‌آنکه درخلال یك دقیقهٔ معین تابلو باکاری بیش ازظرفیتش مواجه شود چیست؟

۹. آزمایشهای‌کلاسیکی که توسط ئی. راترفورد و اچ. گایگر درسال۱۹۱۰ انجام‌شدند نشان دادند که تعداد ذرات آلفای گسیل شده در یك فرایند رادیو اکتیو درمدت یك ثانیه متغیری تصادفی است مانند X که دارای توزیع پواسن است. اگر X دارای میانگین ۰٫۵ باشد، احتمال اینکه دریك ثانیه ۲ ذرهٔ α یا بیشترمشاهده شود چیست؟

۱۰. فرض می‌کنیم نوعی نوار مغناطیسی، به طور متوسط، درهر ۱۰۰ متر دوعیب داشته باشد. احتمال اینکه یك‌حلقه ازاین نوع نوار به‌طول ۳۰۰ متر (الف) شاملx عیب (ب) بی‌عیب باشد چیست؟

۱۱. فرض می‌کنیم X تعداد اتومبیلهایی باشد که درهردقیقه ازنقطهٔ معین‌جاده‌ای بین‌ساعت ۸تا۱۰ صبح یك‌روز یك‌شنبه می‌گذرند. فرض می‌کنیم که X دارای توزیع پواسنی بامیانگین ۵ باشد. احتمال گذشتن ۳ اتومبیل یاکمتر، ازاین نقطه درهردقیقه چیست؟

۱۲. کارتنی محتوی ۱۰ فیوز است که ۵تای آنها معیوبند نمونه‌ای ۳تایی از این فیوزها را به‌طور تصادفی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم، احتمال وجود x فیوز معیوب درچنین نمونه‌ای چقدراست؟

۱۳. یك توزیع کنندهٔ نوار لاستیکی نوارها را دربسته‌های ۱۰۰ تایی می‌فروشد و تضمین می‌کند که بیشتر از ۱۰٪ آنها معیوب نباشد. یك مشتری هر بسته را با کشیدن ۱۰ نوار

به طور تصادفی و بدون جایگذاری کنترل می‌کند. اگر نمونهٔ ۱۰ تایی انتخاب شده شامل هیچ نوار معیوبی نباشد آن را می‌خرد و درغیر این صورت آن را به‌فروشنده برمی‌گرداند. مطلوب است احتمال آنکه دراین فرایند مشتری بسته‌ای را برگرداند که شامل ۱۰ نوار معیوب است وشرایط قید شده درتضمین نامه را داراست.

۱۴. درمسئلهٔ ۱۳، مطلوب است احتمال اینکه مشتری همهٔ بسته‌ها را بخرد، درصورتی که هر بسته شامل ۲۰ لاستیك معیوب باشد.

۱۵. یك کارخانهٔ تولیدکنندهٔ پیچ درهرساعت باانتخاب n پیچ به‌طور تصادفی محصولات خود را مورد بازرسی قرار می‌دهد؛ اگر درمیان این n پیچ، پیچ معیوبی دیده شود عمل تولید متوقف می‌شود وجستجو برای یافتن عیب‌کار با دقت آغاز می‌شود. اگر صاحب کارخانه بخواهد احتمال متوقف شدن تولید حدود ۹۵٪ باشد n را چند بگیرد؟ وقتی که ۱۰٪ مهره‌های‌تولید شده معیوب‌باشند. (استقلال کیفیت هرکار ازسایر کالاها را فرض کنید.)

۱۶. (توزیع چندجمله‌ای) فرض کنیدنتیجهٔ آزمایشی یکی‌از k پیش‌آمد دو به‌دو ناسازگار A_1، ...، A_k باشد که به ترتیب احتمالهای p_1، ...، p_k را دارند و $p_1+\dots+p_k=1$. فرض‌کنید n آزمایش به طور مستقل انجام شود. نشان دهید که احتمال روی دادن A_1 x_1 بار، ...، A_k x_k بار برابر است با

$$f(x_1,\ \dots,\ x_k)=\frac{n!}{x_1!\dots x_k!}\,p_1^{x_1}\dots p_k^{x_k}$$

که در آن $0\leqslant x_j\leqslant n$، $j=1,\ \dots,\ k$ و $x_1+\dots+x_k=n$ توزیعی که چنین تابع احتمالی دارد توزیع چندجمله‌ای نامیده می‌شود.

۱۷. فرض کنید که در تولید مقاومتهای الکتریکی، احتمال تولید یك مقاومت $R<198\ \text{ohm}$ ی یا $R>201\ \text{ohm}$ ی به ترتیب ۳٪ و ۵٪ باشد. مطلوب است احتمال اینکه یك نمونهٔ تصادفی ۲۰ مقاومتی شامل درست x_1 مقاومت با $R<198\ \text{ohm}$ و x_2 مقاومت با $R>201\ \text{ohm}$ باشد چقدر است.

۱۸. نشان دهیدکه تابع توزیع، توزیع پواسن در $F(\infty)=1$ صدق می‌کند.

۱۹. فرض می‌کنیم X دارای توزیعی دوجمله‌ای با $p=0.5$ باشد. مطلوب‌است‌احتمال آنکه X مقداری ازفاصلهٔ $\mu-\sigma<X<\mu+\sigma$ اختیار کند، با فرض

(الف) $n=1$، (ب) $n=2$، (ج) $n=3$، (د) $n=4$، و (ه) $n=5$.

۲۰. با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای، نشان دهیدکه توزیع دوجمله‌ای دارای تابع مولد گشتاور

$$G(t)=\sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}=(pe^t+q)^n$$

است. (ر.ك. مسئلهٔ ۲۵ ، بخش ۸.۲۰.)

۲۱. با استفاده ازمسئلهٔ ۲۰ ، $p+q=1$ ، (۳) را ثابت کنید.

۲۲. (۴) را ثابت کنید.

۲۳. نشان دهید که توزیع پواسن دارای تابع مولد گشتاور

$$G(t)=e^{-\mu}e^{\mu e^t}$$

است و (۶) را ثابت کنید.

۲۴. نشان دهید که $E([X-\mu]^3)=E(X^3)-3\mu E(X^2)+2\mu^3$. با استفاده از این موضوع و مسئلهٔ ۲۳ ، نشان دهید کـه توزیع پواسن دارای چاولگی $\gamma=1/\sqrt{\mu}$ است ونتیجه بگیرید که اگر μ بزرگ باشد توزیع تقریباً متقارن‌خواهدبود. (ر.ك. شکل ۳۷۵.)

۲۵. (۹) را ثابت کنید.

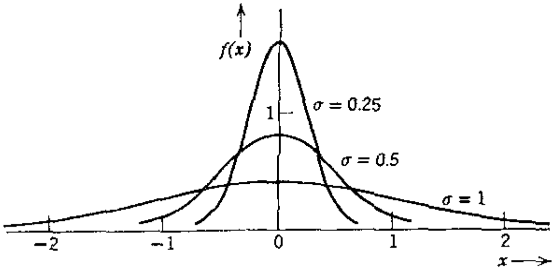
۱۰.۲۰ توزیع نرمال

توزیع پیوسته‌ای که چگالی آن

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (\sigma>0) \tag{1}$$

است ، **توزیع نرمال** یا توزیع گاوس نامیده می‌شود . یك متغیر تصادفی که این توزیع را داشته باشد **نرمال** نامیده می‌شود ، یا گفته می‌شود که به طور نرمال توزیع شده است. این توزیع خیلی مهم است ، زیرا بسیاری از متغیرهای تصادفی که درعمل جالب هستند یا نرمالند یا تقریباً نرمال ، و یا به روشی نسبتاً ساده قابل تبدیل به متغیرهای تصادفی نرمال هستند. به علاوه ، توزیع نرمال تقریب مفیدی است برای بسیاری ازتوزیعهای پیچیده‌تر. ازاین توزیع دراثبات ریاضی آزمونهای آماری گوناگون نیزاستفاده می‌شود.

در (۱) ، μ میانگین و σ انحراف معیار توزیع است. منحنی $f(x)$ را منحنی زنگی‌ـشکل می‌نامند. این منحنی نسبت بـه μ متقارن است. شکل ۳۷۶، $f(x)$ را بـه ازای $\mu=0$ نشان می‌دهد؛ به ازای $\mu>0$ ($\mu<0$) منحنی همین شکل را دارد، با این تفاوت که $|\mu|$ واحد به راست (چپ) انتقال می‌یابد. درشکل ۳۷۶ هرچه σ^2 کوچکتر



شکل ۳۷۶. چگالی (۱) درمورد توزیع نرمالی با
$\mu = 0$ ، به ازای مقادیر گوناگون σ

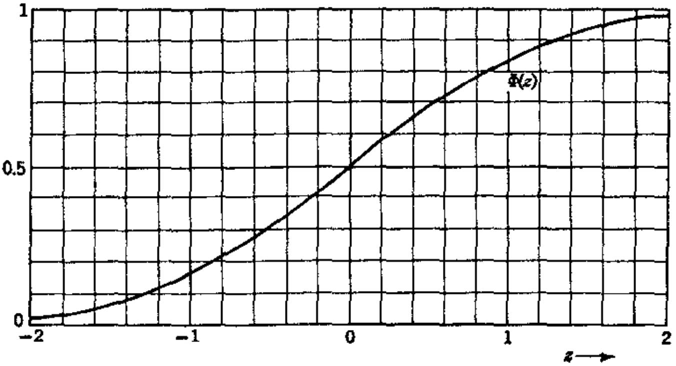
باشد، ارتفاع قلهٔ منحنی در $x = 0$ بیشتر می‌شود وشیب دوطرف منحنی نیز بیشترخواهد شد واین بامعنی واریانس مطابقت دارد.

بنابه (۱) مشاهده می‌کنیم که توزیع نرمال دارای تابع توزیع

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv \qquad (2)$$

است. ازاین فرمول و (۱۰) بخش ۷.۲۰ به‌دست می‌آوریم

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du. \qquad (3)$$



شکل ۳۷۷. تابع توزیع $\Phi(z)$ درمورد توزیع نرمالی با میانگین
۰ و واریانس ۱

انتگرال (۲) رابه روشهای مقدماتی نمی‌توان حساب کرد ، بلکه آن را می‌توان

برحسب انتگرال

$$\Phi(z)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^{۲}}{۲}}\,du \qquad (۴)$$

نمایش داد (شکل ۳۷۷)، که تابع توزیع نرمالی با میانگین ۰ و واریانس ۱ است و مقادیر آن محاسبه و درجدول آمده است (جدول A۸ ، ضمیمهٔ ۴). درواقع، هرگاه قرار دهیم $(v-\mu)/\sigma=u$ ، آنگاه $du/dv=۱/\sigma$ ، $dv=\sigma dv$ ، و اکنون بایداز $-\infty$ تا $z=(x-\mu)/\sigma$ انتگرال بگیریم. بنابراین باتوجه به (۲) بەدست می‌آوریم

$$F(x)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} e^{-\frac{u^{۲}}{۲}}\sigma\,du\,.$$

σ حذف می‌شود، وعبارت طرف راست مساوی با(۴) می‌شودکه درآن $z=(x-\mu)/\sigma$ ، یعنی

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\,. \qquad (۵)$$

ازاین فرمول مهم و (۳) به دست می‌آوریم

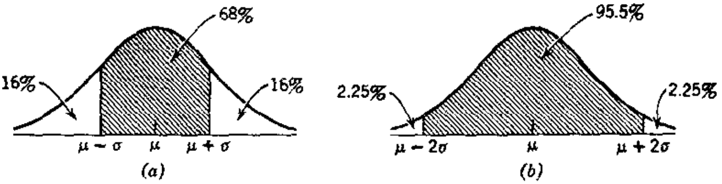
$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\,. \qquad (۶)$$

خصوصاً وقتی $a=\mu-\sigma$ و $b=\mu+\sigma$ ، طرف راست برابر است با $\Phi(۱)-\Phi(-۱)$ ؛ به $a=\mu-۲\sigma$ و $b=\mu+۲\sigma$ مقدار $\Phi(۲)-\Phi(-۲)$ مربوط می‌شود، و قس‌علی‌هذا. با استفاده ازجدول A۸ ، ضمیمهٔ ۴ ، می‌یابیم (شکل ۳۷۸)

(الف) $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx \%۶۸$

(ب) $P(\mu-۲\sigma<X\leqslant\mu+۲\sigma)\approx \%۹۵٫۵$ (۷)

(پ) $P(\mu-۳\sigma<X\leqslant\mu+۳\sigma)\approx \%۹۹٫۷$



شکل ۳۷۸. توصیف فرمول (۷)

از این‌رو می‌توان انتظار داشت که اگر مقادیر مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی نرمال X زیاد باشند به شرح زیر توزیع شوند:

(الف) حدود ۲/۳ مقادیر بین $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$ قرار گیرند.
(ب) حدود ۹۵٪ مقادیر بین $\mu-۲\sigma$ و $\mu+۲\sigma$ قرارگیرند.
(پ) حدود $۹۹\frac{۳}{۴}$٪ مقادیر بین $\mu-۳\sigma$ و $\mu+۳\sigma$ قرار گیرند.

این را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

مقداری که انحراف آن از μ بیشتر از σ باشد در ۳ آزمایش حدوداً یك‌بار روی می‌دهد. مقداری که انحراف آن از μ بیشتر از ۲σ یا ۳σ باشد به ترتیب در هر ۲۰ یا ۴۰۰ آزمایش تقریباً یك بار روی می‌دهد. ازنظر کاربردی مطالب بالا بدین معنی است که همهٔ مقادیر بین $\mu-۳\sigma$ و $\mu+۳\sigma$ واقع می‌شوند؛ این دو عدد را **حدود سه ـ سیگما** می‌نامند.

به طریقی مشابه به دست می‌آوریم

$$P(\mu-۱٫۹۶\sigma<X\leqslant\mu+۱٫۹۶\sigma)=\%۹۵ \qquad \text{(الف)}$$

$$P(\mu-۲٫۵۸\sigma<X\leqslant\mu+۲٫۵۸\sigma)=\%۹۹ \qquad \text{(ب)} \qquad (۸)$$

$$P(\mu-۳٫۲۹۳<X\leqslant\mu+۳٫۲۹\sigma)=\%۹۹٫۹ \qquad \text{(پ)}$$

مثالهای نوعی زیر به‌خواننده کمك می‌کنند تا طرز استفادهٔ عملی ازجدولهای A8 و A9 ضمیمهٔ ۴ را بیاموزد.

مثال ۱

احتمالهای

(الف) $P(X\leqslant ۲٫۴۴)$ ، (ب) $P(X\leqslant -۱٫۱۶)$ ، (پ) $P(X\geqslant ۱)$ ، (ت) $P(۲\leqslant X\leqslant ۱۰)$ راتعیین کنید؛ X متغیرتصادفی نرمال بامیانگین ۰ و واریانس ۱ است.

چون $\mu=۰$ و $\sigma^۲=۱$ ، می‌توان مقادیر مطلوب را مستقیماً از جدول A8 استخراج کرد.

(الف) ۰٫۹۹۲۷ ، (ب) ۰٫۱۲۳۰ ،
(پ) $۱-P(X\leqslant ۱)=۱-۰٫۸۴۱۳=۰٫۱۵۸۷$ [ر.ك. (۶) بخش ۵۰۲۰]،
(ت) $\Phi(۱۰)=۱٫۰۰۰۰$ (چرا؟) ، $\Phi(۲)=۰٫۹۷۷۲$ ،
$\Phi(۱۰)-\Phi(۲)=۰٫۰۲۲۸$.

مثال ۲

احتمالهای خواسته شده درمثال ۱ را ، با فرض‌آنکه X نرمال باشد و میانگین آن ۰٫۸

و واریانسش ۴ باشد، محاسبه کنید.

از(۶) وجدول A۸ به دست می‌آوریم

(الف) $F(۲٫۴۴)=\Phi\left(\frac{۲٫۴۴-۰٫۸۰}{۲}\right)=\Phi(۰٫۸۲)=۰٫۷۹۳۹$

(ب) $F(-۱٫۱۶)=\Phi(-۰٫۹۸)=۰٫۱۶۳۵$

(پ) $۱-P(X\leqslant ۱)=۱-F(۱)=۱-\Phi(۰٫۱)=۰٫۴۶۰۲$

(ت) $F(۱۰)-F(۲)=\Phi(۴٫۶)-\Phi(۰٫۶)=۱-۰٫۷۲۵۷=۰٫۲۷۴۳$

مثال ۳

فرض می‌کنیم X نرمال باشد ومیانگین ۰ و واریانس ۱ داشته باشد. ثابت c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم

(الف) $P(X\geqslant c)=\%۱۰$ (ب) $P(X\leqslant c)=\%۵$

(پ) $P(۰\leqslant X\leqslant c)=\%۴۵$ (ت) $P(-c\leqslant X\leqslant c)=\%۹۹$

ازجدول A۹ ، ضمیمهٔ ۴ به دست می‌آوریم

(الف) $۱-P(X\leqslant c)=۱-\Phi(c)=۰٫۱,\ \Phi(c)=۰٫۹,\ c=۱٫۲۸۲$

(ب) $c=-۱٫۶۴۵$

(پ) $\Phi(c)-\Phi(۰)=\Phi(c)-۰٫۵=۰٫۴۵,\ \Phi(c)=۰٫۹۵,\ c=۱٫۶۴۵$

(ت) $c=۲٫۵۷۶$

مثال ۴

فرض می‌کنیم X نرمال باشد ومیانگین ۲ــ و واریانس ۰٫۲۵ داشته باشد. c راطوری تعیین کنید که داشته باشیم

(الف) $P(X\geqslant c)=۰٫۲$ (ب) $P(-c\leqslant X\leqslant -۱)=۰٫۵$

(پ) $P(-۲-c\leqslant X\leqslant -۲+c)=۰٫۹$

(ت) $P(-۲-c\leqslant X\leqslant -۲+c)=\%۹۹٫۶$

با استفاده ازجدول A۹ ، ضمیمهٔ ۴ نتایج زیرحاصل می‌شود:

(الف) $۱-P(X\leqslant c)=۱-\Phi\left(\frac{c+۲}{۰٫۵}\right)=۰٫۲,$

$$\phi(۲c+۴)=۰٫۸,\ ۲c+۴=۰٫۸۴۲,\ c=-۱٫۵۷۹$$

(ب)
$$\Phi\left(\frac{-۱+۲}{۰٫۵}\right)-\Phi\left(\frac{-c+۲}{۰٫۵}\right)=۰٫۹۷۷۲-\Phi(۴-۲c)=۰٫۵,$$

$$\Phi(۴-۲c)=۰٫۴۷۷۲,\ ۴-۲c=-۰٫۰۵۷,\ c=۲٫۰۳$$

(پ)
$$\Phi\left(\frac{-۲+c+۲}{۰٫۵}\right)-\Phi\left(\frac{-۲-c+۲}{۰٫۵}\right)$$

$$=\Phi(۲c)-\Phi(-۲c)=۰٫۹,\ ۲c=۱٫۶۴۵,\ c=۰٫۸۲۳$$

(ت)
$$\Phi(۲c)-\Phi(-۲c)=\%۹۹٫۶,\ ۲c=۲٫۸۷۸,\ c=۱٫۴۳۹$$

مثال ۵

فرض کنید درتولید ورقه‌های آهنی لازم باشد که ورقه‌ها دارای ضخامت معینی باشند، وکار تولید باماشین صورت گیرد. به طورکلی محصولات صنعتی تفاوت کمی باهم دارند، زیرا خواص مادهٔ اولیه وطرزکار ماشینها وابزار مورد استفاده به‌دلیل اختلافات کوچکی که قابل پیش بینی نیست، تغییرات تصادفی اندکی‌دارند. بنابراین، X [میلی‌متر]، ضخامت‌ورقه‌ها، را می‌توانیم متغیر تصادفی بگیریم. فرض می کنیم به‌ازای حالت معینی متغیرتصادفی X نرمال، بامیانگین $\mu=۱۰$ میلی‌متروانحراف معیار $\sigma=۰٫۰۲$ میلی‌متر، باشد. می‌خواهیم درصد ورقه‌هایی راکه انتظارمی‌رود معیوب باشند تعیین کنیم، اگر ورقهٔ معیوب ورقه‌ای باشدکه (الف) ضخامتش کمتر از ۹٫۹۷ میلی‌متر باشد، (ب) ضخامتش بیشتر از ۱۰٫۰۵ میلی‌متر باشد (پ) ضخامتش به‌ازای هر ۱۰ میلی‌متر بیش‌از ۰٫۰۳ میلی‌مترانحراف داشته باشد. (ت) اعداد $۱۰-c$ و $۱۰+c$ را چطور انتخاب کنیم تا درصد مورد انتظار ورقه‌های معیوب بیش‌از ۵٪ نباشد؟ (ث) درصد ورقه‌های معیوبی که درقسمت (ج)تعریف شده‌اند اگر μ از ۱۰ میلی‌متر به ۱۰٫۰۱ میلی‌متر تبدیل شود چگونه تغییرخواهندکرد؟

بااستفاده ازجدول A۸، ضمیمهٔ ۴، و (۶)، جوابهای زیرحاصل می‌شوند.

(الف)
$$P(X\leqslant ۹٫۹۷)=\Phi\left(\frac{۹٫۹۷-۱۰٫۰۰}{۰٫۰۲}\right)$$

$$=\Phi(-۱٫۵)=۰٫۰۶۶۸\approx\%۶٫۷$$

(ب)
$$P(X\geqslant ۱۰٫۰۵)=۱-P(X\leqslant ۱۰٫۰۵)=۱-\Phi\left(\frac{۱۰٫۰۵-۱۰٫۰۰}{۰٫۰۲}\right)$$

$$=۱-\Phi(۲٫۵)=۱-۰٫۹۹۳۸\approx\%۰٫۶$$

(پ)
$$P(۹٫۹۷\leqslant X<۱۰٫۰۳)=\Phi\left(\frac{۱۰٫۰۳-۱۰٫۰۰}{۰٫۰۲}\right)-$$

$$\Phi\left(\frac{۹٫۹۷-۱۰٫۰۰}{۰٫۰۲}\right)=\Phi(۱٫۵)-\Phi(-۱٫۵)=۰٫۸۶۶۴$$

جواب: $۱-۰٫۸۶۶۴\approx \%۱۳$

(ت) از (۸ الف) به دست می‌آوریم $c=۱٫۹۶\sigma=۰٫۰۳۹$

جواب: ۹٫۹۶۱ میلی‌متر و ۱۰٫۰۳۹ میلی‌متر

(ث) $P(۹٫۹۶۱\leqslant X\leqslant ۱۰٫۰۳۹)=$

$$\Phi\left(\frac{۱۰٫۰۳۹-۱۰٫۰۱۰}{۰٫۰۲}\right)-\Phi\left(\frac{۹٫۹۶۱-۱۰٫۰۱۰}{۰٫۰۲}\right)$$

$$=\Phi(۱٫۴۵)-\Phi(-۲٫۴۵)=۰٫۹۲۶۵-۰٫۰۰۷۱\approx \%۹۲$$

جواب: ٪۸

مشاهده می‌کنیم که این تغییر اندك سبب افزایش قابل ملاحظه در درصد ورقه‌های معیوب می‌گردد. ▲

دراثر تبدیل خطی، یك متغیر تصادفی نرمال بــه متغیر تصادفی نرمال دیگری تبدیل می‌شود. در واقع، با استفاده از (۵)، خواننده می‌تواند قضیهٔ زیررا ثابت کند.

قضیهٔ ۱

اگر X نرمال، بامیانگین μ و واریانس $\sigma^۲$، باشد، آنگاه $X^*=c_۱X+c_۲$ $(c_۱\neq ۰)$ نرمال، با میانگین $\mu^*=c_۱\mu+c_۲$ و واریانس $\sigma^{*۲}=c_۱^۲\sigma^۲$، است.

وقتی n آنقدر بزرگ باشد، که محاسبهٔ ضرایب دوجمله‌ای و توانهای موجود در تابع احتمال توزیع دوجمله‌ای،

$$f(x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\qquad (x=۰,\ ۱,\ \dots,\ n)\tag{۹}$$

(ر. ك. بخش ۹.۲۰) بیش ازحد مشکل شود، توزیع نرمال را می‌توان برای تقریب زدن توزیع دوجمله‌ای مورد استفاده قراردارد. در واقع، قضیهٔ مهم زیر برقراراست.

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ حد دموآور و لاپلاس)

به‌ازای n بزرگ داریم

$$f(x)\sim f^*(x)\qquad (x=۰,\ ۱,\ \dots,n)$$

که درآن f با (۹) تعریف شده است ،

$$f^*(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sqrt{npq}}e^{-z^۲/۲},\ z=\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \qquad (۱۰)$$

چگالی‌توزیع‌نرمال ، بامیانگین هر $\mu=np$ و واریانس $\sigma^۲=npq$ (میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای)، است وعلامت $\sim$ (بخوانید **به‌طورمجانبی مساوی است‌با**) بدان‌معنی است که وقتی n به ∞ میل می‌کند نسبت طرفین به ۱ میل کند. به علاوه ، بـه‌ازای هردو عدد صحیح نامنفی a و $b(>a)$ داریم

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=\sum_{x=a}^{b}\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\sim\Phi(\beta)-\Phi(\alpha), \qquad (۱۱)$$

$$\beta=\frac{b-np+۰٫۵}{\sqrt{npq}}\ ،\ \alpha=\frac{a-np-۰٫۵}{\sqrt{npq}}$$

اثبات این قضیه را می‌توان درمرجع [H۴] یافت، ر.ک. ضمیمهٔ ۱. دراین اثبات نشان‌داده می‌شود که جملهٔ ۰٫۵ در α و β ، تصحیحی است که به‌خاطر استفاده ازتوزیع پیوسته به‌جای توزیع گسسته وارد شده است.

مسائل بخش ۲۰٫۱۰

۱. نشان دهید که منحنی (۱) دارای دونقطهٔ عطف باطولهای $x=\mu\pm\sigma$ است.

۲. نشان دهید که $\Phi(-z)=۱-\Phi(z)$.

۳. فرض می‌کنیم X نرمال ، بامیانگین ۱۰ و واریانس ۴ ، باشد. مطلوب است

$P(x>۱۲)$ ، $P(X<۱۰)$ ، $P(X<۱۱)$ ، $P(۹<X<۱۳)$.

۴. فرض‌کنیم X نرمال ، با میانگین ۵۰ و واریانس ۹ ، باشد. c را طوری تعیین‌کنید که داشته باشیم

$P(X<c)=\%۵$ ، $P(X>c)=\%۱$ ، $P(۵۰-c<X<۵۰+c)=\%۵۰$

۵. درمثال ۵ ، قسمت (پ) σ چه مقداری داشته باشد تا درصد ورقه‌های معیوب به ۱٪ تقلیل یابد؟

۶. در قسمت (پ) ، مثال ۵ ، هـرگاه ماشین‌تراش بهتری بـه کار بریم بـه طوری که $\sigma=۰٫۰۱$ میلی‌متر باشد، انتظارچند درصد ورقه‌های معیوب باید داشته باشیم؟

۷. کارخانه‌ای پاکت پست هوایی تولید می‌کنند؛ وزن این پاکتها نرمال، با میانگین $\mu =$ ۱٫۹۵ گرم و انحراف معیار ۰٫۰۵gr $= \sigma$ گرم است. پاکتها در بسته‌های ۱۰۰۰ تایی به فروش می‌رسند. درهر بسته چند پاکت دارای وزنی بیشتر از ۲ گرم خواهند بود؟

۸. درمسئلهٔ ۷، انتظار می‌رود درهر بستهٔ صدتایی چه تعدادی از پاکتها دارای وزن ۲٫۰۵ گرم یا بیشتر باشند؟

۹. سکه‌ای را ۴۰۴۰ بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل ۲۰۴۸ بار شیر بیاید چیست؟ درصورتی که شانس آوردن شیر و خط باهم برابر باشند (ر. ك. جدول 6.20 بخش 5.20).

۱۰. اگر X طول عمر نوعی باتری اتومبیل باشد که به‌طور نرمال، با میانگین ۳ سال و انحراف معیار يك سال، توزیع شده است، و کارخانه‌دار باتریهای تولیدی خودرا ۲ سال تضمین کند؛ چه درصدی از باتریها باید به خاطر این تضمین پس گرفته شود؟

۱۱. مقاومت شکنندگی x [کیلوگرم] ازيك نمونهٔ خاص ازقالبهای پلاستیکی به‌طور نرمال توزیع شده‌است بايك میانگین ۱۰۰۰ کیلوگرم و انحراف معیار ۷۵ گرم. ماکزیمم باری راکه می‌توان انتظار داشت تااینکه بیشتر از ۵٪ قالبها نشکنند چیست؟

۱۲. برای انجام کارمعینی پیچهای به قطر ۰٫۰۰۵ $\pm$ ۰٫۲۶۰ سانتیمتر مورد نیاز است. هرگاه قطر پیچهای ساخته شده توسط کارخانه‌ای به طور نرمال، با ۰٫۲۵۹ $= \mu$ و ۰٫۰۰۳ $= \sigma$، توزیع شده باشد، چند درصد پیچهای ساخته شده قابل استفاده خواهد بود.

۱۳. جواب مسئلهٔ ۱۲ اگر ۰٫۰۰۳ $= \sigma$ به ۰٫۰۳۰ $= \sigma$ افزایش یابد (کیفیت تولید پایین بیاید)، چه تغییری پیدا می‌کند.

۱۴. کارخانه‌داری به تجربه آموخته است که مقاومتهای تولیدی کاخانه‌اش دارای مقاومت نرمال، با میانگین ۱۰۰ $= \mu$ اهم و انحراف معیار ۲ $= \sigma$ اهم است. چه درصدی ازمقاومتها دارای مقاومتی بین ۹۸ اهم و ۱۰۲ اهم خواهد بود؟ چه درصدی از آنها دارای مقاومتی بین ۹۵ اهم و ۱۰۵ اهم خواهد بود؟

۱۵. تولیدکننده‌ای لامپهای تولید شده را دربسته‌های ۱۰۰۰ تایی عرضه می‌کند. بااستفاده از (۱۱)، حساب کنید احتمال آنکه هرکارتن شامل بیش از ۱٪ لامپ معیوب نباشد چقدراست، در صورتی که فرایند تولید يك آزمایش برنویی، ۱٪ $= p$، باشد (p احتمال معیوب بودن هريك ازلامپها است).

۱۶. اگر X نرمال، بامیانگین μ و واریانس σ^2 باشد، $-X$ چه توزیعی خواهدداشت؟

۱۸. با بررسی $\Phi^2(\infty)$ و با استفاده از مختصات قطبی برای محاسبهٔ انتگرال دوگانه،

ثابت کنید.

$$\Phi(\infty)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du=1 \qquad (12)$$

۱۸. با استفاده از (۱۲) و انتگرالگیری به روش جزء به جزء، نشان دهید که در (۱)، σ انحراف معیار توزیع نرمال است.

۱۹. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۲۰. (قانون اعداد بزرگ برنولی) فرض می‌کنیم در یک آزمایش تصادفی پیشامد A دارای احتمال p $(0<p<1)$ باشد، و X تعداد دفعاتی باشد که A در n آزمایش مستقل رخ می‌دهد. نشان دهید که به ازای هر عدد مفروض $\varepsilon>0$

وقتی که $n\to\infty$.
$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\to 1$$

۱۱.۲۰ توزیعهای چند متغیر تصادفی

اگر در یک آزمایش تصادفی فقط به مشاهدهٔ یک کمیت بپردازیم، باید به آن آزمایش یک متغیر تصادفی، مانند X، وابسته کنیم. از بخش ۷.۲۰ به‌یاد داریم که تابع توزیع متناظر با X، یعنی $F(x)=P(X\leqslant x)$، توزیع را کاملا مشخص می‌کند، زیرا به ازای هر فاصله $a<X\leqslant b$،

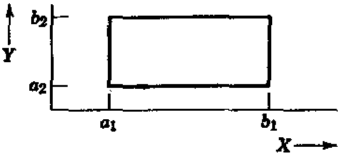
$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a).$$

هرگاه در یک آزمایش تصادفی به مشاهدهٔ دو کمیت بپردازیم، باید به آزمایش دو متغیر تصادفی، مانند X و Y، وابسته کنیم. مثلا، X می‌تواند متناظر با سختی راکولی فولاد و Y متناظر با کربن موجود در آن باشد. نتیجهٔ هر آزمایش دو عدد $X=x$، $Y=y$، یا اجمالا (x, y) را به دست می‌دهد، که می‌تواند به صورت نقطه‌ای در صفحهٔ XY تصویر شود. حال مستطیل $a_1<X\leqslant b_1$، $a_2<Y\leqslant b_2$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷۹). هرگاه احتمال متناظر با چنین مستطیلی را بدانیم،

$$P(a_1<X\leqslant b_1,\ a_2<Y\leqslant b_2),$$

آنگاه گوییم **توزیع احتمال دوبعدی** متغیرهای تصادفی X و Y یا **متغیر تصادفی دوبعدی** (X, Y) مشخص شده است. تابع

$$F(x,y)=P(X\leqslant x, Y\leqslant y), \qquad (1)$$



شکل ۳۷۹. تصور توزیع دوبعدی

تابع توزیع توزیع نامبرده یا تابع توزیع (X, Y) نامیده می‌شود. این تابع، توزیع را به طور یکتا مشخص می‌کند، زیرا (د. ك. مسئلهٔ ۱)

$$P(a_1<X\leqslant b_1,\ a_2<Y\leqslant b_2) = F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2). \tag{۲}$$

توزیع دوبعدی و متغیر (X, Y) **گسسته** هستند هرگاه، (X, Y) دارای خواص زیر باشد:

(X, Y) تنها تعدادی متناهی یا نامتناهی شمارش پذیر از مقادیر (x, y) اختیار کند واحتمالهای نظیر آنها مثبت باشند. به هرحوزه کراندار[1] که شامل چنین زوجهایی نباشد احتمال ۰ مربوط شود.

فرض کنیم (x_i, y_j) یکی از این جفتها بوده و داشته باشیم

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$$

(p_{ij} می‌تواند به ازای زوجهای معینی از i و j صفر باشد). تابع

$$f(x,\ y)=\begin{cases} p_{ij} & x=x_i \text{ و } y=y_j \\ ۰ & \text{درجاهای دیگر} \end{cases} \tag{۳}$$

تابع احتمال (X, Y) نامیده می‌شود؛ دراینجا $i=۱, ۲, \ldots$ و $j=۱, ۲, \ldots$ به‌طور مستقل مقادیر خود را اختیار می‌کنند. مشابه با (۷)، بخش ۷.۲۵، تابع توزیع چنین می‌شود:

$$F(x,\ y)=\sum_{x_i\leqslant x}\ \sum_{y_j\leqslant y} f(x_i,\ y_j), \tag{۴}$$

و به جای فرمول (۳) ازبخش ۷.۲۵ شرط زیر را خواهیم داشت:

$$\sum_i \sum_j f(x_i,\ y_j)=۱ \tag{۵}$$

---

۱. یعنی حوزه‌ای که بتوان آن را داخل دایره‌ای با شعاع به اندازهٔ کافی بزرگ جا داد.

مثلا، هرگاه یك سکهٔ ده‌ریالی ویك سکهٔ ۵ریالی را یك بارپرتاب‌کنیم ومتغیرهای تصادفی

$X=$ تعداد شیرهایی که با سکهٔ ۱۰ ریالی می‌آید،

$Y=$ تعداد شیرهایی که با سکهٔ ۵ ریالی می‌آید،

را درنظر بگیریم، آنگاه X و Y می‌توانند یکی از دومقدار ۰ یا ۱ را اختیارکنند وتابع احتمال چنین می‌شود:

$$f(0,0)=f=(1,0)=f(0,1)=f(1,1)=\frac{1}{4}$$

و به ازای سایرمقادیر $f(x,\ y)=0$.

$(X,\ Y)$ وتوزیع آن را **پیوسته** می‌نامند هرگاه، تابع توزیع $F(x,y)$ را بتوان با انتگرال دوگانهٔ

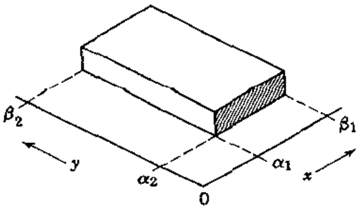
$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x^*,\ y^*)\,dx^*dy^* \tag{6}$$

نمایش داد، که درآن $f(x,\ y)$ درسراسر صفحه، احتمالا جزروی تعدادی متناهی منحنی مشتقپذیر بـا مشتق پیوسته، تعریف شده، نامنفی وکرانداراست. $f(x,\ y)$ را **چگالی احتمال** توزیع می‌نامند. نتیجه می‌شود

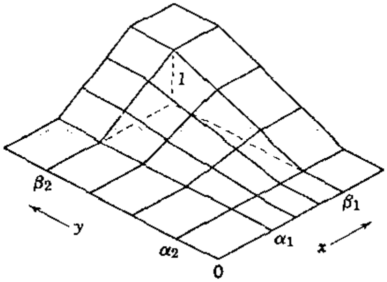
$$P(a_1<X\leqslant b_1,\ a_2<Y\leqslant b_2)=\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,\ y)\,dx\,dy. \tag{7}$$

مثلا (ر. ك. شکل ۳۸۰)

$$f(x,\ y)=\begin{cases}1/k & \text{وقتی } (x,\ y) \text{ درناحیهٔ } R \text{ باشد}\\ 0 & \text{درجاهای دیگر}\end{cases} \tag{8}$$



شکل ۳۸۰. تابع چگالی احتمـال توزیع یکنواخت (رابطهٔ شمارهٔ (۸))



شکل ۳۸۱. تابع توزیع یکنواخت ارائه شده با (۸)

توزیع یکنواخت در مستطیل R نامیده می‌شود؛ دراینجا k، مساحت R است، یعنی $k=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)$. تابع توزیع درشکل ۳۸۱ نشان داده شده است.

درمورد متغیر تصادفی گسسته (X, Y) با تابع احتمال $f(x, y)$، ممکن است بخواهیم به محاسبهٔ احتمال وقتی‌که X مقدار x، و Y هرمقدار دلخواهی را اختیارکند، یعنی به محاسبهٔ $P(X=x$ ، دلخواه $Y)$ بپردازیم. این احتمال تابعی مانند $f_1(x)$، از x، خواهد بود، و داریم

$$f_1(x)=P(X=x, \text{دلخواه } Y)=\sum_y f(x, y) \tag{۹}$$

که درآن جمع روی همهٔ مقادیر $f(x, y)$ که به ازای این مقدار x صفرنیستند صورت می‌گیرد. واضح است‌که $f_1(x)$ تابع احتمال توزیع احتمال یك متغیر تصادفی تنها است. این توزیع را **توزیع حاشیه‌ای** X نسبت به توزیع دو بعدی مفروض می‌نامند. این توزیع دارای تابع توزیع

$$F_1(x)=P(X\leqslant x, \text{دلخواه } Y)=\sum_{x^*\leqslant x} f_1(x^*) \tag{۱۰}$$

است. همین طور، تابع احتمال

$$f_2(y)=P(\text{دلخواه } X, Y=y)=\sum_x f(x, y) \tag{۱۱}$$

توزیع حاشیه‌ای Y نسبت به توزیع دو بعدی مفروض نامیده می‌شود. در (۱۱) جمع روی همهٔ مقادیر $f(x, y)$ که به‌ازای مقدار متناظر y صفرنیستند صورت می گیرد. تابع توزیع این توزیع عبارت است از

$$F_2(y)=P(\text{دلخواه } X, Y\leqslant y)=\sum_{y^*\leqslant y} f_2(y^*). \tag{۱۲}$$

واضح است که هردو توزیع حاشیه‌ای یك متغیر تصادفی گسستهٔ (X, Y) گسسته هستند.

جـدول ۷.۲۰ شامل مثالی است که مطلب را روشن می کند. X تعداد «۱۲»، و Y تعداد «۱۳» یا «۱» دراستخراج ۳ کارت*، باجایگذاری، ازیك دسته‌کارت ۵۲تایی است. چون از ۵۲ کارت ۴کارت ۱۲، ۴ کارت ۱۳ و ۴ کارت ۱ است. احتمال به دست آوردن یك ۱۲ در استخراج یك کارت برابر $۴/۵۲ = ۱/۱۳$ و احتمال استخراج یك ۱۳ یا یك ۱ برابر$۸/۵۲ = ۲/۱۳$ است. پس به‌این آزمایش‌تصادفی تابع احتمال

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{۳!}{x!y!(۳-x-y)!}\left(\dfrac{۱}{۱۳}\right)^{x}\left(\dfrac{۲}{۱۳}\right)^{y}\left(\dfrac{۱۰}{۱۳}\right)^{۳-x-y} & \text{به‌ازای } x+y\leqslant ۳ \\ ۰ & \text{به‌ازای سایرمقادیر} \end{cases}$$

نظیرمی‌شود. جدول ۷.۲۰ مقادیر $f(x, y)$، $f_1(x)$ و $f_2(y)$ را نشان می‌دهد.

همین طور، درمورد متغیرتصادفی پیوستهٔ (X, Y) با چگالی $f(x, y)$،

$$(X\leqslant x, -\infty < Y < \infty) \quad \text{یا} \quad (X\leqslant x \text{، } Y \text{ دلخواه})$$

را می‌توان مورد بررسی قرارداد واضح است که احتمال متناظر با این‌متغیرعبارت است از

$$F_1(x)=P(X\leqslant x, -\infty < Y < \infty)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*,y)\,dy\right)dx^*$$

جدول ۷.۲۰

مقادیر توابع‌احتمال $f(x, y)$، $f(x)$ و $f(y)$ دراستخراج ۳ کارت، باجایگذاری، ازیك دسته‌کارت، X تعداد ۱۲، و Y تعداد ۱۳ یا ۱کشیده شده است.

x \ y	۰	۱	۲	۳	$f_1(x)$
۰	۱۰۰۰/۲۱۹۷	۶۰۰/۲۱۹۷	۱۲۰/۲۱۹۷	۸/۲۱۹۷	۱۷۲۸/۲۱۹۷
۱	۳۰۰/۲۱۹۷	۱۲۰/۲۱۹۷	۱۲/۲۱۹۷	۰	۴۳۲/۲۱۹۷
۲	۳۰/۲۱۹۷	۶/۲۱۹۷	۰	۰	۳۶/۲۱۹۷
۳	۱/۲۱۹۷	۰	۰	۰	۱/۲۱۹۷
$f_2(y)$	۱۳۳۱/۲۱۹۷	۷۲۶/۲۱۹۷	۱۳۲/۲۱۹۷	۸/۲۱۹۷	

* منظور از یـك دسته‌کارت، مجموعـه‌ای از ۵۲ کارت سفید رنگ کامـلا مشابه است کـه روی سیزده‌تای آنها از ۱ تا ۱۳ به‌رنگ سیاه، روی سیزده‌تای دوم از ۱ تا ۱۳ به‌رنگ‌قرمز، روی سیزده‌تای سوم از ۱ تا ۱۳ به رنگ سبز روی سیزده‌تای‌آخر، از ۱ تا ۱۳ به‌رنگ‌آبی شماره‌گذاری شده است. ـ م.

با قراردادن

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy \tag{۱۳}$$

می‌توان نوشت

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x} f_1(x^*)\,dx^*. \tag{۱۴}$$

$f_1(x)$ چگالی و $F_1(x)$ تابع توزیع **توزیع حاشیه‌ای** X نسبت به‌توزیع پیوستهٔ مفروض نامیده می‌شود. تابع

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \tag{۱۵}$$

چگالی و

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{y} f_2(y^*)\,dy^*=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y^*)\,dx\,dy^* \tag{۱۶}$$

تابع توزیع **توزیع حاشیه‌ای** Y نسبت به توزیع دوبعدی مفروض نامیده می‌شود. می‌بینیم که هردو توزیع حاشیه‌ای یك توزیع پیوسته هستند.

X و Y ، متغیرهای تصادفی توزیع دوبعدی (X, Y) ، با تابع توزیع $F(x, y)$، **مستقل** نامیده می‌شوند هر گاه تساوی

$$F(x, y)=F_1(x)F_2(y) \tag{۱۷}$$

به ازای هر (x, y) برقرار باشد. درغیراین صورت دومتغیر **وابسته** هستند.

فرض می‌کنیم X و Y هردو گسسته یا هر دو پیوسته باشند. آنگاه X و Y مستقل هستندا گروتنها اگرتوابع احتمال متناظر باآنها یاچگالیهای $f_1(x)$ و $f_2(x)$ به‌ازای هر مقدار (x, y) درتساوی

$$f(x,y)=f_1(x)\,f_2(y) \tag{۱۸}$$

صدق کنند، ر.ك. مسئلهٔ ۲. مثلا، متغیرها درجدول ۷.۲۰ وابسته هستند. متغیرهای X = تعداد شیرها در پرتاب یك سکهٔ ده ریالی Y = تعداد شیرها در پرتاب یك سکهٔ ۵ ریالی در پرتاب یك سکه ده ریالی ویك سکه ۵ ریالی مقادیر ۰ یا ۱ را اختیار می‌کنند ومستقل هستند.

مفاهیم استقلال و وابستگی را می‌توان به n متغیرتصادفی توزیع n بعدی $(X_1, \cdots, X_n)$ ، با تابع توزیع

$$F(x_1, \cdots, x_n)=P(X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n),$$

تعمیم داد. این متغیرهای تصادفی **مستقل** نامیده می‌شوند هرگاه به‌ازای هر $(x_1,\ldots,x_k)$

$$F(x_1, \cdots, x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n), \tag{۱۹}$$

که درآن $F_j(x_j)$ تابع توزیع حاشیه‌ای X_j است، یعنی

$$F_j(x_j)=P(X_j\leqslant x_j,\quad \text{دلخواه}\quad X_k,\ k\neq j)$$

درغیراین صورت، این متغیرهای تصادفی را **وابسته** می‌نامند.

فرض می‌کنیم (X, Y) یك متغیرتصادفی با تابع احتمال یا چگالی $f(x, y)$ و تابع توزیع $F(x, y)$ باشد، و $g(x, y)$ تابع پیوستهٔ دلخواهی باشد که به ازای هر (x, y) تعریف شده‌است و ثابت نیست. آنگاه $Z=g(X, Y)$ نیز یك متغیرتصادفی‌است. مثلا هرگاه دوتاس را پرتاب‌کنیم و X عدد مربوط به تاس اول و Y عدد مربوط به تاس دوم باشد، آنگاه $Z=X+Y$ مجموع آن دوعدد است (ر.ك. شکل ۳۷۱، بخش ۷.۲۰).

هرگاه $(X_1, \ldots, X_n)$ یك متغیرتصادفی n بعدی باشد و $g(x_1, \ldots, x_n)$ تابع پیوسته‌ای باشد که به ازای هر $(x_1, \ldots, x_n)$ تعریف شده است وثابت نیست، آنگاه $Z=g(X_1, \ldots, X_n)$ نیزیك متغیرتصادفی است.

درحالتی‌که (X,Y) یك متغیرتصادفی گسسته باشد می‌توان، $f(z)$، تابع احتمال $Z=g(X, Y)$ رابا جمع‌کردن همهٔ $f(x, y)$هایی کـه به ازای آنها $g(x, y)$ برابر مقدار z موردنظراست به دست آورد؛ بنابراین

$$f(z)=P(Z=z)=\sum_{g(x,y)=z}\sum f(x, y)\,. \tag{۲۰}$$

تابع توزیع Z عبارت است از

$$F(z)=P(Z\leqslant z)=\sum_{g(x,y)\leqslant z}\sum f(x, y), \tag{۲۱}$$

که درآن همهٔ مقادیر $f(x, y)$ راکه به‌ازای آنها $g(x, y)\leqslant z$، باهم جمع می‌کنیم.

به همین نحو درمورد متغیرتصادفی پیوستهٔ (X, Y) داریم

$$F(z)=P(Z\leqslant z)=\iint_{g(x,y)\leqslant z} f(x, y)\,dx\,dy \tag{۲۲}$$

که درآن به ازای هر z، برروی ناحیهٔ $g(x, y)\leqslant z$ درصفحهٔ xy انتگرال می‌گیریم.

عدد

$$E(g(X, Y))=\begin{cases}\sum_x\sum_y g(x, y)\, f(x, y) & [\text{گسسته } (X, Y)]\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy & [\text{پیوسته } (X, Y)]\end{cases} \tag{۲۳}$$

امید ریاضی یا اجمالا **امید** $g(X, Y)$ نامیـده می‌شود. دراینجا فرض می‌شودکـه سری دوگانه مطلقاً همگراست وانتگرال $|g(x,y)|f(x,y)$ برصفحهٔ xy وجود دارد. فرمول

$$(۲۴)\quad E(ag(X, Y)+bh(X, Y))=aE(g(X, Y))+bE(h(X, Y))$$

را می‌توان به‌روشی مشابه‌آنچه درمسئلهٔ ۱۹، بخش ۸.۲۰، مورد استفاده قرار گرفت ثابت کرد. یك مورد خاص مهم عبارت است از $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$، و با استقرا نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۱ (جمع میانگینها)

میانگین (امید) مجموع متغیرهای تصادفی با مجموع میانگینها (امیدها) برابر است، یعنی

$$(۲۵)\quad E(X_۱+X_۲+\cdots+X_n)=E(X_۱)+E(X_۲)+\cdots+E(X_n).$$

به‌علاوه، به‌آسانی به‌دست می‌آوریم

قضیهٔ ۲ (ضرب میانگینها)

میانگین (امید) حاصلضرب متغیرهای تصادفی **مستقل** با حاصلضرب میانگینها (امیدها) برابر است، یعنی

$$(۲۶)\qquad E(X_۱X_۲\cdots X_n)=E(X_۱)E(X_۲)\cdots E(X_n)$$

اثبات. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند (هردو گسسته یا هردو پیوسته)، آنگاه $E(XY)=E(X)E(Y)$. در واقع، درحالت گسسته داریم

$$E(XY)=\sum_x\sum_y xyf(x, y)=\sum_x xf_۱(x)\sum_y yf_۲(y)=E(X)E(Y),$$

و درمورد متغیرهای تصادفی پیوسته رابطه به همین شکل است. ازتعمیم این رابطه به n متغیر تصادفی مستقل، (۲۶) حاصل می‌شود، وقضیهٔ ۲ به اثبات می‌رسد. ▲

اکنون جمع واریانسها را مورد بحث قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم $Z=X+Y$، و μ و $\sigma^۲$ میانگین و واریانس Z باشند. نخست داریم (ر. ك. مسئلهٔ ۱۶، بخش ۸.۲۰)

$$\sigma^۲=E([Z-\mu]^۲)=E(Z^۲)-[E(Z)]^۲$$

از (۲۴) نتیجه می‌شود که جملهٔ اول طرف راست برابراست با

$$E(Z^۲)=E(X^۲+۲XY+Y^۲)=E(X^۲)+۲E(XY)+E(Y^۲),$$

وبرای جملهٔ دوم طرف راست، ازقضیهٔ ۱ به دست می‌آوریم

$$[E(Z)]^۲=[E(X)+E(Y)]^۲=[E(X)]^۲+۲E(X)E(Y)+[E(Y)]^۲.$$

باجایگزین کردن این عبارات در فرمول $\sigma^۲$ داریم

$$\sigma^۲=E(X^۲)-[E(X)]^۲+E(Y^۲)-[E(Y)]^۲$$
$$+۲[E(XY)-E(X)E(Y)].$$

از مسئلهٔ ۱۶، بخش ۸.۲۰، مشاهده می‌کنیم کـه عبارت سمت راست سطر اول مجموع واریانسهای X و Y است که به‌ترتیب با σ_1^2 و σ_2^2 نمایش داده می‌شوند. کمیت

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{۲۷}$$

کوواریانس X و Y نامیده می‌شود. درنتیجه داریم

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY}. \tag{۲۸}$$

اگر X و Y مستقل باشند، آنگاه $E(XY) = E(X)E(Y)$؛ درنتیجه $\sigma_{XY} = 0$، و

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{۲۹}$$

با تعمیم این قضیه برای بیش از دومتغیر، نتیجه می‌گیریم

قضیهٔ ۳ (جمع واریانسها)

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی **مستقل** با مجموع واریانسهای این متغیرها برابراست.

مسائل بخش ۱۱.۲۰

۱. (۲) را ثابت کنید.

۲. حکمی را که رابطهٔ (۱۸) را دربردارد ثابت کنید.

۳. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1 \\ 0 & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}$$

نمودار f وتابع توزیع مربوط به‌آن را رسم کنید.

۴. توزیعهای حاشیه‌ای توزیع مربوط به‌شکل ۳۸۰ و ۳۸۱ را بیابید.

۵. دستگاهی تشکیل شده از چهار چرخ دنده که بامیله به‌هم وصل شده‌اند. میانگین ضخامت چرخ دنده‌ها ۵٫۰۲۰ سانتیمتر وانحراف معیارآنها ۰٫۰۰۳ است. میانگین میله‌ها ۰٫۰۴۰ سانتیمتر وانحراف معیارآنها ۰٫۰۰۲ است. مطلوب است میانگین و انحراف معیاردستگاهی مرکب‌از۴ چرخ‌دنده و ۳میله که به‌تصادف انتخاب شده‌اند.

۶. فرض می‌کنیم X [سانتیمتر] و Y [سانتیمتر] به‌ترتیب قطرهای یك پین‌وحفره باشند. گیریم (X, Y) دارای چگالی

$$f(x, y)=\begin{cases} ۲۵۰۰ & ۰٫۹۹ < x < ۱٫۰۱ \text{ و } ۱٫۰۰ < y < ۱٫۰۲ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. (الف) توزیعهای حاشیه‌ای را پیدا کنید. (ب) احتمال آنکه پینی که به‌تصادف انتخاب می‌شود مناسب حفره‌ای به‌قطر ۱٫۰۰ باشد چقدر است؟

۷. مطلوب است $P(X > Y)$ درصورتی که (X, Y) دارای چگالی

$$f(x, y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geqslant ۰,\ y \geqslant ۰ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد.

۸. مطلوب است چگالیهای توزیعهای حاشیه‌ای مربوط به مسئلهٔ ۷.

۹. یك وسیلهٔ الکتریکی از دوقسمت تشکیل شده‌است. گیریم X و Y [برحسب ماه] مدت زمانهایی باشندکه پس ازطی آنها به‌ترتیب جزء اول وجزء دوم خراب می‌شوند. فرض می‌کنیم (X, Y) دارای چگالی احتمال

$$f(x, y)=\begin{cases} ۰٫۰۱e^{-۰٫۱(x+y)} & x > ۰,\ y > ۰ \\ ۰ & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. (الف) X و Y وابسته هستند یامستقل؟ (ب) مطلوب است چگالیهای توزیعهای حاشیه‌ای. (ج) احتمال آنکه جزء اول دارای طول عمری برابر ۱۰ ماه یا بیشتر باشد چقدر است؟

۱۰. فرض می‌کنیم (X, Y) دارای تابع احتمال $f(۰, ۰)=f(۱, ۱)=۳/۸$، $f(۰, ۱)=f(۱, ۰)=۱/۸$ است. آیا X و Y مستقل هستند؟

۱۱. مثالی از دوتوزیع گسستهٔ مختلف ارائه دهیدکه دارای توزیعهای حاشیه‌ای یکسان باشند.

۱۲. نشان دهید دو متغیر تصادفی که دارای چگالیهای $f(x, y)=x+y$ و $g(x, y)=(x+۱/۲)(y+۱/۲)$ وقتی که $۰ \leqslant x \leqslant ۱$، $۰ \leqslant y \leqslant ۱$ هستند، توزیعهای حاشیه‌ای یکسان دارند.

۱۳. فرض می‌کنیم $(\bar{X}, \bar{Y})$ دارای چگالی

$$f(x, y)=\begin{cases} k & x^۲+y^۲ < ۱ \\ ۰ & \text{درجاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. k را مشخص کنید. چگالیهای توزیعهای حاشیه‌ای را پیدا کنید. مطلوب‌است $P(X^۲+Y^۲<۱/۲)$.

۱۴. با استفاده ازقضیهٔ ۱، فرمولی برای μ، میانگین توزیع دوجمله‌ای، به دست آورید.

۱۵. با استفاده ازقضیهٔ ۳، فرمولی برای $\sigma^۲$، واریانس توزیع دوجمله‌ای، به‌دست‌آورید.

۱۲.۲۰ نمونه‌گیری تصادفی. اعداد تصادفی

بخشهای قبل (۳.۲۰ تا ۱۱.۲۰) به نظریهٔ احتمال اختصاص داشتند وبخشهای باقیمانده (۱۲.۲۰ تا ۲۰.۲۰) به بحث درمورد آمار اختصاص یافته‌اند. نظریهٔ احتمال به آفریدن مدلهای ریاضی برای جامعه کمك می کند، و روشهای آماریی که موردبحث قرارمی گیرند روابطی بین مطالب نظری و واقعیتهای قابل مشاهده، نتایجی کــه درمورد جامعه از طریق مطالعهٔ نمونه‌ها گرفته می‌شود (استنباط آماری؛ ر. ك. بخش ۱.۲۰)، به‌دست می‌دهند.

تــا اینجــا دانستن اینکه نمونــه‌ای از یــك جــامعه انتخــابی از جــامعه است (مثلا بخش ۱.۲۰ را ببینید) کافی بود، اما اکنون دیگر باید این مفهوم را به شکل دقیقی تعریف کنیم. در واقع، برای آنکه درمورد جامعه‌ای ازنمونه‌ها اطلاعات با معنی به دست آوریم لازم است که هرنمونه یك **انتخاب تصادفی** باشد؛ یعنی هرعضو جامعه باید احتمال معینی برای وارد شدن درنمونه داشته باشد. این شرط باید (لااقل تقریباً) برقرار باشد درغیر این صورت روشهای موردبحث ممکن است به نتایجی‌کاملا بی‌معنی وگــمراه کننده منجرشوند.

اگرفضای نمونه نامتناهی باشد، مقادیــر نمونه **مستقل** خواهند بود، یعنی نتایج n اجرای یك آزمایش تصادفی‌که برای به‌دست آوردن n مقدار نمونه انجام می‌شوند روی هم تأثیری نخواهند داشت. البته این موضوع درمورد نمونه‌هایی کــه ازیك جامعهٔ نرمال انتخاب می‌شوند درست است. اگرفضای نمونه متناهی باشد، درصورتی‌کــه نمونه‌گیری باجایگذاری باشد، بازهم مقادیر نمونه مستقل خواهند بود؛ عملا هرگاه بدون جایگذاری نمونه‌گیری کنیم و حجم نمونه را نسبت به حجم جامعه ناچیز بگیریم (مثلا نمونه‌هــای ۵ یا ۱۰ مقداری ازجامعهٔ ۱۰۰۰ مقداری) مقادیر نمونه عملا مستقل خــواهند بود. درهر صورت، اگربدون جایگذاری نمونه‌گیری‌کنیم و نمونه‌های بزرگی از یك جامعهٔ متناهی انتخاب‌کنیم، درچنین حالتی است‌که وابستگی پیش می‌آید.

فراهم آوردن شرایط لازم برای آنکه نمونه‌ای انتخاب تصادفــی باشدکار ساده‌ای نیست، زیراعوامل ظریف بسیاری از انواع گوناگون‌وجود دارندکه می‌توانند درنتایج نمونه‌گیری تأثیر بگذارند. مثلا، هرگاه خریداری بخواهد قبل از خرید کالایی نمونه‌ای ۱۰تایی ازیك بستهٔ ۸۰تایی انتخاب وبررسی‌کند، درعمل این ۱۰ کالا را چگونه انتخاب کند تــا مطمئن باشدکــه تمام $\binom{۸۰}{۱۰}$ نمونه‌ای که او می‌تواند انتخاب‌کند دارای‌احتمالات برابر باشند؟

برای حل این مسئله روشهایی به‌وجود آمده است، وما اکنون به‌تشریح یکی از آنها که‌کاربرد زیاد دارد می‌پردازیم.

کالاها را از ۱ تا ۸۰ شماره‌گذاری می‌کنیم. آنگاه با استفاده ازجدول A۱۰، ضمیمهٔ ۴، که شامل اعداد تصادفی ساخته شده ازمجموعه‌های **ارقام تصادفی** است، ۱۰ تا ازآنها را به‌شرح زیر جدا می‌کنیم. ابتدا عددی بین ۰ تا ۹۹ به عنوان شمارهٔ سطر به تصادف انتخاب می‌کنیم. برای این منظور می‌توان سکه‌ای را ۷ بارپرتاب‌کرد و با شیر ۰ وبا خط ۱ را متناظر قرارداد، بدین طریق عددی ۷ رقمی درمبنای ۲ به‌دست می‌آیدکه یکی ازاعداد ۰، ۱، ...، ۱۲۷ را نمایش می‌دهد واحتمال به‌دست آمدن این اعداد باهم برابر است. اگر این عدد ۰، ۱، ...، ۹۹ باشد آن رامورد استفاده قرارمی‌دهیم و درغیر این صورت‌کنارش‌گذاشته پرتاب سکه را تکرارمی‌کنیم. سپس برای شمارهٔ ستون عددی بین ۰ و ۹ بانوشتن عددی ۴ رقمی درمبنای ۲ به روشی مشابه انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم به‌ترتیب اعداد (۲۶ =)۰۰۱۱۰۱۰ و (۷ =)۰۱۱۱ رابه‌دست‌آورده‌ایم. درسطر ۲۶ وستون ۷ جدول A۱۰ مقدار ۴۴۹۷۳ را می‌یابیم. دو رقم اول، یعنی ۴۴، را نگه می‌داریم. حالا از ۴۴۹۷۳ شروع کرده، به‌طرف پایین ستون حرکت می‌کنیم؛ از هرعدد تنها دورقم اول را نگه می‌داریم، بدین طریق خواهیم داشت

۴۴ ۴۴ ۸۳ ۹۱ ۵۵ وغیره.

اعداد بزرگتر از ۸۰ واعدادی راکه برای دومین بار پیش می‌آیند حذف می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا ۱۰ عدد به‌شرح زیرحاصل شود:

۴۴ ۵۵ ۵۳ ۰۳ ۵۲ ۶۱ ۶۷ ۷۸ ۳۹ ۵۴.

ده‌کالایی که این ده شماره را دارند انتخاب موردنظر را تشکیل می‌دهند.

جدول بزرگتری از ارقام تصادفی درمرجع [۱۵]]، ضمیمهٔ ۱، معرفی شده است. درهرصورت، ممکن‌است‌درمورد نمونه‌های بزرگتر استفاده‌ازچنین جدولهایی‌ملال‌آورباشد که می‌توان آنها را تحت عنوان **مولد اعداد تصادفی** دربسیاری ازمخازن در زبانهای کامپیوتری و زیر برنامه‌ها یافت. به‌مراجع [H۷] و [H۱۱]، از ضمیمه ۱، مراجعه شود.

مسائل بخش ۱۲.۲۰

۱. فرض‌کنید درمثال متن ازسطر ۸۳ وستون ۲ی جدول A۱۰، ضمیمهٔ ۴، شروع کنیم، و به طرف بالا حرکت‌کنیم. بدین صورت چه‌کالاهایی درنمونهٔ ۱۰ عضوی قرار خواهندگرفت؟

۲. بااستفاده از جدول A۱۰، ضمیمهٔ ۴، نمونه‌ای به‌حجم ۲۰ از یك دستهٔ ۲۵۰ تایی جدا کنید.

۳. چطور می‌توان از یك تاس سالم برای انتخاب تصادفی استفاده کرد؟

۴. متغیر تصادفی y با چگالی یکنواخت

$$f(y)=\begin{cases} ۱ & ۰<y<۱ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

را درنظرمی گیریم. به‌سادگی می‌توان y (یعنی مقادیر نمونهٔ y را بااستفاده‌ازرقمهای تصادفی شبیه سازی کرد مثلا، برای به‌دست‌آوردن ۲۰ مقدارکه تا دو رقم اعشار گرد شده‌اند یکی از ۱۰ ستون جدول A۱۰ را درنظر بگیرید، سطری را به‌تصادف انتخاب کرده وضمن حرکت به‌طرف پایین، تنها دو رقم اول هرعدد پنج رقمی را برمی‌داریم و سمت چپ رقم اول ممیز می گذاریم. فرض کنید انتخاب شما ستون ۳ و سطر ۳۶ باشد. نشان دهیدکه‌نمونهٔ زیر به‌دست‌می‌آید و نمودار فراوانی نقطه‌ای آن‌رارسم کنید

۰٫۸۹ ۰٫۴۰ ۰٫۶۷ ۰٫۸۶ ۰٫۸۷ ۰٫۸۶ ۰٫۵۶ ۰٫۲۵ ۰٫۳۸ ۰٫۱۲

۰٫۶۸ ۰٫۵۰ ۰٫۵۳ ۰٫۱۰ ۰٫۰۸ ۰٫۹۰ ۰٫۱۹ ۰٫۸۵ ۰٫۵۳ ۰٫۹۸

۵. رقمهای تصادفی را می‌توان برای شبیه سازی متغیرهای تصادفی پیوسته نیز مورد استفاده قرارداد. به‌این منظور نمودار تابع توزیع متغیر پیوستهٔ X را رسم می کنیم، بااستفاده از رقمهای تصادفی مقادیری از متغیر تصادفی Y راکه درمسئلهٔ ۴ توصیف شده به‌دست می‌آوریم، این مقادیر را روی محور قائم مشخص کرده ومقادیرمتناظر X را می‌خوانیم. این‌کار را برای یك متغیر تصادفی نرمال X با میانگین ۰ و واریانس ۱، بااستفاده از نمونهٔ ذکرشده در مسئلهٔ ۴، انجام دهید. بافت نگار نمونه‌ای با ۲۰ مقدار X را، بااستفاده از نماینده‌های رده‌ای ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲، رسم کنید.

۶. روش شبیه سازی تشریح شده در مسئلهٔ ۴ را می‌توان برای متغیرهای تصادفی گسسته نیز به‌کار گرفت. اگر X مجموع دوشمارهٔ به‌دست آمده در ریختن دوتاس سالم باشد، چگونه باید عمل‌کرد (ر. ك. شکل ۳۷۱، بخش ۷.۲۰)؟

۱۳.۲۰ برآورد پارامترها

کمیتهایی که درتوزیعها وارد می‌شوند، مانند p که درتوزیع دوجمله‌ای وارد شد و μ و σ که در توزیع نرمال وارد شدند، **پارامتر** نامیده می‌شوند.

برآورد نقطه‌ای یك پارامتر عددی است (نقطه‌ای است واقع برمحور حقیقی) که از نمونه‌ای مفروض محاسبه می‌شود وهمچون تقریبی از یك مقداردقیق پارامتر به‌کارمی‌رود.

برآورد فاصله‌ای فاصله‌ای است («فاصلهٔ اطمینان»ی است) که از یك نمونه به دست می‌آید؛ چنین برآوردهایی دربخش بعدی مورد بررسی قرارمی گیرد. برآورد پارامترها درعمل مسئلهٔ مهمی است.

می‌توان میانگین x را تقریبی از میانگین μی جامعه درنظر گرفت. به این ترتیب برآورد $\mu = x$ برای μ حاصل می‌شود، یعنی

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \qquad (n = \text{تعداد اعضای نمونه}) \tag{1}$$

به‌همین نحو، برآورد σ^2 برای واریانس جامعه را می‌توان واریانس s^2ی نمونهٔ متناظر گرفت، یعنی

$$\sigma^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2. \tag{2}$$

واضح است که (۱) و (۲) برآورد پارامترهای توزیعهایی هستند کــه درآنها μ یا σ^2 صریحاً به‌صورت پارامتر ظاهرمی‌شوند، مانند توزیعهای نرمال و پواسن. درمورد توزیع دوجمله‌ای، $p = \mu/n$ [ر. ك. (۳)، بخش ۹.۲۰]. دراین حالت، هرگاه A پیشامدی که احتمال آن p است درآزمایش j ام روی دهد، آنگاه در (۱) قرارمی‌دهیم $x_j = 1$؛ و هرگاه A درآزمایش j ام روی ندهد، قرارمی‌دهیم $x_j = 0$. بنابراین از (۱) برای p برآورد

$$p = \frac{\bar{x}}{n} \tag{3}$$

حاصل می‌شود.

متذکرمی‌شویم که (۱) حالت بسیارخاصی‌است از روشی که **روش گشتاورها** نامیده می‌شود. دراین روش پارامترهایی که باید برآورد شوند برحسب گشتاورهای توزیع بیان می‌شوند (ر. ك. بخش ۸.۲۰). درفرمولهای حاصل این گشتاورها با گشتاورهای متناظر نمونه جایگزین‌می‌شوند و درنتیجه برآوردهای مطلوب به‌دست می‌آیند. دراینجا **گشتاور k ام نمونهٔ** $x_1, \dots, x_n$ عبارت است از

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^{\,k}.$$

روش دیگر به‌دست آوردن برآورد **روش درست نمایی ماکزیمم** آر. ای. فیشر نام دارد.* برای تشریح این روش به‌بررسی متغیر تصادفی گسستهٔ (یا پیوستهٔ) X که تابع احتمال (یاچگالی) آن، $f(x)$، تنها به‌پارامتر θ بستگی دارد ونمونهٔ متناظری با n مقدار

* R. A. Fisher (Messenger Math. **41**, 1912, 155 — 160)

مستقل x_1 ، . . . ، x_n می‌گیرد می‌پردازیم. درحالت گسسته احتمال آنکه نمونه‌ای به‌حجم n دقیقاً ازهمان n مقدارتشکیل شده باشد عبارت است از

$$l = f(x_1)\, f(x_2) \cdots f(x_n). \tag{۴}$$

در حالت پیوسته احتمال آنکه نمونه مرکب از مقادیری باشد که در فاصلهٔ کوچك $x_i \leqslant x \leqslant x_i + \Delta x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ قراردارند عبارت است از

$$f(x_1)\Delta x f(x_2)\Delta x \cdots f(x_n)\Delta x = l(\Delta x)^n \tag{۵}$$

چون $f(x_i)$ به θ بستگی دارد، تابع l به x_1 ، . . . ، x_n و θ وابسته است. فرض می‌کنیم x_1 ، . . . ، x_n مفروض و مشخص باشند. آنگاه l تابعی از θ است، که **تابع درست نمایی** نامیده می‌شود. ایدهٔ اساسی روش درست‌نمایی ماکزیمم خیلی‌ساده است و به شرح زیربیان می‌شود. تقریبی برای مقدارمجهول θ انتخاب می‌کنیم که برای آن l تا آنجاکه ممکن است بزرگ باشد. اگر l تابع مشتقپذیری از θ باشد، شرط لازم برای آنکه l دارای ماکزیممی (غیرواقع برکرانه) باشد عبارت است از

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \tag{۶}$$

(چون l به x_1 ، . . . ، x_n نیزوابسته است ازعلامت مشتق جزئی استفاده کرده‌ایم.) جوابی از (۶) راکه به x_1 ، . . . ، x_n وابسته است برآورد درست نمایی ماکزیمم برای θ می‌نامند. می‌توانیم (۶) راچنین بنویسیم:

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0 \tag{۷}$$

زیرا $f(x) \geqslant 0$ ، درحالت کلی ماکزیمم f مثبت است، و $\ln l$ تابعی صعودی یکنوا از l است. این موضوع اغلب محاسبات راساده‌تر می‌کند.

هرگاه توزیع X شامل r پارامتر θ_1 ، . . . ، θ_r باشد، آنگاه به جای (۶)، r شرط $\partial l/\partial\theta_1 = 0$ ، . . . ، $\partial l/\partial\theta r = 0$ را داریم، وبه جای (۷) داریم

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0 \tag{۸}$$

مثال ۱. توزیع نرمال

مطلوب است برآورد درست‌نمایی ماکزیمم برای μ و σ درمورد توزیع نرمال. از (۱)، بخش ۲۰.۱۰، و (۴) به‌دست می‌آوریم

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-h} \quad \text{که درآن} \quad h = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 .$$

با لگاریتم گیری، می‌یابیم

$$\ln l = -n \ln\sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - h.$$

اولین معادلهٔ (۸) عبارت است از $\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = 0$، که می‌شود آن را چنین نوشت:

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = -\frac{\partial h}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \quad \text{، بنابراین} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

جواب این‌معادله برآورد μ برای μ است؛ خواهیم داشت

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

معادلهٔ دوم (۸) عبارت است از $\partial \ln l/\partial\sigma = 0$، که چنین نوشته می‌شود

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

با گذاشتن μ به‌جای $\hat{\mu}$ وحل‌آن برحسب σ^2، برآورد زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

که دربخش ۱۸.۲۰ مورد استفاده قرارخواهد گرفت. توجه کنید که این با (۲) تفاوت دارد. دراینجا ما نمی‌توانیم محکهای نیکویی برآورد را تشریح کنیم، ولی بدنیست متذکر شویم که به‌ازای nهای کوچك، فرمول (۲) مناسبتراست. ▲

برای به‌دست‌آوردن برآوردهامی‌توان از **روشهای نموداری** استفاده کرد. به‌عنوان یك مورد مهم، توزیع نرمال را مورد بررسی قرارداده وبرآوردهای μ و σ رابرای‌نمونهٔ x_1، . . .، x_n به‌دست می‌آوریم. باتوجه به (۵)، بخش ۱۰.۲۰، می‌دانیم‌که تابع‌توزیع توزیع نرمال عبارت است از

$$F(x) = \Phi(z), \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

شکل۳۷۷، بخش۱۰.۲۰، نشان می‌دهدکه منحنی مربوط sـ شکل بوده وخط ۵۰٪ را در $z = 0$، یعنی در $x - \mu = 0$ یا $x = \mu$، قطع می‌کند. به‌علاوه، باتوجه به‌جدول A۹، ضمیمهٔ ۴، مشاهده می‌کنیم که‌وقتی $z = 1$ (تقریباً) $\Phi = ٪۸۴$. ازاین‌رو $(x-\mu)/\sigma = 1$، یعنی $x = \mu + \sigma$. باتوجه به‌مطالب بالا روش زیرارائه می‌شود:

نمودارتابع‌توزیع نمونهٔ موردنظررا رسم‌می‌کنیم و به‌کمك‌چشم منحنی sـ شکل C

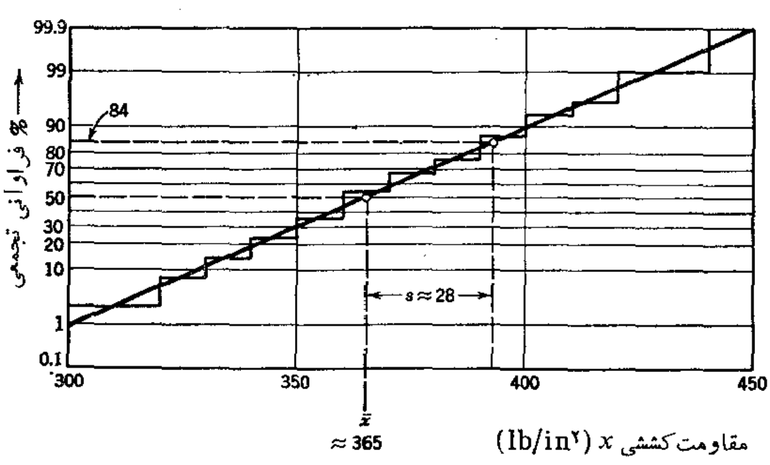
را به آن برازانید. فرض می‌کنیم x_0 و x_1 به ترتیب طولهای نقاط تقاطع C وخطوط ۵۰٪ و ۸۴٪ باشند. آنگاه x_0 برآوردی برای μ و $x_1 - x_0$ برآوردی برای σ است.

این روش را می‌توان اصلاح کرد مقیاس‌قائم رامی‌توان طوری «فشرده‌کرد» که منحنی s ـ شکل $F(x)$ به‌صورت خط راست درآید. کاغذی راکه چنین مقیاس مختصاتی روی‌آن به‌کار رفته باشد **کاغذ احتمال نرمال** می‌نامند. امتیازاستفاده ازاین کاغذها روشن است، زیرا اکنون نیازبه برازاندن خط مستقیم داریم، که از برازاندن منحنی s ـ شکل ساده‌تر است شکل ۳۸۲ مثالی رانشان می‌دهد، دراین مثال داریم $\bar{x} \approx$ ۳۶۵ (گردشدهٔ ۳۶۴٫۷) و $s \approx$ ۲۷ (گردشدهٔ ۲۶٫۸ $\approx \sqrt{۷۲۰٫۱}$). صفحهٔ بعد راببینید.

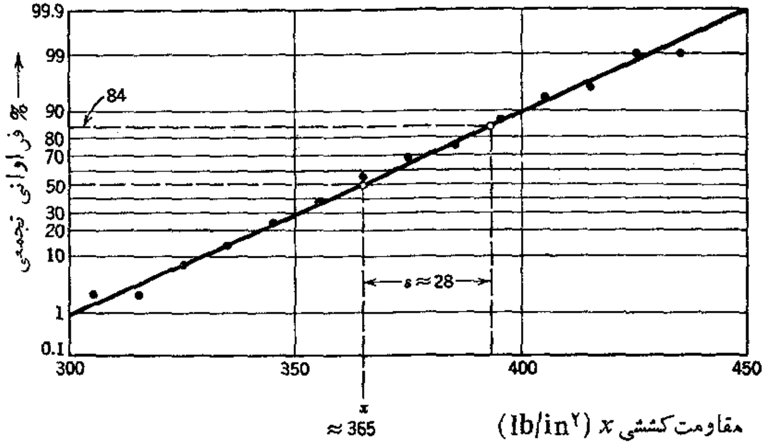
اگرمقادیر نمونه به فاصله‌های مساوی ازهم قرارداشته باشند (مانند جدول ۲.۲۰)، می‌توان صرفاً بامشخص کردن مقادیرفراوانیهای نسبی تجمعی به‌صورت نقاطی روی کاغذ احتمال وبرازاندن یك خط مستقیم «باچشم» تاآنجاکه ممکن‌است، کار را ساده‌ترکرد، ازشکل ۳۸۲ واضح است که اگرنقطهٔ مربوط‌به هرمقدار رابالاترازمقدار x متناظر انتخاب کنیم، مرتکب یك خطای سیستماتیك خواهیم شد زیرا خطی‌که به‌دست می‌آید بالاتراز خطی‌که درشکل ۳۸۲ دیده می‌شود خواهدبود. برای جبران این‌اثر، هرمقدار رابه اندازهٔ ۱/۲ فاصلهٔ xهای متوالی بالاترازمقدار x تصور می‌کنیم. (درجدول ۲.۲۰ این فاصله برابر ۵ = ۱۰/۲ است.) به‌این ترتیب شکل ۳۸۳ نتیجه می‌شود.

به‌همین نحو، اگرنمونه گروه‌بندی شده باشد، نمودارفراوانیهای نسبی تجمعی رابه صورت نقاطی‌که درست بالای نقاط انتهایی راست فواصل رده‌ای (نه بالای‌نمایندهٔ رده) هستند ترسیم‌کرده، آنگاه «به‌کمك چشم» خط راستی به‌این نقاط می‌برازانیم.

کاغذ احتمال نرمال رامی‌توان برای کنترل‌اینکه نمونه‌ای به‌یك جامعهٔ نرمال‌مربوط



شکل ۳۸۲. تابع توزیع نمونهٔ جدول ۲.۲۰ که روی‌کاغذ احتمال رسم شده است



شکل ۳۸۳. فراوانیهای نسبی تجمعی نمونهٔ ذکرشده در جدول ۲.۲۰ که روی کاغذ احتمال ترسیم شده‌است

است یا نه مورد استفاده قرارداد. آزمونی برای این‌مسئله دربخش ۱۸.۲۰ بررسی می‌شود.

مسائل بخش ۱۳.۲۰

۱. مطلوب است برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامتر μی توزیع نرمالی که واریانس $\sigma^2 = \sigma_0^2$ آن را می‌دانیم.

۲. روش درست‌نمایی ماکزیمم رابرای توزیع نرمالی با $\mu = 0$ به‌کاربرید.

۳. مطلوب است برآورد درست‌نمایی ماکزیمم θ درچگالی

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

۴. درمسئلهٔ ۳، میانگین μ رابیابید، آن رادر $f(x)$ بگذارید، برآورد درست‌نمایی ماکزیمم μ راپیداکنید، ونشان دهیدکه مقدارآن بابرآورد μیی که می‌توان از θی مسئلهٔ ۳ به‌دست‌آورد یکی است.

۵. برآورد درست نمایی ماکزیمم را برای پارامتر p در توزیع دو جمله‌ای به دست آورید.

۶. روش درست‌نمایی ماکزیمم را برای توزیع پواسن به‌کاربرید.

بااستفاده ازکاغذ احتمال، μ و σ رابرای نمونهٔ داده شده‌ای برآوردکنید، با فرض

آنکه نمونهٔ مزبور ازجامعه‌ای که به‌طریق نرمال توزیع شده آمده است.

۷. نمونهٔ مثال ۱، بخش ۳.۲۰ .

۸. نمونهٔ (دسته‌بندی‌نشده) جدول ۳.۲۰ ، بخش ۲.۲۰.

۹. نمونهٔ دسته‌بندی‌شدهٔ جدول ۴.۲۰ ، بخش ۲.۲۰.

۱۰. نمونهٔ مثال ۱، بخش ۲.۲۰.

۱۴.۲۰ فاصلهٔ اطمینان

بخش قبل به برآوردهای نقطه‌ای پارامترها اختصاص داشت، در ایـن بخش می‌خواهیم **برآوردهای فاصله‌ای** را مورد بحث قراردهیم.

هروقت فرمولهای تقریبی ریاضی را مـورد استفاده قرار می‌دهیم، باید سعی کنیم حداکثرانحرافی را که مقدار تقریبی می‌توانـد ازمقدار واقعی نامعلوم داشته باشد بیابیم. مثلا، در روشهای انتگرالگیری عددی «فرمولهای خطا»یی وجود دارند که می‌توان بـه کمك آنها بیشترین خطای ممکن (یعنی، بیشترین اختلاف بین مقدارتقریبی ومقدار واقعی) رامحاسبه کرد. فرض کنید دریك مـورد معینی ۲٫۴۷ را به عنوان مقدارتقریبی یك انتگرال داده شده و ۰٫۰۲± را به‌عنوان بیشترین انحراف ممکن ازمقداردقیق نامعلوم به‌دست آوریم. دراین صورت فاصلهٔ بین مقادیر ۲٫۴۵ = ۰٫۰۲ − ۲٫۴۷ و ۲٫۴۹ = ۰٫۰۲ + ۲٫۴۷ مطمئناً «شامل» مقدار دقیق نامعلوم هست.

برای برآورد پارامتری مانند θ، باید دومقدارعددی تعیین کرد که بستگی به‌مقادیر نمونه داشته باشند وفاصلهٔ بین آنها به‌طورقطع شامل مقدارنامعلوم پارامتر باشد. درهرصورت، قبلا آموختیم که ازیك نمونـه نمی‌توان درمورد جامعه به نتایجی رسیدکـه ۱۰۰٪ مطمئن باشند. بنا براین ماجانب اعتدال را نگهداشته ومسئله رابه صورت زیرتبدیل می‌کنیم.

احتمالی مانند γ که‌به ۱ نزدیك باشد (مثلا ۹۵٪ و ۹۹٪ $=\gamma$، یانظیر آنها) انتخاب می‌کنیم. آنگاه دو مقدار Θ_1 و Θ_2 را طوری بر می‌گزینیم که احتمال آنکه Θ_1 و Θ_2 دقیقاً شامل مقدار دقیق نامعلوم پارامتر θ باشد مساوی با γ باشد.

دراینجا می‌خواهیم شرط ناممکن «با اطمینان» راباشرط قابل وصول «با احتمال نزدیك به ۱» جایگزین کنیم.

مقادیرعددی این دوکمیت رابایدازنمونهٔ مفروض x_1 ، . . . ، x_n محاسبه کرد. مقدارنمونه رامی‌توان مقادیرمشاهده شدهٔ nمتغیرتصادفی X_1 ، . . . ، X_n درنظرگرفت. آنگاه Θ_1 و Θ_2 توابعی ازاین متغیرهای تصادفی هستند وبنابراین خود نیزمتغیرهای تصادفی هستند. بنابراین شرط بالارا می‌توان چنین نوشت:

$$P(\Theta_1 \leqslant \theta \leqslant \Theta_2) = \gamma.$$

هرگاه توابع Θ_1 و Θ_2 را بشناسیم و نمونه‌ای داده شده‌باشد، می‌توانیم θ_1، مقدار عددی Θ_1 و θ_2، مقدار عددی Θ_2، را محاسبه کنیم. فاصله‌ای که نقاط انتهایی θ_1 و θ_2 است **فاصلهٔ اطمینان**[1] یا برآورد فاصله‌ای پارامتر نامعلوم θ نامیده می‌شود، و ما آن را با

$$\mathrm{CONF}\,\{(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)\}$$

نشان می‌دهیم. مقادیر θ_1 و θ_2 **حدود اطمینان پایین و بالای** θ نامیده می‌شوند. عدد γ را **تراز اطمینان** می‌نامند. می‌توان γ را برابر ۹۵٪، ۹۹٪، حتی گاهی ۹ر۹۹٪ گرفت.

واضح است که اگر بخواهیم نمونه‌ای به‌دست آوریم و فاصلهٔ اطمینان مربوط به‌آن را تعیین کنیم، آنگاه γ برابر احتمال به‌دست‌آوردن فاصله‌ای خواهد بود که شامل مقدار دقیق نامعلوم پارامتر است.

مثلاً، اگر γ را ۹۵٪ انتخاب کنیم، آنگاه می‌توان انتظار داشت که حدود ۹۵٪ نمونه‌هایی که به‌دست می‌آوریم فواصل اطمینانی را به‌دست‌می‌دهند که شامل مقدار θ هستند، ضمن اینکه ۵٪ باقیمانده شامل θ نیستند. بنابراین حکم «فاصلهٔ اطمینان شامل θ است» در حدود ۱۹ بار از ۲۰ بار درست در یک بار باقیمانده نادرست خواهد بود.

با انتخاب ۹۹٪ $=\gamma$ به‌جای ۹۵٪ انتظار می‌رود که عبارت فوق در حدود ۹۹ بار از ۱۰۰ بار درست باشد. ولی چنانکه بعداً خواهیم دید فاصله‌های متناظر با ۹۹٪ $=\gamma$ بزرگتر از فاصله‌های متناظر با ۹۵٪ $=\gamma$ هستند و این اشکال افزایش γ است.

درعمل برای γ چه مقداری باید انتخاب کرد؟ این یک سؤال ریاضی نیست، بلکه سؤالی است که از نقطه‌نظر کاربردی باید جواب داده شود با توجه به‌اینکه درصورت غلط بودن حکم تاچه اندازه حاضر به خطا کردن هستیم.

واضح است که عدم اطمینان موجود در روش فعلی و روشهایی که در آینده مورد بحث واقع می‌شوند ناشی از فرایندهای نمونه‌گیری است، بنابراین باید برای آماردان اشتباهاتی که ممکن‌است خود او مرتکب شود توجیه شود. با این همه، وضع آماردان بدتر از وضع قاضی یا بانکداری که درکارش تصادف دخالت دارد نیست. برعکس او از این امتیاز برخوردار است که می‌تواند اشتباهات خود را اندازه بگیرد.

اکنون روشهایی را برای به‌دست‌آوردن فواصل اطمینان برای میانگین (جدولهای ۸.۲۰، ۹.۲۰) و واریانس (جدول ۱۰.۲۰) **توزیع نرمال** بررسی می‌کنیم. نظریهٔ

---

۱. نظریهٔ جدید و اصطلاحات مربوط به فواصل اطمینان توسط جی. نی‌من به وجود آمده‌اند (*Annals Math. Stat*. ۶, ۱۹۳۵, ۱۱۱–۱۱۶).

در ریاضیات $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ بدان معنی است که θ بین θ_1 و θ_2 قرار دارد و برای اجتناب از سوء تفاهم، به‌نظر می‌رسد ارزش دارد که فاصلهٔ اطمینان را با علامت مخصوصی مانند CONF نشان دهیم.

مربوطه درقسمت آخر این بخش موردبحث قرار می گیرد.

جدول ۸.۲۰

تعیین فاصلهٔ اطمینان برای میانگین μی توزیع نرمالی با واریانس معلوم σ^2

مرحلهٔ اول . تراز اطمینان γ را انتخاب کنید (۹۵٪ ، ۹۹٪ یانظیر آنها).

مرحلهٔ دوم . cی متناظر را تعیین کنید:

γ	۰٫۹۰	۰٫۹۵	۰٫۹۹	۰٫۹۹۹
c	۱٫۶۴۵	۱٫۹۶۰	۲٫۵۷۶	۳٫۲۹۱

مرحلهٔ سوم. میانگین $\bar{x}$ نمونهٔ x_1 ، . . . ، x_n را محاسبه کنید.

مرحلهٔ چهارم . $k = c\sigma/\sqrt{n}$ رامحاسبه کنید. فاصلهٔ اطمینان برای μ عبارت است از

$$\mathrm{CONF}\{\bar{x}-k \leqslant \mu \leqslant \bar{x}+k\}. \qquad (۱)$$

مثال ۱. فاصلهٔ اطمینان برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم

برای میانگین توزیع نرمالی با واریانس $\sigma^2 = ۹$، بااستفاده ازیك نمونهٔ $n = ۱۰۰$ مقداری با میانگین $\bar{x} = ۵$ ، یك فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ معین کنید.

مرحلهٔ اول . باید داشته باشیم $\gamma = ۰٫۹۵$.

مرحلهٔ دوم . cی متناظر برابراست با ۱٫۹۶۰.

مرحلهٔ سوم . $\bar{x} = ۵$ داده شده است.

مرحلهٔ چهارم . داریم $k = ۱٫۹۶۰ \times ۳/\sqrt{۱۰۰} = ۰٫۵۸۸$. در نتیجه $\bar{x} - k = ۴٫۴۱۲$ ، $\bar{x} + k = ۵٫۵۸۸$ ، وفاصلهٔ اطمینان برابراست با

$$\mathrm{CONF}\{۴٫۴۱۲ \leqslant \mu \leqslant ۵٫۵۸۸\}.$$

بعضی اوقات می نویسند $\mu = ۵ \pm ۰٫۵۸۸$، ولی مااین نماد گذاری را، که ممکن است گمراه کننده باشد، مورداستفاده قرارنمی دهیم.

مثال ۲. تعیین حجم نمونهٔ لازم برای به‌دست‌آوردن فاصلهٔ اطمینانی باطول مفروض

درمثال قبل، n را چقدر باید بزرگ انتخاب کنیم ، تایك فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ ، باطول

$L = 0.04$ ، داشته باشیم؟

فاصلهٔ (۱) دارای طول $L = 2k = 2c\sigma/\sqrt{n}$ است. n را به‌دست می‌آوریم:

$$n = (2c\sigma/L)^2.$$

دراین‌حالت جواب برابراست با $n = (2 \times 1.960 \times 3/0.4)^2 \approx 870$.

شکل ۳۸۴ نشان می‌دهد که وقتی n افزایش می‌یابد، L کاهش می‌یابد. به‌عبارت دیگر برای به‌دست آوردن فاصلهٔ اطمینان کوتاهتر باید n، حجم نمونه، را بزرگتر انتخاب کرد. ▲

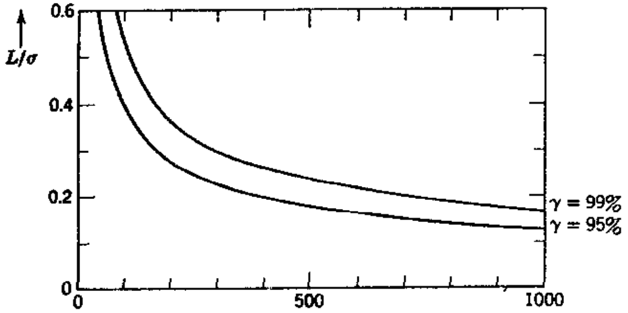
جدول ۹.۲۰ چگونگی تعیین فاصلهٔ اطمینان برای میانگین μی یك توزیع نرمال با واریانس نامعلوم σ^2 را نشان می‌دهد. مراحل این کارشبیه مراحل مذکور درجدول ۸.۲۰ است، بااین تفاوت که k درجدول ۹.۲۰ با k درجدول ۸.۲۰ تفاوت دارد. به‌علاوه، c به n وابسته است و باید از جدول A۱۱ ضمیمهٔ ۴ تعیین شود؛ این جدول شامل مقادیر داده شده تابع توزیع

$$F(z) = K_m \int_{-\infty}^{z} \left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} du$$

که **توزیع t ی استیودنت** (نام مستعار W. S. Gosset) نام دارد؛ در رابطهٔ بالا $K_m = \Gamma(m/2 + 1/2)/[\sqrt{m\pi}\,\Gamma(m/2)]$، و $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما است [ر.ك. (۲۴)، ضمیمهٔ ۳]. $m (= 1, 2, \ldots)$ پارامتری است که تعداد درجات آزادی توزیع نامیده می‌شود.

مثال ۳. فاصلهٔ اطمینان برای میانگین توزیع نرمال با واریانس نامعلوم

بااستفاده ازنمونهٔ ذکرشده در جدول ۲.۲۰، بخش ۲.۲۰، یك فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای



شکل ۳۸۴. طول فاصلهٔ اطمینان (۱) (برحسب مضارب σ) به صورت تابعی ازحجم نمونهٔ n

میانگین μی جامعهٔ متناظر، بافرض آنکه جامعه نرمال است، تعیین کنید. (این فرض در بخش ۱۸.۲۰ مورد بررسی قرار می گیرد.)

مرحلهٔ اول. باید داشته باشیم $\gamma = ۰٫۹۹$

مرحلهٔ دوم. نظر به اینکه $n = ۱۰۰$، داریم $c = ۲٫۶۳$.

مرحلهٔ سوم. پس از محاسبه داریم $\bar{x} = ۳۶۴٫۷۰$ و $s = \sqrt{۷۲۰٫۱} = ۲۶٫۸۳$.

مرحلهٔ چهارم. می یابیم $k = ۲۶٫۸۳ \times ۲٫۶۳/۱۰ = ۷٫۰۶$. درنتیجه فاصلهٔ اطمینان برابر است با

$$\mathrm{CONF}\{۳۵۷٫۶۴ \leqslant \mu \leqslant ۳۷۱٫۷۶\}.$$

جدول ۹.۲۰

تعیین فاصلهٔ اطمینان برای میانگین μی توزیع نرمالی با واریانس نامعلوم $\sigma^۲$

مرحلهٔ اول. ترازاطمینان γ را انتخاب کنید (۹۵٪، ۹۹٪ یا نظیر آنها).

مرحلهٔ دوم. ازمعادلهٔ

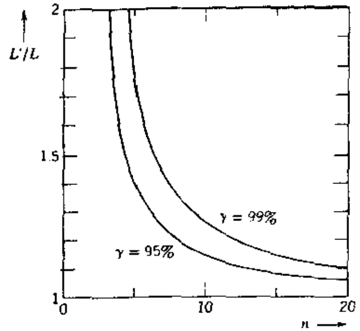
$$F(c) = \frac{۱}{۲}(۱+\gamma) \qquad (۲)$$

به کمک جدول توزیع t با $n-۱$ درجهٔ آزادی (جدول A۱۱،ضمیمهٔ ۴؛ حجم نمونه برابر است با n)مقدار c را بیابید.

مرحلهٔ سوم. میانگین $\bar{x}$ و واریانس $s^۲$ نمونهٔ $x_۱$، . . . ، x_n رامحاسبه کنید.

مرحلهٔ چهارم. $k = sc/\sqrt{n}$ را محاسبه کنید. فاصلهٔ اطمینان عبارت است از

$$\mathrm{CONF}\{\bar{x}-k \leqslant \mu \leqslant \bar{x}+k\}. \qquad (۳)$$



شکل ۳۸۵. نسبت طولهای L' و L فواصل اطمینان (۳) و (۱) به صورت تابعی ازحجم نمونهٔ n با s و σی برابر

برای مقایسه، اگر σ مشخص و برابر ۲۶٫۸۳ باشد، از جدول ۸.۲۰ داریم $k = ۲٫۵۷۶ \times ۲۶٫۸۳/\sqrt{۱۰۰} = ۶٫۹۱$، و $\mathrm{CONF}\,\{۳۵۷٫۷۹ \leqslant \mu \leqslant ۳۷۱٫۶۱\}$. این مقدار کمی با نتیجهٔ قبلی تفاوت دارد چرا که n بزرگ است. برای n کوچکتر، همان‌طور که شکل ۳۸۵ نشان می‌دهد، تفاوت قابل ملاحظه است. ▲

مراحل جدول ۱۰.۲۰ برای به‌دست‌آوردن فاصلهٔ اطمینانی برای واریانس یک توزیع نرمال شبیه مراحلی است که درجدولهای ۸.۲۰ و ۹.۲۰ ذکرشد، با این تفاوت که در اینجا باید دوعدد c_1 و c_2 را تعیین کنیم. هردوعدد از جدول A۱۲، ضمیمهٔ ۴، به‌دست می‌آیند، این جدول شامل مقادیر z متناظر است با مقادیر داده شدهٔ تابع توزیع $F(z) = ۰$ به ازای $z < ۰$ و

به ازای $z \geqslant ۰$،
$$F(z) = C_m \int_0^z e^{-u/2} u^{(m-2)/2} du$$

جدول ۱۰.۲۰

تعیین فاصلهٔ اطمینان برای واریانس σ^2 ی توزیع نرمالی که لازم نیست میانگینش معلوم باشد

مرحلهٔ اول. ترازاطمینان γ را انتخاب کنید (۹۵٪، ۹۹٪ یا یک درصد دیگر).

مرحلهٔ دوم. ازمعادلات

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \qquad F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \qquad (۴)$$

به کمک جدول توزیع مربعی که با $n-1$ درجهٔ آزادی (جدول A۱۲، ضمیمهٔ ۴؛ n = حجم نمونه) c_1 و c_2 را تعیین کنید.

مرحلهٔ سوم. $(n-1)s^2$ را که در آن s^2 واریانس نمونهٔ $x_1, \ldots, x_n$ است محاسبه کنید.

مرحلهٔ چهارم. $k_1 = (n-1)s^2/c_1$ و $k_2 = (n-1)s^2/c_2$ را محاسبه کنید. فاصلهٔ اطمینان عبارت است از

$$\mathrm{CONF}\,\{k_2 \leqslant \sigma^2 \leqslant k_1\}. \qquad (۵)$$

این تابع توزیع را **توزیع χ^2** (توزیع مربعی کی) می‌نامند؛ در اینجا $C_m = 1/[2^{m/2}\Gamma(m/2)]$، و $m(=1, 2, \ldots)$ پارامتری است که تعداد درجات

آزادی توزیع نامیده می‌شود.

مثال ۴. فاصلهٔ اطمینان برای واریانس توزیع نرمال

با استفاده از نمونهٔ جدول ۲.۲۰ ، بخش ۲.۲۰ ، فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای واریانس جامعهٔ متناظر تعیین کنید .

مرحلهٔ اول . باید داشته باشیم ۰٫۹۵ = γ.

مرحلهٔ دوم . چون ۱۰۰ = n، داریم ۷۳٫۴ = $c_۱$ و ۱۲۸ = $c_۲$.

مرحلهٔ سوم . ازجدول ۲.۲۰ ، بخش ۲.۲۰ ، پس از انجام محاسبه به‌دست می‌آوریم ۷۱,۲۹۱ = $۹۹s^۲$.

مرحلهٔ چهارم . فاصلهٔ اطمینان عبارت است از

$$\text{CONF}(۵۵۶ \leqslant \sigma^۲ \leqslant ۹۷۲). \qquad \blacktriangle$$

توزیعهای دیگر. فاصله‌های اطمینان برای میانگین و واریانس سایر توزیعها را می‌توان بااستفاده ازروشهایی که قبلا برای نمونه‌های باحجم به اندازهٔ کافی بزرگ مورد استفاده قرارگرفتند به‌دست‌آورد. در عمل ، هرگاه نمونه دلالت بر کوچك بودن چاولگی توزیع نامعلوم داشته‌باشد، باید نمونه‌هایی باحداقل حجم ۲۰ = n رابرای به‌دست‌آوردن فاصله‌های اطمینان برای μ، ونمونه‌هایی باحداقل‌حجم ۵۰ = n را برای به‌دست‌آوردن فاصله‌های اطمینان برای $\sigma^۲$ درنظر گرفت.دلیل این‌کار درانتهای همین بخش‌تشریح خواهد شد .

مبنای نظری روشهای ذکر شده در جدولهای ۸.۲۰ الی ۱۰.۲۰ . اکنون نظریه‌ای راموردبحث‌قرارمی‌دهیم که روشهای ما رابرای به‌دست‌آوردن فواصل اطمینان، بااستفاده ازایدهٔ ساده ولی‌خیلی مهم زیر، توجیه می‌کند.

تاکنون مقادیر $x_۱$ ، . . . ، x_n یك نمونه را nمقدار مشاهده شدهٔ تك متغیرتصادفی X درنظرمی‌گرفتیم. این n مقدار رامی‌توان‌تك‌مشاهدات n متغیرتصادفی $X_۱$ ، . . . ، X_n که دارای توزیع یکسان (همان توزیع X) هستند نیز در نظر گرفت ؛ این n متغیر مستقل خواهند بود زیرا مقادیر نمونه مستقل فرض شده‌اند.

برای رسیدن‌به (۱)، جدول ۸.۲۰، به قضیهٔ زیراحتیاج داریم :

قضیهٔ ۱ (مجموع متغیرهای تصادفی نرمال مستقل)

فرض می‌کنیم $X_۱$ ، $X_۲$ ، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی نرمال مستقلی باشند که میانگین آنها به ترتیب $\mu_۱$ ، $\mu_۲$ ، . . . ، μ_n و واریانسشان به ترتیب $\sigma_۱^۲$، $\sigma_۲^۲$ ، . . . ، $\sigma_n^۲$ باشد آنگاه متغیر تصادفی

$$X = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$$

توزیعی است نرمال با میانگین

$$\mu=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n$$

و واریانس

$$\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2.$$

احکام مربوط به μ و σ مستقیماً ازقضایای ۱ و ۳، بخش ۱۱.۲۰، نتیجه می‌شوند. اثبات اینکه X توزیعی نرمال است درمرجع [H۱۲] یافت می‌شود، ر. ك. ضمیمهٔ ۱.

ازاین قضیه، قضیهٔ ۱، بخش ۱۰.۲۰، وقضیهٔ ۳، بخش ۸.۲۰ به‌دست می‌آوریم

قضیهٔ ۲

اگر X_1 ، ... ، X_n متغیرهای تصادفی نرمال مستقلی باشند که هر یك دارای میانگین μ و واریانس σ^2 هستند، آنگاه متغیر تصادفی

$$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n) \qquad (۶)$$

نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2/n است، و متغیر تصادفی

$$Z=\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \qquad (۷)$$

نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ است.

(۱) را به‌دست می‌آوریم. با توجه به‌انگیزهٔ ما که درابتدای بخش توضیح داده شد، هدف ما یافتن دومتغیر تصادفی Θ_1 و Θ_2 است به‌طوری که

$$P(\Theta_1\leqslant\mu\leqslant\Theta_2)=\gamma, \qquad (۸)$$

که γ معین است، ونمونه مقادیرمشاهده شدهٔ θ_1 از Θ_1 و θ_2 از Θ_2 است، کـه فاصلهٔ اطمینان $\mathrm{CONF}\{\theta_1\leqslant\mu\leqslant\theta_2\}$ رابه‌دست می‌دهد. دراین‌حالت می‌توان بـه شرح زیر عمل کرد. عدد γ رابین ۰ و ۱ انتخاب می‌کنیم و c را ازجدول A۹، ضمیمهٔ ۴، طوری تعیین می‌کنیم که $P(-c\leqslant Z\leqslant c)=\gamma$. (وقتی که $\gamma=$ ۰٫۹۰ وغیره‌باشد. مقادیر c را ازجدول ۸.۲۰ به‌دست می‌آوریم.) نامساوی $-c\leqslant Z\leqslant c$ که درآن Z با(۷) داده شده، چنین می‌شود:

$$-c\leqslant\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma\leqslant c$$

ومی‌توان آن رابه‌یك نامساوی برای μ تبدیل کرد. در واقع از ضرب کردن رابطهٔ بالا در $\sigma/\sqrt{n}$ نتیجه می‌شود $-k\leqslant\bar{X}-\mu\leqslant k$ که در آن $k=c\,\sigma/\sqrt{n}$. ضرب رابطهٔ اخیر

در ۱ــ و افزودن $\bar{X}$ به طرفین آن، نتیجه می‌دهد

$$\bar{X}+k \geqslant \mu \geqslant \bar{X}-k \tag{۹}$$

بنابراین $P(\bar{X}-k \leqslant \mu \leqslant \bar{X}+k)=\gamma$ با $P(-c \leqslant Z \leqslant c)=\gamma$ معادل است. این رابطه همان (۸) است که در آن $\Theta_1=\bar{X}-k$ و $\Theta_2=\bar{X}+k$ انتخاب شده‌اند. با مفروضاتی که داریم این بدان معنی است کـه متغیرهای تصادفی $\bar{X}-k$ و $\bar{X}+k$ با احتمـال γ مقادیری اختیار می‌کنند که شامل میانگین نامعلوم μ است. اگرمقادیر نمونهٔ $x_1، \ldots، x_n$ موجود درجدول ۸.۲۰ را مقادیـرمشاهده شدهٔ n متغیرتصادفی نرمال $X_1، \ldots، X_n$ در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که میانگین نمونهٔ $\bar{x}$ یك مقدار مشاهده شدهٔ (۶) است، و با درج این مقدار در (۹) عبارت (۱) را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن (۳) از جدول ۹.۲۰ به قضیه زیر نیاز داریم.

قضیهٔ ۳

فرض‌کنیم $X_1، \ldots، X_n$ متغیرهای تصادفی نرمال مستقل با میانگین یکسان μ و واریانس یکسان σ^2 باشند. آنگاه متغیر تصادفی

$$T=\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{S} \tag{۱۰}$$

که درآن $\bar{X}$ با (۶) داده شده است و

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^2 \tag{۱۱}$$

دارای توزیع t (ر.ك. صفحه ۱۲۰۲) با $n-1$ درجهٔ آزادی است.

اثبات این موضوع را می‌توان در مرجع [H۱۲] یافت؛ ر. ك. ضمیمهٔ ۱.

راه رسیدن به (۳) شبیه راه رسیدن به (۱) است. برای این منظور عدد γ را بین ۰ و ۱ انتخاب می‌کنیم و عدد c را از جدول A۱۱، ضمیمهٔ ۴، با $n-1$ درجهٔ آزادی طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$P(-c \leqslant T \leqslant c)=F(c)-F(-c)=\gamma. \tag{۱۲}$$

چون توزیع t متقارن است، داریـم $F(-c)=1-F(c)$، و (۱۲) بـه صورت (۲) درمی‌آید. با تبدیل $-c \leqslant T \leqslant c$ در (۱۲) مانند قبل، به‌دست می‌آوریم

$$\bar{X}-K \leqslant \mu \leqslant \bar{X}+K \qquad \text{که‌درآن} \quad K=cS/\sqrt{n} \tag{۱۳}$$

و (۱۲) می‌شود $P(\bar{X}-K \leqslant \mu \leqslant \bar{X}+K)=\gamma$. با درج مقادیر مشاهده شدهٔ $\bar{x}$ از $\bar{X}$ و s^2 از S^2 در (۱۳)، عبارت (۳) حاصل می‌شود.

برای استنتاج رابطهٔ (۵) از جدول ۱۰.۲۵ به قضیهٔ زیر نیاز داریم.

قضیهٔ ۴

تحت مفروضات قضیهٔ ۳، متغیرتصادفی

$$Y=(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \qquad (14)$$

که درآن S^2 با (۱۱) داده شده است، دارای توزیع مربع‌کی (ر. ك. صفحهٔ ۱۲۰۵) با $n-1$ درجهٔ آزادی است.

اثبات این قضیه را می‌توان درمرجع [H۱۲] یافت، ر.ك. ضمیمهٔ ۱.

روش رسیدن به (۵) مشابه روش رسیدن به (۱) و (۳) است. عدد γ را بین ۰ و ۱ انتخاب می‌کنیم و c_1 و c_2 را از جدول A۱۲، ضمیمهٔ ۴، طوری تعیین می کنیم که [ر.ك. (۴)]

$$P(Y\leqslant c_1)=F(c_1)=\frac{1}{2}(1-\gamma),\quad P(Y\leqslant c_2)=F(c_2)=\frac{1}{2}(1+\gamma).$$

با کم کردن این دوعدد ازهم نتیجه می‌شود

$$P(c_1\leqslant Y\leqslant c_2)=P(Y\leqslant c_2)-P(Y\leqslant c_1)=\gamma.$$

با تبدیل $c_1\leqslant Y\leqslant c_2$، با Yی که با (۱۴) داده شده، به یك نامساوی برحسب σ^2، به دست می آوریم

$$\frac{n-1}{c_2}S^2\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{n-1}{c_1}S^2.$$

با درج مقدار مشاهده شدهٔ s^2 از S^2 در رابطهٔ بالا، (۵) به دست می‌آید.

فاصله‌های اطمینان برای میانگین و واریانس توزیعهای دیگر را می‌توان با روشهای ذکرشده در جدولهای ۸.۲۵ و ۱۰.۲۵ به‌دست‌آورد، ولی دراین مورد بایداز نمونه‌های بزرگ استفاده کنیم.

قضیهٔ ۵ (قضیهٔ حد مرکزی)

فرض‌کنیم X_1، . . .، X_n، . . . متغیرهای تصادفی مستقلی باشندکه دارای تابع توزیع یکسان وبنابراین میانگین وواریانس یکسان هستند. فرض‌می‌کنیم $Y_n=X_1+\dots+X_n$ آنگاه متغیرتصادفی

$$Z_n=\frac{Y_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \qquad (15)$$

نرمال مجانبی با میانگین ۰ و واریانس ۱ است، یعنی، تابع‌توزیع $F_n(x)$ متغیرتصادفی Z_n در

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$$

صدق می‌کند.

اثبات این قضیه را درمرجع [H۴] می‌توان یافت؛ ر. ك. ضمیمهٔ ۱. می دانیم که اگر X_1، . . . ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین یکسان μ و واریانس یکسان σ^2 باشند، آنگاه مجموعشان، $X=X_1+\ldots+X_n$، خواص زیررا دارد:

(الف) X دارای میانگین $n\mu$ و واریانس $n\sigma^2$ است (ر. ك. قضیه‌های ۱ و ۳، بخش ۱۱.۲۰).

(ب) اگر متغیرها نرمال باشند، آنگاه X نیز نرمال است (ر. ك. قضیهٔ ۱).

اگر متغیرها نرمال نباشند، آنگاه (ب) برقرار نیست، ولی اگر n بزرگ باشد، آنگاه X تقریباً نرمال‌است (ر. ك. قضیهٔ ۵) واین کاربرد روشهای مربوط به‌توزیع نرمال را برای توزیعهای دیگر توجیه می کند، ولی در چنین موردی باید از نمونه‌های بزرگ استفاده کنیم.

مسائل بخش ۱۴.۲۰

۱. با استفاده از نمونه‌ای با حجم ۳۶ ومیانگین ۴ر۱۸، یك فاصلهٔ اطمینان ۹۹% برای میانگین μی جامعه‌ای نرمال با واریانس ۹ر۱۶ = σ^2 پیدا کنید.

۲. با استفاده از نمونه‌ای با حجم ۳۰۰ و میانگین ۸۷، یك فاصلهٔ اطمینان ۹۵% برای میانگین μی جامعه‌ای نرمال با واریانس ۱۶ = σ^2 از شکل ۳۸۴ به دست آورید.

۳. با استفاده ازنمونهٔ ۱۶ و ۱۲، ۱۹، ۱۰، ۱۵، یك فاصلهٔ اطمینان ۹۵% برای میانگین μی جامعه‌ای نرمال باانحراف معیار ۵ر۲، پیدا کنید.

۴. برای تولید فاصلهٔ اطمینان ۹۵%ی که با (۱) داده شده و طول‌آن (الف) 2σ، (ب) σ است، حجم نمونه چقدر باید باشد؟

بافرض آنکه جامعه‌ای‌که از آن نمونهٔ زیر گرفته می‌شود نرمال باشد، فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین μی جامعه تعیین کنید.

۵. نمونه‌ای ازقطرهای ۱۰ گلولهٔ بلبرینگ بامیانگین ۳۷ر۴ سانتیمتر و انحراف معیار ۱۵۷ر۰ سانتیمتر.

۶. چگالی [گرم برسانتیمترمکعب] زغال‌کك ۴۰ر۱، ۴۵ر۱، ۳۹ر۱، ۴۴ر۱، ۳۸ر۱.

۷. درصد نیتروژنیوم در فولاد ۷۴ر۰، ۷۵ر۰، ۷۳ر۰، ۷۵ر۰، ۷۴ر۰، ۷۲ر۰.

۸. درمسئلهٔ ۵، حجم نمونه را چقدر باید انتخاب کنیم تا فاصلهٔ اطمینانی به‌طول ۱ر۰ به دست آوریم؟

۹. گرمای ویژهٔ آهن ۴۱ بار در دمای $25^\circ C$ اندازه گرفته شده است. نمونه دارای میانگین $[cal/g^\circ C]$ ۱۰۶ر۰ و انحراف معیار $[cal/g^\circ C]$ ۰۰۲ر۰ است. درصورتیکه ازمیانگین نمونه برای برآورد کردن گرمای ویژهٔ واقعی آهن استفاده کنیم ، در مورد اندازهٔ خطا، بااحتمال ۹۹٪، چه ادعایی می‌توانیم بکنیم؟

۱۰. مطلوب است فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای درصداتومبیلهایی که دریك بزرگراه با ترمزهای نامیزان درحال حرکتند، از نمونهٔ تصادفی ۵۰۰ اتومبیلی که پشت یك مانع توقف کرده‌اند استفاده کنید، ۸۷ تا ازاین ۵۰۰ اتومبیل ترمزهای نامیزان دارند.

با فرض آنکه جوامعی که نمونه‌های زیر از آنها انتخاب شده‌اند نرمال باشند با یك فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای واریانس σ^2ی جامعه معین کنید.

۱۱. سختی برحسب راکول یك وسیلهٔ برش ۹ر۶۴، ۱ر۶۴، ۸ر۶۳، ۰ر۶۴.

۱۲. نمونهٔ ذکر شده درمسئلهٔ ۷.

۱۳. نمونه‌ای با حجم $n=128$ و واریانس $s^2=1/921$.

۱۴. چرا برآوردهای فاصله‌ای دراغلب موارد مفیدتر از برآوردهای نقطه‌ای هستند؟

۱۵. اگر X نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۲۵ باشد، X، $-X$، $2X$، و $4X-1$ دارای چه توزیعهایی هستند؟

۱۶. اگر X، وزن پاکتهای سیمان، به طور نرمال بامیانگین ۴۰ کیلوگرم وانحراف معیار ۲ کیلوگرم توزیع شده باشد، چه تعدادی از پاکتهای سیمان باید تحویل کامیون داده شود، تااحتمال تجاوز بارکامیون از ۲۰۰۰ کیلوگرم برابر ۵٪ باشد.

۱۷. ماشینی جعبه‌های Y کیلوگرمی را با X کیلوگرم نمك پرمی‌کند که X و Y نرمال و به ترتیب دارای میانگین ۱۰۰ و ۵ کیلوگرم وانحراف معیار ۱ و ۵ر۰ کیلوگرم هستند. چه درصدی از جعبه‌های پرشده دارای وزنی بین ۱۰۴ و ۱۰۶ کیلوگرم خواهند بود؟

۱۸. توزیع ضخامت هستهٔ ترانسفورماتوری که از ۵۰ لایهٔ ورقهٔ فلزی و ۴۹ لایهٔ کاغذی عایق تشکیل شده چیست؟ درصورتی که X، ضخامت هرورقهٔ فلزی، نرمال بامیانگین ۵ر۰ میلیمتروانحراف معیار ۰۵ر۰ میلیمتر و Y، ضخامت لایهٔ کاغذی، نرمال بامیانگین ۰۵ر۰ وانحراف معیار ۰۲ر۰ میلیمتراست.

۱۹. با استفاده از قضیهٔ ۱، پیدا کنید که در بستن بطریها چه کسری از جفتهای تصادفی بطریها ودرپوشها متناسب هستند، بافرض آنکه D_1، قطر بطریها ، نرمال بامیانگین $\mu_1 = 1cm$ وانحراف معیار $\sigma = 0/01cm$ و D_2، قطردرپوشها، نرمال بامیانگین $\mu_2 = 0/99cm$ و انحراف معیار $\sigma_2 = 0/01cm$ باشد.

۲۰. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی نرمال بامیانگین به‌ترتیب ۶ و ۲ — وواریانس ۴ و ۶ باشند، متغیرتصادفی $4X_1 - X_2$ چه توزیعی دارد ؟

۱۵۰۲۰ آزمون فرض، تصمیم

فرض آماری فرضی است درمورد توزیع متغیر تصادفی ، مثل این فرض‌که توزیعی معین دارای میانگین ۳ر۲۰ است وغیره. **آزمون** آماری فرض عبارت است از فرایندی‌که در آن نمونه‌ای را مورد استفاده قرار می‌دهیم تا پی ببریم که آیا می‌توانیم فـرض را **«رد نکنیم»**، (**«بپذیریم»**)، یعنی‌طوری عمل کنیم‌که انـگار فرض درست است، یا باید‌آن را **«رد کنیم»** یعنی طوری عمل‌کنیم‌که انگار فرض نادرست است.

این آزمونها زیاد به‌کارمی‌روند؛ می‌توان‌سؤال کرد‌که اهمیت‌این‌آزمونها‌درچیست. اغلب اوقات باید درمورد مسائلی‌که شانس در آنهـا دخالت دارد تصمیم گرفت. هرگاه بخواهیم مثلا بین دو امکان یکی را انتخاب‌کنیم، تصمیم‌گیری در این انتخـاب می‌تواند براساس یك‌آزمون‌آماری پایه‌گذاری شود.

مثلاً، هرگاه بخواهیم دستگاه تراش معینی را برای تولید پیچهـایی که قطرشان درحدود مشخصی است مورد استفاده قرار دهیم واجازه دهیم‌که حداکثر ۲٪ از تولیدات معیوب باشد، می‌توانیم نمونه‌ای شامل ۱۰۰ پیچ تولید شده توسط این دستگاه تراش‌را درنظر بگیریم وآن را برای آزمون $\sigma^2=\sigma_0^2$ مورد استفاده قرار دهیم با توجه به اینکه واریانس σ^2 جامعهٔ متناظر دارای مقدار معین σ_0^2 است، این مقـدار را طوری انتخاب کرده‌ایم‌که بیش از ۲٪ کالای معیوب نداشته باشیم . یك فرض مقابل و بـا معنی در این مورد فرض $\sigma^2>\sigma_0^2$ است. بسته به نتیجهٔ آزمون، یا فرض $\sigma^2=\sigma_0^2$ را رد نمی‌کنیم (و بنابراین ماشین تراش مزبور را مورد استفاده قرار می‌دهیم)، یاآن را ردکرده، اظهار می‌کنیم $\sigma^2>\sigma_0^2$، و ماشین تراش دیگری به‌کار می‌بریم. درمورد اخیر گوییم که‌آزمون دلالت بر**انحراف معنی‌دار** σ^2 از σ_0^2 دارد. انحراف معنی‌دار انحرافی است‌که صرفاً به علت تأثیر اجتناب ناپذیر شانس عارض نشده بلکه به‌علت فقدان دقت تراش به وجود آمده باشد.

درموارد دیگر، ممکن‌است بخواهیم دوشیء مثلادوداروی متفاوت، دوروش‌اجرای کاری معین،دقت‌دوروش‌اندازه گیری، کیفیت محصولات تولیدشده به‌وسیلهٔ دوابزارمختلف، وغیره را باهم مقایسه‌کنیم.

این فرضها معمولاناشی از عوامل زیرند.

۱. فرض می‌تواندازیك نیاز کیفی ناشی‌شود. (تجربه درمورد‌کیفیت قابل حصول‌می‌تواند باتولید تعداد نسبتاًزیادی‌کالا با دقت خاص به دست‌آید.)
۲. فرض براساس مقادیرشناخته شده ازتجربهٔ قبلی پایه‌گذاری می‌شود.
۳. فرض ازنظریه‌ای‌که قراراست تحقیق شود ناشی می‌شود.
۴. فرض عبارت است ازحدس صرف‌که مشاهدات اتفاقی موجب‌آن می‌شوند.

مطلب را با یك مثال مقدماتی ساده شروع می‌کنیم.

مثال ۱. آزمون فرضی

تولد یك بچه را می‌توان یك آزمایش تصادفی درنظر گرفت که دوامکان B: تولد پسر و G: تولد دختر برای آن قابل‌تصوراست. به طورشهودی انتظار داریم که هردو برآمد هم‌شانس باشند. درصورتی که اغلب ادعا می‌شود تعداد موالید پسر بیشتر ازموالیددختراست. بنابراین می‌خواهیم این فرض راکه دو برآمد B و G دارای احتمال یکسان هستند آزمون کنیم. اگر P را احتمال برآمد B فرض کنیم، فرض‌مورد نظرعبارت است از $p = \%۵۰ = ۰٫۵$. ولی با توجه به ادعاهای عنوان شده $p > ۰٫۵$ انتخاب می‌کنیم.

برای آزمون از یك نمونهٔ $n = ۳۰۰۰$ نوزادی که درسال ۱۹۶۲ در گرتس اتریش متولد شده‌اند و ۱۵۷۸ تا ازآنها پسر بوده‌اند استفاده می‌کنیم.

اگر فرض درست باشد، انتظار می‌رود که در نمونه‌ای با حجم $n = ۳۰۰۰$ نوزاد، درحدود ۱۵۰۰ نوزاد پسر باشد. هرگاه فرض مقابل برقرار باشد، آنگاه انتظار می‌رود که تعداد پسرهای متولد شده به‌طور متوسط بیش‌از ۱۵۰۰ باشد. در نتیجه هرگاه تعداد پسرهایی که متولد شده‌اند خیلی بیش‌از ۱۵۰۰ باشد، آنگاه این موضوع به‌عنوان دلیلی براین ادعا که ممکن است فرض غلط باشد مورد استفاده قرار می‌گیرد، و فرض را رد می‌کنیم.

برای انجام این آزمون، به‌طریق زیرعمل‌می‌کنیم. نخست مقدار بحرانی c را تعیین می‌کنیم. به دلیل فرض مقابل، c بزرگتر از ۱۵۰۰ است. (روشی برای تعیین c درذیل ارائه خواهد شد.) بنابراین، هرگاه تعداد مشاهده شدهٔ پسرها بیشتر از c باشد، فرض را رد می‌کنیم. هرگاه تعداد بیش‌از c نباشد، آن را رد نمی‌کنیم.

سؤال اساسی که هم اکنون مطرح است، درمورد چگونگی انتخاب c است، یعنی، خط جداکنندهٔ انحرافهای تصادفی کوچك ازانحرافهای معنی‌داربزرگ‌راکجا باید بکشیم؟ افراد مختلف ممکن است نظرات مختلفی داشته باشند، ما برای پاسخ دادن به این سؤال به استدلال ریاضی می‌پردازیم. درمورد اخیر، همان طور که درزیرمشاهده خواهید کرد انجام این‌کار بسیار ساده است.

c را طوری تعیین می‌کنیم که در صورت درست بودن فرض، احتمال مشاهدهٔ بیش از c پسر در یك نمونهٔ ۳۰۰۰ تایی از نوزادان بسیارکوچك باشد، این احتمال را α می‌نامیم. مرسوم است که α را ۱٪ یا ۵٪ اختیارکنند. با انتخاب $\alpha = \%۱$ (یا ۵٪) این ریسك راکرده‌ایم که درحدود یك بار در ۱۰۰ بار (۲۰ بار) فرض را ردکنیم حتی اگر درست باشد. بعداً به این موضوع برخواهیم‌گشت. با انتخاب $\alpha = \%۱$ متغیر تصادفی

$$X = \text{تعداد پسرها در ۳۰۰۰ تولد}$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگراین فرض درست باشد، مقداربحرانی c برابرمی‌شود با

$$P(x > c)_{p=۰٫۵} = \alpha = ۰٫۰۱ \qquad (۱)$$

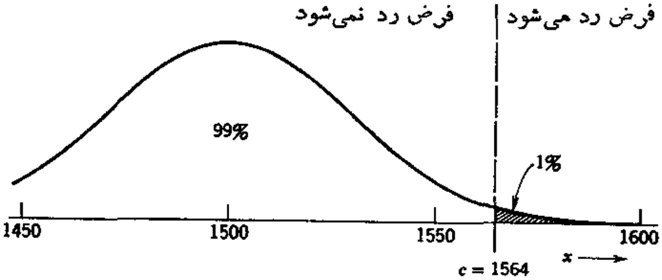
(فرضی را که کرده‌ایم با شاخص زیر $p = ۰٫۵$ نمایش داده‌ایم.) هرگاه مقدار مشاهده شدهٔ ۱۵۷۸ بیش از c باشد، فرض را رد می‌کنیم. اگر $c \leqslant ۱۵۷۸$، فرض را رد نمی‌کنیم.

برای تعیین c از (۱)، باید توزیع X را بدانیم. برای این منظور توزیع دو جمله‌ای مدل نسبتاً دقیقی است. بنابراین اگر فرض درست باشد، X توزیعی دوجمله‌ای با $p = ۰٫۵$ و $n = ۳۰۰۰$ دارد. این توزیع را می‌توان با توزیع نرمالی با میانگین $\mu = np = ۱۵۰۰$ و واریانس $\sigma^۲ = npq = ۷۵۰$ تقریب زد؛ به بخش ۱۰.۲۰ رجوع کنید. (برای سادگی کار از جملهٔ ۰٫۵ در (۱۱)، بخش ۱۰.۲۰، صرف‌نظر می‌کنیم.) چگالی در شکل ۳۸۶ نشان داده شده است. بنابراین با استفاده از (۱) به دست می‌آوریم

$$P(X > c) = ۱ - P(X \leqslant c) \approx ۱ - \Phi\left(\frac{c - ۱۵۰۰}{\sqrt{۷۵۰}}\right) = ۰٫۰۱$$

جدول A9، ضمیمهٔ ۴، نتیجه می‌دهد $(c - ۱۵۰۰)/\sqrt{۷۵۰} = ۲٫۳۲۶$. از این‌رو $c = ۱۵۶۴$. چون $c < ۱۵۷۸$، فرض را رد کرده اظهار می‌کنیم که $p > ۰٫۵$. بدین طریق آزمون کامل می‌شود.

درمورد یك نمونهٔ ۳۰۰ مقداری، باانتخاب $X =$ تعداد پسرها در ۳۰۰ تولد، از (۱) مقدار بحرانی $c = ۱۷۰$ را به‌دست می‌آوریم، و نمونه‌ای که درآن ۱۵۸ (همان درصدی که درنمونهٔ بزرگتر داشتیم) پسر باشد نتیجه می‌دهد $c > ۱۵۸$، و بنابراین فرض رد نمی‌شود. این موضوع جالبی است، زیرا نشان می‌دهد که باافزایش n، حجم نمونه، سودمندی آزمون بیشتر می‌شود. ما باید n را به قدری بزرگ اختیار کنیم که آزمون درمورد سؤالی



شکل ۳۸۶. چگالی X در مثال ۱ (به طور تقریبی)، هرگاه فرضی درست باشد. مقدار بحرانی $c = ۱۵۶۴$

که در حالت واقعی جالب است اطلاعاتی به دست دهد. ازطرف دیگر، برای صرفه‌جویی درهزینه و وقت، n نباید بزرگتر ازمقدارلازم باشد. دراغلب مواردانتخاب مقرون به‌صرفهٔ n را می‌توان به کمك آزمایشهای کوچك مقدماتی انجام داد. ▲

فرض آزمون شدنی را بعضی اوقات فرض صفرمی‌نامند، وفرض ناقض (مانند $p > ۰٫۵$

درمثال ۱) فرض مقابل، یا اجمالا **مقابل** نامیده می‌شود. عدد α ($100\alpha\%$) **تراز معنی‌دار بودن** آزمون نامیده می‌شود. c را مقدار بحرانی می‌نامند. ناحیه‌ای را که شامل مقادیری است که به‌ازای آنها فرض رد می‌شود **ناحیهٔ رد** یا **ناحیهٔ بحرانی** می‌نامند. ناحیه‌ای که شامل مقادیری است که به‌ازای آنها فرض رد نمی‌شود **ناحیهٔ پذیرش** نامیده می‌شود. در موارد بسیاری α را ۵٪ انتخاب می‌کنند.

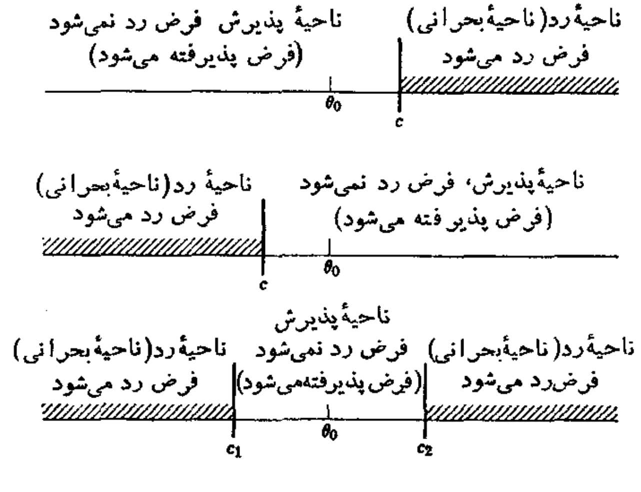
فرض می‌کنیم θ پارامتری مجهول دریك توزیع باشد، و بخواهیم فرض $\theta=\theta_0$ را آزمون کنیم. فرضهای مقابل از سه نوع اصلیند:

$$\theta>\theta_0 \quad (۲)$$

$$\theta<\theta_0 \quad (۳)$$

$$\theta\neq\theta_0. \quad (۴)$$

(۲) و (۳) **فرضهای مقابل یك طرفه** نامیده می‌شوند و (۴) را **فرض مقابل دو طرفه** می‌خوانند. (۲) ازهمان نوعی است که درمثال ۱ دیدیم (اگر فرض کنیم $\theta_0=p=0.5$ و $\theta=p>0.5$)؛ c درطرف راست θ_0 واقع است، و ناحیهٔ رد از c تا ∞ است (شکل ۳۸۷، قسمت فوقانی). این آزمون را **آزمون ازطرف راست** می‌نامند. در مورد (۳)، عدد c در طرف چپ θ_0 واقع است، ناحیهٔ رد از c تا $-\infty$ ادامه دارد (شکل ۳۷۱، قسمت میانی)، و در این صورت آزمون را **آزمون از طرف چپ** می‌نامند. هر دو آزمون را **آزمون یك طرفه** می‌نامند. در حالت (۴) دو مقدار بحرانی c_1 و $c_2(>c_1)$ را داریم. ناحیهٔ رد از c_1 تا $-\infty$ و از c_2 تا ∞ ادامه دارد، وآزمون، **آزمون دوطرفه** نامیده می‌شود.



شکل ۳۸۷. آزمون درمورد فرض مقابل (۲) (قسمت فوقانی شکل). فرض مقابل (۳) (قسمت میانی). و فرض مقابل (۴).

هر سه نوع فرض فوق در عمل مهم هستند. مثلا، (۳)در ارتباط با آزمون استحکام ماده ظاهر می‌شود. در آن صورت θ_0 می‌تواند استحکام مورد نظر باشد و فرض مقابل سستی نامطلوبی را مشخص می‌کند. البته حالتی که استحکام ماده بیش از میزان مورد نظر باشد قابل قبول است و ملاحظات خاصی را لازم نمی‌آورد. فرضهای از نوع (۴)، مثلا درارتباط با قطرمیل گردان ممکن است مهم باشند. درآن صورت θ_0 قطر مورد نظراست و میل گردانهای باقطر کم‌هم درست مانند میل‌گردانهای قطور نامرغوب هستند، به‌طوری که باید مراقب انحرافات θ_0 در هردوجهت بود.

اکنون به‌بررسی **مخاطراتی که‌در اتخاذ تصمیمات نادرست نهفته است** می‌پردازیم. این کار را در مورد آزمون فرض $\theta=\theta_0$ دربرابر فرض مقابلی که برای سادگی تنها یك عدد θ_1 درنظر گرفته شده است، انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم $\theta_1>\theta_0$ باشد طوری که یك آزمون سمت راست داشته باشیم، درمورد آزمونهای سمت چپ یا دوطرفه نیزوضع به‌همین منوال است. درموردنمونهٔ مفروض x_1، . . . ، x_n مقدار $\hat{\theta}=g(x_1, \ldots, x_n)$ را محاسبه می‌کنیم. هرگاه $\hat{\theta}>c$، فرض رد می‌شود (مانندمثال ۱). اگر $\hat{\theta}\leqslant c$، فرض رد نمی‌شود. $\hat{\theta}$ را می‌توان به عنوان مقدار مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی

$$\hat{\Theta}=g(X_1, \cdots, X_n)$$

در نظر گرفت چراکه x_j را می‌توان مقدارمشاهده شدهٔ X_j، که درآن $j=1, \ldots, n$، دانست. در این آزمون ممکن است دو نوع خطا، به شرح زیر، پیش‌آیند.

خطای نوع اول (ر.ك. جدول ۱۱.۲۰). فرض درست است، اما رد می‌شود زیرا $\hat{\Theta}$ مقدار $\hat{\theta}>c$ را اختیار می‌کند. واضح است که احتمال چنین خطایی برابر است با

$$P(\hat{\Theta}>c)_{\theta=\theta_0}=\alpha, \tag{۵}$$

که تراز معنی‌دار بودن آزمون است.

خطای نوع دوم (ر.ك. جدول ۱۱.۲۰). فرض نادرست است، ولی رد نمی‌شود زیرا $\hat{\Theta}$ مقدار $\hat{\theta}\leqslant c$ را اختیار می‌کند. احتمال وقوع چنین خطایی به β نمایش داده می‌شود؛ بنابراین

$$P(\hat{\Theta}\leqslant c)_{\theta=\theta_1}=\beta. \tag{۶}$$

$\eta=1-\beta$ **توان** آزمون نامیده می‌شود. واضح‌است که این مقداربرابر احتمال اجتناب از خطای نوع دوم است.

جدول ۱۱.۲۰
خطاهای نوع‌اول و نوع دوم درآزمون $\theta=\theta_{0}$ در برابر فرض مقابل $\theta=\theta_{1}$

		واقعیت نامعلوم	
		$\theta=\theta_{0}$	$\theta=\theta_{1}$
رد نشده (پذیرفته شده)	$\theta=\theta_{0}$	تصمیم درست $p=1-\alpha$	خطای نوع دوم $p=\beta$
	$\theta=\theta_{1}$	خطای نوع اول $p=\alpha$	تصمیم درست $p=1-\beta$

فرمولهای (۵) و (۶) نشان می‌دهند که هم α و هم β به c بستگی دارند، و ما می‌خواهیم c را طوری انتخاب کنیم که این احتمالات هرچه ممکن است کوچکتر باشند؛ ولی شکل ۳۸۸ نشان می‌دهد که هردوی این‌شرطها را نمی‌توان با هم تأمین کرد، زیرا برای آنکه α را کاهش دهیم باید c را به‌طرف راست منتقل کنیم، ولی دراین‌صورت β افزایش می‌یابد. درعمل ابتدا α را انتخاب‌می‌کنیم (۵٪،یا گاهی ۱٪)، بعد c را مشخص می‌کنیم وبالاخره β را محاسبه می‌کنیم. اگر β آنقدر بزرگ باشدکه‌توان $\eta=1-\beta$ کوچك شود، باید با انتخاب یك‌نمونهٔ بزرگتر، آزمون را تکرار کرد، دلایل این روش به اختصار تشریح خواهد شد.

اگر فرض مقابل تنها یك عدد نباشد بلکه به یکی از صورتهای (۲) تا (۴) باشد، آنگاه β تابعی از θ خواهد بود. این تابع $\beta(\theta)$ **مشخصهٔ عمل‌کننده** (OC)ی آزمون و منحنی آن را **منحنی OC** می‌نامند. واضح است که دراین حالت $\eta=1-\beta$ نیز به θ بستگی دارد، و تابع $\eta(\theta)$ را **تابع توان** آزمون می‌نامند.

البته، از آزمونی که منجر به‌پذیرش فرض معین θ_{0} می‌شود، نتیجه نمی‌شود که این تنها فرض ممکن یا بهترین فرض ممکن است. در نتیجه عبارات «رد نمی‌شود» یا «رد کردن با موفقیت همراه نیست» شاید بهتر از عبارت «پذیرفته می‌شود» است.

در مثالهای زیر به تشریح آزمون فرضهایی که درعمل مهم هستند می‌پردازیم.

مثال ۲. آزمون برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم

فرض می‌کنیم X یك متغیر تصادفی نرمال با واریانس $\sigma^{2}=9$ باشد. با استفاده از نمونه‌ای به حجم $n=10$، با میانگین $\bar{x}$، فرض $\mu=\mu_{0}=24$ را در برابر هر یك از سه نوع فرض مقابل، یعنی

(الف) $\mu>\mu_{0}$ (ب) $\mu<\mu_{0}$ (ج) $\mu\neq\mu_{0}$

آزمون کنید. تراز معنی‌دار بودن $\alpha = 0{,}05$ را انتخاب می‌کنیم. با استفاده از

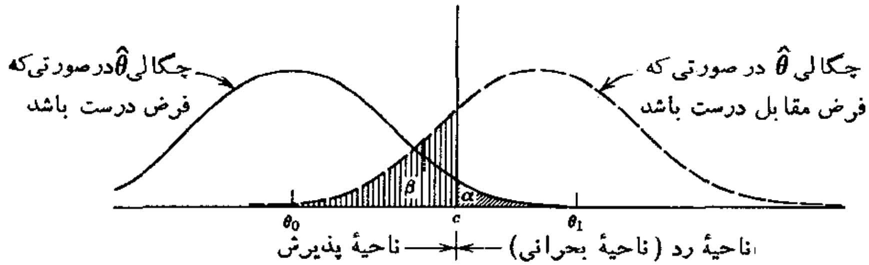
$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

برآوردی برای میانگین به‌دست می‌آید. هرگاه فرض درست باشد، $\bar{X}$ نرمال بامیانگین $\mu = 24$ و واریانس $\sigma^2/n = 0{,}9$ است، ر.ك.قضیهٔ ۲، بخش ۱۴.۲۰. از این‌رو مقدار بحرانی c را می‌توان از جدول A۹، ضمیمهٔ ۴، به‌دست آورد.

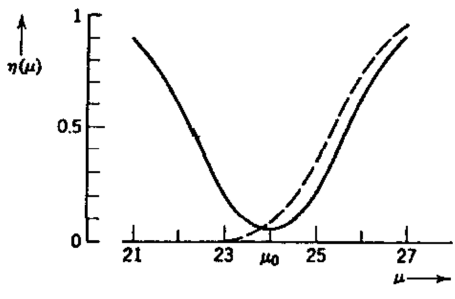
حالت (الف) c را از $P(\bar{X} > c)_{\mu=24} = \alpha = 0{,}05$ تعیین می‌کنیم:

$$P(\bar{X} \leqslant c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0{,}9}}\right) = 1 - \alpha = 0{,}95.$$

از جدول A۹، ضمیمهٔ ۴، نتیجه می‌شود $(c-24)/\sqrt{0{,}9} = 1{,}645$، $c = 25{,}56$، که بزرگتر از μ_0 است، مانند قسمت بالای شکل ۳۸۷. اگر $\bar{x} \leqslant 25{,}56$ فرض رد نمی‌شود. هرگاه $\bar{x} > 25{,}56$، فرض رد می‌شود. توان آزمون عبارت است از (ر.ك. شکل ۳۸۹).



شکل ۳۸۸. شرح خطاهای نوع‌اول ودوم درآزمون $\theta = \theta_0$ دربرابرفرض‌مقابل $\theta = \theta_1 (> \theta_0)$



شکل ۳۸۹. توان $\eta(\mu)$ در مثال ۲، حالت (الف) (خط چین) و حالت (ج)

$$\eta(\mu)=P(\bar{X}>۲۵٫۵۶)_\mu=۱-P(\bar{X}\leqslant ۲۵٫۵۶_\mu) \tag{۷}$$
$$=۱-\Phi\left(\frac{۲۵٫۵۶-\mu}{\sqrt{۰٫۹}}\right)=۱-\Phi(۲۶٫۹۴-۱٫۰۵\,\mu).$$

حالت (ب) مقدار بحرانی c از معادلهٔ

$$P(\bar{X}\leqslant c)_{\mu=۲۴}=\Phi\left(\frac{c-۲۴}{\sqrt{۰٫۹}}\right)=\alpha=۰٫۰۵$$

به‌دست می‌آید. ازجدول A۹ ، ضمیمهٔ ۴ ، نتیجه می‌شود $c=۲۴-۱٫۵۶=۲۲٫۴۴$. اگر $۲۲٫۴۴\leqslant \bar{x}$ ، فرض را رد نمی‌کنیم. هرگاه $\bar{x}<۲۲٫۴۴$ فرض را رد می‌کنیم. توان آزمون عبارت است از

$$\eta(\mu)=P(\bar{X}\leqslant ۲۲٫۴۴)_\mu=\Phi\left(\frac{۲۲٫۴۴-\mu}{\sqrt{۰٫۹}}\right)=\Phi(۲۳٫۶۵-۱٫۰۵\mu). \tag{۸}$$

حالت (ج) چون توزیع نرمال متقارن است ، $c_۱$ و $c_۲$ را به‌فاصلهٔ مساوی از $\mu=۲۴$ ، مثلا $c_۱=۲۴-k$ و $c_۲=۴۲+k$ انتخاب می‌کنیم ، k را با توجه به

$$P(۲۴-k\leqslant\bar{X}\leqslant ۲۴+k)_{\mu=۲۴}=\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{۰٫۹}}\right)-\Phi\left(-\frac{k}{\sqrt{۰٫۹}}\right)$$
$$=۱-\alpha=۰٫۹۵$$

تعیین‌می‌کنیم. بااستفاده ازجدول A۹ ،ضمیمهٔ ۴ ،به‌دست‌می‌آوریم $k/\sqrt{۰٫۹}=۱٫۹۶۰$، $k=۱٫۸۶$. ازاین‌رو $c_۱=۲۴-۱٫۸۶=۲۲٫۱۴$ و $c_۲=۲۴+۱٫۸۶=۲۵٫۸۶$. هرگاه $\bar{x}$ نه‌کوچکتر از $c_۱$ باشد و نه بزرگتر از $c_۲$ ، فرض را رد نمی‌کنیم در غیر این صورت آن را رد می‌کنیم. توان آزمون عبارت است از (ر.ك. شکل ۳۸۹)

$$\eta(\mu)=P(\bar{X}<۲۲٫۱۴)_\mu+P(\bar{X}<۲۵٫۸۶)_\mu$$
$$=P(\bar{X}<۲۲٫۱۴)_\mu+۱-P(\bar{X}\leqslant ۲۵٫۸۶)_\mu$$
$$=۱+\Phi\left(\frac{۲۲٫۱۴-\mu}{\sqrt{۰٫۹}}\right)-\Phi\left(\frac{۲۵٫۸۶-\mu}{\sqrt{۰٫۹}}\right) \tag{۹}$$
$$=۱+\Phi(۲۳٫۳۴-۱٫۰۵\mu)-\Phi(۲۷٫۲۶-۱٫۰۵\mu).$$

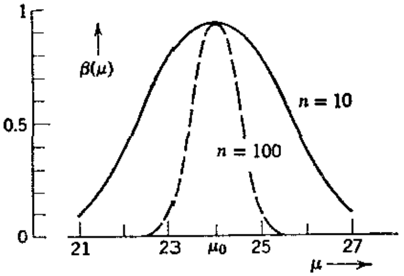
در نتیجه ، مشخصهٔ عمل‌کنندهٔ $\beta(\mu)=۱-\eta(\mu)$ که در بالا تعریف شد عبارت است از (ر.ك. شکل ۳۹۰)

$$\beta(\mu)=\varnothing(۲۷٫۲۶-۱٫۰۵\,\mu)-\varnothing(۲۳٫۳۴-۱٫۰۵\,\mu).$$

هرگاه نمونه رابزرگتر بگیریم ، مثلا حجم نمونه رابرابر $n=۱۰۰$ (به‌جای ۱۰) بگیریم آنگاه $\delta^۲/n=۰٫۰۹$ (به‌جای ۰٫۹) و مقادیر بحرانی عبارتند از $c_۱=۲۳٫۴۱$ و

$c_2 = ۲۴٫۵۹$، که درستی آنها را می‌توان از طریق محاسبه تحقیق کرد. در این صورت مشخصهٔ عمل‌کنندهٔ آزمون برابر است با

$$\beta(\mu) = \Phi\left(\frac{۲۴٫۵۹ - \mu}{\sqrt{۰٫۰۹}}\right) - \Phi\left(\frac{۲۳٫۴۱ - \mu}{\sqrt{۰٫۰۹}}\right)$$
$$= \Phi(۸۱٫۹۷ - ۳٫۳۳\mu) - \Phi(۷۸٫۰۳ - ۳٫۳۳\mu).$$



شکل ۳۹۰. منحنیهای مشخصهٔ عمل‌کنندهٔ (منحنیهای OC) درمثال ۲، حالت (ج)، در مورد دوحجم نمونهٔ مختلف n

شکل ۳۹۰ نشان می‌دهد که منحنی OCی متناظر نسبت به منحنی متناظر با $n = ۱۰$ شیب بیشتری دارد. بدین‌ترتیب افزایش n باعث اصلاح آزمون شده است. درموارد عملی، n راتاجایی‌که ممکن‌است کوچك اختیارمی کنیم ولی نه تاآن‌حدکه‌آزمون نتواند انحرافات بین μ و μ_0 راکه ازنقطه‌نظرعملی جالب هستندآشکارکند. برای نمونه، هرگاه انحرافات ± ۲ واحد موردنظرباشد، باتوجه به‌شکل ۳۹۰ مشاهده می‌کنیم‌که $n = ۱۰$ بسیارکوچك است زیرا وقتی که $\mu = ۲۴ - ۲ = ۲۲$ یا $\mu = ۲۴ + ۲ = ۲۶$، آنگاه β تقریباً برابر ۵۰٪ است. ازطرف دیگر، مشاهده می‌کنیم‌که $n = ۱۰۰$ برای منظورما مناسب است.

مثال ۳. آزمون برای میانگین توزیع نرمال با واریانس مجهول

استحکام‌کششی نمونه‌ای باحجم $n = ۱۶$ ازطنابهای مانیلی (به قطرسه‌اینچ) اندازه‌گرفته شده ومیانگین آن $\bar{x} = ۴۴۸۲\ \mathrm{kg}$ ، وانحراف معیارش $s = ۱۱۵\ \mathrm{kg}$ به‌دست‌آمده است. (N. C. Wiley, 41st Annual Meeting of the Amer. Soc. for Test Materials). بافرض‌آنکه استحکام‌کششی یك متغیر تصادفی نرمال است، فرض $\mu_0 = ۴۵۰۰\ \mathrm{kg}$ رادر برابرفرض مقابل $\mu_1 = ۴۴۰۰\ \mathrm{kg}$ آزمون می کنیم. دراینجا مقدار μ_0 را می‌توان از تولیدکننده گرفت ومقدار μ_1 راباتوجه به‌تجارب قبلی به‌دست‌آورد.

ترازمعنی‌دار بودن را $\alpha = ۵\%$ انتخاب می کنیم. هرگاه فرض درست باشد ازقضیهٔ ۳، بخش ۱۴.۲۰، نتیجه میشود که متغیرتصادفی

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} = ۴\,\frac{\bar{X} - ۴۵۰۰}{S}$$

دارای توزیع t با $n-1=15$ درجهٔ آزادی است. مقدار بحرانی c ازمعادلهٔ

$$P(T<c)_{\mu_0}=\alpha=0.05$$

به دست می‌آید. جدول A11، ضمیمهٔ ۴، نتیجه می‌دهد $c=-1.75$. از نمونه $t=4(4482-4500)/115=-0.626$ را به‌عنوان مقدارمشاهده شدهٔ T به‌دست می‌آوریم. ملاحظه می‌کنیم که $t>c$ وفرض را رد نمی‌کنیم. برای به‌دست آوردن مقادیر عددی توان آزمون، نیازبه جدولهایی داریم که به جدولهای tی استیودنت غیر مرکزی موسومند؛ این‌مسئله را دراینجا موردبحث قرارنمی‌دهیم.

مثال ۴. آزمون برای واریانس توزیع نرمال

بااستفاده ازنمونه‌ای به حجم $n=15$ و واریانس نمونهٔ $s^2=13$ ازیك جامعهٔ نرمال، فرض $\sigma^2=\sigma_0{}^2=10$ را دربرابرفرض مقابل $\sigma^2=\sigma_1{}^2=20$ آزمون می‌کنیم.

ترازمعنی‌دار بودن را $\alpha=5\%$ انتخاب می‌کنیم. هرگاه فرض درست باشد، آنگاه

$$Y=(n-1)\frac{s^2}{\sigma_0{}^2}=14\frac{s^2}{10}=1.4S^2$$

دارای توزیع کی با $n-1=14$ درجهٔ آزادی است، ر.ك. قضیهٔ ۴، بخش ۱۴.۲۰. از

$$P(Y>c)=\alpha=0.05 \quad \text{یعنی} \quad P(Y\leqslant c)=0.95،$$

وجدول A12، ضمیمهٔ ۴، با ۱۴درجهٔ‌آزادی به‌دست می‌آوریم $c=23.68$. این‌مقدار بحرانی Y است. از این رو با $S^2=\sigma_0{}^2Y/(n-1)=0.714Y$ مقدار بحرانی $c^*=0.714\times 23.68=16.91$ متناظرمی‌شود. چون $s^2<c^*$، فرض را رد نمی‌کنیم.

اگرفرض مقابل درست باشد، متغیر

$$Y_1=14\frac{S^2}{\sigma_1{}^2}=0.7S^2$$

دارای توزیع کی با ۱۴درجهٔ آزادی است. پس این‌آزمون دارای توان

$$\eta=P(S^2>c^*)_{\sigma^2=20}=P(Y_1>0.7c^*)_{\sigma^2=20}$$
$$=1-P(Y_1\leqslant 11.84)_{\sigma^2=20}\approx 62\%$$

خواهدبود ومشاهده می‌کنیم که مخاطرهٔ نوع II، که برابر۳۸٪ است خیلی بزرگ‌است. برای کوچکتر کردن این مخاطره، باید حجم نمونه را افزایش دهیم.

مثال ۵. مقایسهٔ میانگین دو توزیع نرمال

بااستفاده ازنمونهٔ x_1 ، . . . ، x_{n_1} از یک توزیع نرمال با میانگین نامعلوم μ_1 و نمونهٔ y_1 ، . . . ، y_{n_2} ازتوزیع نرمال دیگری بامیانگین نامعلوم μ_2 ، می‌خواهیم فرض‌تساوی میانگینها، یعنی $\mu_1 = \mu_2$ رادر برابریك فرض مقابل، مثلا $\mu_1 > \mu_2$ ، آزمون کنیم. لازم نیست واریانسها معلوم باشد، ولی فرض می‌شود که باهم برابرند.[1] دوحالت وجود داردکه ازنقطه نظرعلمی جالب هستند.

حالت الف. حجم نمونه‌ها باهم مساوی است. به‌علاوه، هر مقدار از نمونهٔ اول درست با یك مقدار ازنمونهٔ دیگر متناظر است، چراکه مقادیرمربوطه‌ازیك شخص یایك شیء نتیجه می‌شوند (**مقایسهٔ زوجی**)؛ مثلا، دواندازه گیری از یـك شیئی بادو روش متفاوت یا دو اندازه‌گیری از دوچشم یك حیوان، وبه طورکلیتر، ممکن است این نمونه‌هـا از زوجهای افراد یا اشیاء مشابه، مثلا، دوقلوهای یکسان، زوج مستعمل لاستیکهای جلوی اتوموبیل و غیره نتیجه شوند. درمرحلهٔ بعد تفاضلهای مقادیر مربوطه را تشکیل می‌دهیم وبا استفاده از روش ذکرشده درمثال۳، این فرض راکه جامعهٔ متناظرباتفاضلها دارای میانگین صفراست آزمون می‌کنیم. اگرامکان انتخاب باشد این روش بهتراز روش زیراست.

حالت ب. دو نمونهٔ مستقل هستند و ضرورتاً هم حجم نیستند. دراین صورت به شرح زیر عمل می‌کنیم. فرض مقابل را $\mu_1 > \mu_2$ می‌گیریم. تـراز معنی‌دار بـودن α را انتخاب می‌کنیم. $\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، میانگینهای نمونه و $(n_1-1)s_1^2$ و $(n_2-1)s_2^2$ رامحاسبه می‌کنیم، s_1^2 و s_2^2 واریانسهای نمونه هستند. بااستفاده ازجدول A۱۱، ضمیمهٔ۴، با n_1+n_2-2 درجهٔ آزادی، مقدار c را از

$$P(T \leqslant c) = 1 - \alpha \tag{۱۰}$$

به‌دست می‌آوریم. درپایان

$$t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \times \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}} \tag{۱۱}$$

را محاسبه می‌کنیم. می‌توان نشان دادکه این مقدارمشاهده شدهٔ یك متغیرتصادفی است که دارای توزیع t با n_1+n_2-2 درجهٔ‌آزادی است، مشروط براینکه فرض درست باشد. هر گاه $t_0 \leqslant c$ ، فرض رد نمی‌شود. هرگاه $t_0 > c$ ، فرض رد می‌شود.

---

۱. هرگاه آزمون ذکرشده درمثال بعدی نشان دهدکـه واریانس بـه میزان قابل مشاهـده‌ای تغییرمی‌کند، آنگاه دونمونهٔ نـه چندان‌کوچك باحجمهای مساوی (مثلا $n_1=n_2=n\ (>30)$) انتخاب می‌کنیم وبا استفاده ازاین واقعیت‌که (۱۲) مقداری‌مشاهـده شده ازیك متغیرتصادفی تقریباً نرمال بامیانگین ۰ و واریانس ۱ است، مانند مثال ۲ عمل می‌کنیم.

اگرفرض مقابل $\mu_۲ \neq \mu_۱$ باشد، آنگاه (۱۰) باید با

$$P(T \leqslant c_۱) = ۰٫۰۵\,\alpha \text{ ،} \qquad P(T \leqslant c_۲) = ۱ - ۰٫۰۵\,\alpha \qquad (۱۰^*)$$

جایگزین شود.

توجه کنید که برای نمونه‌هایی باحجمهای مساوی $n_۱ = n_۲ = n$ ، فرمول (۱۱) به

$$t_۰ = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_۱^۲ + s_۲^۲}} \qquad (۱۲)$$

تبدیل می‌شود.

برای روشنتر کردن طرزکار با اعداد، به بررسی دونمونهٔ

۱۰۵ ۱۲۴ ۱۰۷ ۱۰۳ ۱۰۳ ۸۶ ۱۰۸ ۱۰۵

و

۹۷ ۱۱۱ ۱۰۷ ۱۰۳ ۹۷ ۸۴ ۹۲ ۸۹

می‌پردازیم؛ این دونمونه بازده نسبی یک کارخانهٔ تولید ورقه‌های قلع را تحت دو دسته شرایط‌مختلف نشان‌می‌دهند. (J. J.B. WORTH, J. Indust. Eng. 9, 1958, 249-253). بافرض آنکه جوامع متناظر نرمال وهم واریانس هستند، فرض $\mu_۲ = \mu_۱$ را در برابرفرض مقابل $\mu_۲ \neq \mu_۱$ آزمون می کنیم. (تساوی واریانسها در مثال بعدی آزمون می‌شود.) خواهیم‌داشت $\bar{x} = ۱۰۵٫۱۲۵$ ، $\bar{y} = ۹۷٫۵۰۰$ ، $s_۱^۲ = ۱۰۶٫۱۲۵$ ، $s_۲^۲ = ۸۴٫۰۰۰$. تراز معنی‌دار بودن را $\alpha = ٪۵$ انتخاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن $\alpha = ٪۲٫۵$ و $۰٫۰۵$ $۱ - ۰٫۰۵\,\alpha = ٪۹۷٫۵$ وبا استفاده ازجدول A۱۱، ضمیمهٔ ۴، بـا ۱۴ درجهٔ آزادی از (۱۰*) به‌دست می‌آوریم $c_۱ = -۲٫۱۵$ ، $c_۲ = ۲٫۱۵$. ازفرمول(۱۲)به‌ازای $n = ۸$ مقدار $t_۰ = \sqrt{۸} \times ۷٫۶۲۵/\sqrt{۱۹۰٫۱۲۵} = ۱٫۵۶$ حاصل‌می‌شود. چون $c_۱ \leqslant t_۰ \leqslant c_۲$، فرض $\mu_۲ = \mu_۱$ ، برابری بازده میانگین تحت دودسته شرایط، را رد نمی‌کنیم.

این‌مثال باحالت (الف) سازگاراست، زیرادومقداراول نمونه‌هابانوع معینی ازکار، و دومقدار بعدی بانوع دیگری ازکار، وغیره، مربوطند. بنابراین می‌توانیم از تفاضلهای مقادیرمتناظردر دونمونه، یعنی

۸ ۱۳ ۰ ۰ ۶ ۲ ۱۶ ۱۶

استفاده‌کرده وبا روش مذکور درمثال ۳ ، فرض $\mu = ۰$ را کـه درآن μ میانگین جامعهٔ متناظر باتفاضلها است‌آزمون کنیم. به‌عنوان یک‌شق منطقی دیگرمی گیریم $\mu \neq ۰$. میانگین نمونه و واریانس نمونه به ترتیب عبارتند از $\bar{d} = ۷٫۶۲۵$ ، $s^۲ = ۴۵٫۶۹۶$. درنتیجه $t = \sqrt{۸}(۷٫۶۲۵ - ۰)/\sqrt{۴۵٫۶۹۶} = ۳٫۱۹$. از $P(T \leqslant c_۱) = ٪۲٫۵$ ، $P(T \leqslant c_۲) = ٪۹۷٫۵$ وجدول A۱۱، ضمیمهٔ ۴، با $n - ۱ = ۷$ درجهٔ آزادی به‌دست می‌آوریم $c_۱ = -۲٫۳۷$ ، $c_۲ = ۲٫۳۷$ و فـرض را رد می‌کنیم زیرا $t = ۳٫۱۹$ بین

c_1 و c_2 واقع نیست. ازاین‌رو آزمون اخیر، که درآن‌ازاطلاعات بیشتری (باهمان نمونه‌ها) استفاده شده‌است، نشان می‌دهد که تفاضل دربازده معنی‌دار است.

مثال ۶. مقایسهٔ واریانس دوتوزیع نرمال

بـا استفاده از دونمونهٔ ذکرشده درمثال فوق، فرض $\sigma_2^2 = \sigma_1^2$ را آزمون کنید؛ فرض می‌کنیم که جامعه‌های متناظر نرمال هستند وطبیعت آزمایش‌فرض مقابل $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$ راالقاء می‌کند. می‌یابیم $s_1^2 = ۱۰۶٫۱۲۵$ ، $s_2^2 = ۸۴٫۰۰۰$. ترازمعنی‌دار بودن $\alpha = \%۵$ را انتخاب می کنیم. بااستفاده از $P(V \leqslant c) = ۱ - \alpha = \%۹۵$ وجدول A۱۳ ، ضمیمهٔ ۴، با $(n_1 - ۱, n_2 - ۱) = (۷,۷)$ درجهٔ‌آزادی، مقدار c برابر ۳٫۷۹ تعیین می گردد. در پایان $v_0 = s_1^2/s_2^2 = ۱٫۲۶$ رامحاسبه می‌کنیم. چون $v_0 \leqslant c$، فرض را رد نمی‌کنیم. اگر $v_0 > c$ می‌بود آن را رد می‌کردیم. آزمـون یاد شده این واقعیت راکـه v_0 مقدار مشاهــده شده متغیــری تصادفی است کــه دارای تـوزیعــی موسوم بــه **توزیع-F** بـا $(n_1 - ۱, n_2 - ۱)$ درجهٔ آزادی است توجیه می‌کند، مشروط براینکه فرض درست‌باشد (اثبات درمرجع [H۴]، ر. ك. ضمیمهٔ ۱.) توزیـع-F با (m,n) درجهٔ آزادی بـه وسیلهٔ آر. ای. فیشر تعریف شده‌است ودارای تابع توزیع $F(z) = ۰$ به‌ازای $z < ۰$ و

$$F(z) = K_{mn} \int_0^z t^{(m-2)/2} (mt+n)^{-(m+n)/2} dt \qquad (z \geqslant 0) \tag{۱۳}$$

است، که $K_{mn} = m^{m/2} n^{n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}m\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)$.

مسائل بخش ۲۰.۵ ۱

۱. با فرض نرمال بودن وبااستفاده ازنمونهٔ ۱، ۱-، ۳، ۸-، ۶، ۰ (انحرافات سمت (برحسب مضارب ۰٫۰۱ رادیان) درچرخش ۱۴۳rdی مـاهوارهٔ تل استار)، $\mu = ۰$ رادرمقابل $\mu > ۰$ آزمون کنید.

۲. بااستفاده ازنمونهٔ مثال۱، بخش۲۰.۳، فرض $\mu = ۰٫۸۰$ in. (طول جعبه‌ها) را در برابرفرض مقابل $\mu \neq ۰٫۸۰$ in. آزمون کنید. (فرض‌کنید توزیع نرمال است.)

۳. بااستفاده از داده‌های بوفن، جدول ۲۰.۶، بخش ۲۰.۵، فرض سالم بودن سکه رادر برابراین فرض مقابل‌که احتمال‌آمدن شیر بیشترازخط است‌آزمون‌کنید؛ سالم بودن به‌این معنی است که شانس‌آمدن شیروخط یکی است.

۴. این فرض راکه اختلاف معنی‌داری بین دوروش اندازه‌گیری‌نشاستهٔ موجود درسیب‌زمینیها وجود ندارد آزمون‌کنید، برای ایـن منظورفرض‌کنید توزیع نرمال است و

نمونهٔ (اختلاف مقادیر متناظر از ۱۶ سیب زمینی، اندازه گرفته شده به صورت مضارب ۰٫۱٪)

۲ ۰ ۰ ۱ ۲ ۲ ۳ −۳ ۱ ۲ ۳ ۰ −۱ ۱ −۲ ۱

را مورد استفاده قرار دهید.

۵. شرکتی روغنهای تولیدی خود را در قوطیهای ۵۰۰ گرمی می‌فروشد. این شرکت مایل است بداند که آیا میانگین اوزان، در تراز ۵٪، اختلاف معنی‌داری با ۵۰۰ گرم دارد یا نه، اگر چنین اختلافی وجود داشت ماشینی را که قوطیها را پر می‌کند تنظیم می‌کنند. یك فرض و یك فرض مقابل در نظر بگیرید و با فرض نرمال بودن توزیع و با استفاده از یك نمونه، شامل ۱۰ قوطی با میانگین ۴۹۶ گرم و انحراف معیار ۵ گرم، آزمون را انجام دهید.

۶. هرگاه نمونه‌ای شامل ۵۰ حلقه لاستیك از نوعی معین دارای عمر متوسط ۳۲۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار ۴۰۰۰ کیلومتر باشد، آنگاه آیا تولیدکننده می‌تواند ادعا کند که میانگین واقعی عمر چنین لاستیکی بیشتر از ۳۰۰۰۰ کیلومتر است؟ فرضی در نظر بگیرید و با فرض نرمال بودن، آن را در سطح ۵٪ آزمون کنید.

۷. نمودار منحنیهای OCی مذکور در مثال ۲، موارد (الف) و (ب)، رسم کنید.

۸. نشان دهید که در مورد یك توزیع دو نوع خطایی را که در آزمون فرض $H_0 : \mu = \mu_0$ در برابر فرض مقابل $H_1 : \mu = \mu_1$ پیش می‌آید می‌توان، با انتخاب نمونهٔ به قدر کافی بزرگ به اندازهٔ دلخواه کوچك کرد (ولی نمی‌توان صفر کرد).

۹. سه نمونه بتن مرغوب در اختیار داریم که مقاومتشان در برابر فشار به ترتیب ۳۵۷، ۳۵۹، ۴۱۳ (کیلوگرم بر سانتیمتر مربع) است؛ این کمیت در مورد سه نمونهٔ بتن معمولی برابر با ۳۴۶، ۳۵۸، ۳۰۲ شده است. برابری میانگینهای جامعه، $\mu_1 = \mu_2$، را در برابر فرض مقابل $\mu_1 > \mu_2$ آزمون کنید. (نرمال بودن و تساوی واریانسها را فرض کنید.)

۱۰. با فرض نرمال بودن و تساوی واریانسها و با استفاده از نمونه‌های مستقلی با $n_1 = 9$، $\bar{x} = 12$، $s_1 = 2$، $n_2 = 9$، $\bar{y} = 15$، $s_2 = 2$، $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ را در برابر $\mu_1 \neq \mu_2$ آزمون کنید؛ α را ۵٪ انتخاب کنید.

۱۱. دو نمونهٔ ساده طوری تشکیل دهید که فرض تساوی میانگینهای جامعه باوجود بزرگی تفاضل میانگینهای دو نمونه رد نشود.

۱۲. به‌منظور کسب اطمینان از کارآیی یك روش الکتریکی برای اندازه گیری دما، دو نمونه در نظر گرفته می‌شوند. با فرض نرمال بودن و تساوی واریانسهای جامعه‌های متناظر،

فرض برابری میانگینهای جامعه را آزمون کنید. نمونه‌ها عبارتند از [°C]

۱۰۴٫۹	۱۰۶٫۰	۱۰۷٫۰	۱۰۶٫۳	۱۰۶٫۹
۱۰۵٫۶	۱۰۶٫۱	۱۰۶٫۸	۱۰۶٫۷	۱۰۶٫۵

۱۳. هر گاه داروی استانداردی ۷۰٪ از مریضهای مبتلا به بیماری معینی را بهبود بخشد و داروی جدیدی ۱۴۸ مریض از ۲۰۰ مریض را بهبود بخشد، آیا می‌توان گفت که داروی جدید داروی بهتری است.

۱۴. با استفاده از نمونه‌هایی با حجم ۱۰ و ۵ و با واریانسهای $s_1^2 = 50$ و $s_2^2 = 20$ و با فرض نرمال بودن جامعه‌های مربوط به آنها، فرض $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ را در برابر فرض مقابل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ آزمون کنید. α را ۵٪ بگیرید.

۱۵. با استفاده از دو نمونه (وزن گرد و غبار موجود در چند لولهٔ معین، که برحسب میلی گرم اندازه‌گیری شده است) که توسط انجمن پژوهش استخراج زغال سنگ بریتانیا ارائه شده است و با فرض نرمال بودن جامعه‌های مربوطه، تحقیق کنید که واریانس جامعه‌ها باهم تفاوت معنی‌داری دارند یا نه. نمونه‌ها عبارتند از

۳۵	۹۰	۶۵	۳۵	۴۰	۱۰۰	۹۰	۸۵	۷۰	۷۰	۲۰	۷۵
						۴۰	۶۵	۵۰	۵۵	۳۵	۲۰

۱۶.۲۰ کنترل کیفیت

هیچ فرایند تولیدی آنقدر کامل نیست که تمام محصولات آن دقیقاً مثل هم باشند. همواره تفاوتهای کوچکی وجود دارند که از تعداد زیادی عوامل کوچك غیرقابل کنترل ناشی می‌شوند و بنابراین باید آنها را به صورت نوسانات شانسی مورد بررسی قرار داد. اطمینان یافتن از آنکه تولیدات دارای مقادیر (مثلا طول، استحکام، یا هرخاصیتی که ممکن است درحالتی خاص مهم باشد) مطلوب است اهمیت دارد. برای این منظور می‌توان این فرض را که تولیدات دارای خاصیت مطلوب هستند آزمون کرد، مثلا $\mu = \mu_0$ را می‌توان فرض کرد که در آن μ_0 مقدار موردنظر است. اگر این کار بعد از تولید مقدار زیادی کالا (مثلا بعد از تولید ۱۰۰۰۰۰ پیچ) انجام شود، آزمون روشن می کند که کیفیت محصولات تولید شده چگونه بوده است، ولی دیگر برای تغییردادن نتایج نامطلوب خیلی دیر است. بهتر است که آزمون درخلال تولید محصول انجام گیرد. این کار درفواصل زمانی منظم (مثلا، هر نیم ساعت یا هرساعت یك بار) انجام می‌شود و **کنترل کیفیت** نام دارد. هر بار نمونه‌ای با حجم معین درعمل، ۳ تا ده قلم در نظر گرفته می‌شود. اگر فرض رد شود، فرایند تولید را متوقف کرده به جستجوی عواملی که سبب انحراف شده‌اند می‌پردازند.

هرگاه فرایند تولید را درصورتی که پیشرفت کارخوب باشد متوقف کنیم مرتکب خطایی ازنوع I شده‌ایم. اگرفرایند رادرصورت نامرتب بودن‌آن متوقف نکنیم، مرتکب خطایی ازنوع II شده‌ایم (ر. ك. بخش ۱۵.۲۰).

نتیجهٔ هرآزمون ، روی چیزی که **نمودارکنترل** نام دارد رسم می‌شود. این نمودار درسال ۱۹۲۴ توسط دبلیو.ای.شیوهارت پیشنهاد شده‌است وسبب می‌شود که کنترل کیفیت درعمل تأثیر بیشتری داشته باشد.

نمودارکنترل در مورد میانگین. یك‌مثال‌تشریحی‌ازنمودارکنترل‌درقسمت فوقانی، شکل ۳۹۱ آمده‌است. این نمودار کنترل درمورد میانگین ، **حدپایین‌کنترل LCL** ، **خط کنترل مرکزی CL** و **حد بالای کنترل UCL** رانمایش می‌دهد. **دوحدکنترل** بامقادیر بحرانی c_1 و c_2 درحالت (ج) مثال ۲ ، بخش ۱۵.۲۰ ، متناظرهستند. وقتی که میانگین نمونـه‌ای در خارج از حـدود کنترل افتاد ، فرض را ردکرده ادعـا می کنیم کـه فرایند تولید «خارج ازکنترل» است، یعنی ادعا می‌کنیم که درتراز فرایند انتقالی رخ داده‌است. این عمل هرزمان که نقطه‌ای ازحدود تجاوز کند انجام می‌شود.

اگرحدود کنترل خیلی بازانتخاب شوند، هیچ انتقال فرایندی مشاهده نخواهیم کرد. ازطرف دیگرهرگاه حدود کنترل راخیلی تنگ انتخاب کنیم قادربه اجرای عملیات تولید نخواهیم بود زیرا باید مکرر برای جستجوی اشکالی که وجود ندارد عملیات را متوقف کنیم. تراز معنی‌داربودن معمولا $\alpha = ۱\%$ می گیرند. بنابه قضیهٔ۲، بخش ۱۴.۲۰، وجدول A۹، ضمیمهٔ ۴، درمورد توزیع نرمال حدود کنترل متناظر برای میانگین عبارتنداز

$$(۱) \qquad \mathrm{UCL} = \mu_0 + ۲٫۵۸ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \mathrm{LCL} = \mu_0 - ۲٫۵۸ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

دراینجا σ معلوم فرض می‌شود. هرگاه σ نامعلوم باشد، انحراف معیار ۲۰ یا ۳۰ نمونهٔ اول رامحاسبه کرده واسطهٔ حسابی آنها رابه صورت تقریبی برای σ بـه‌کارمی‌بریم. خط شکسته که درشکل ۳۹۱ میانگینهارا بههم وصل‌می کند صرفاً برای مشخصتر کردن‌نتایج‌است.

نمودارکنترل درمورد واریانس. علاوه برمیانگین، اغلب می‌توان واریانس، انحراف معیار، یادامنه راکنترل کرد. برای ترسیم یك نمودار کنترل درمورد واریانس‌در توزیع نرمال، می‌توان روش مذکور درمثال۴، بخش ۱۵.۲۰، راجهت تعیین حدودکنترل بـه‌کارگرفت. مرسوم است که تنها یك حدکنترل، یعنی ، حد بالای کنترل رامورد استفاده قراردهند. باتوجه به مثال۴، بخش ۱۵.۲۰، مقداراین حد عبارت است از

$$(۲) \qquad \mathrm{UCL} = \frac{\sigma^2 c}{n-1}$$

که درآن c ازمعادلهٔ

$$P(Y > c) = \alpha \text{ ، } \quad \text{یعنی} \quad P(Y \leqslant c) = ۱ - \alpha$$

جدول ۱۴۰۲۰

دوازده نمونهٔ ۵ مقداری (قطراستوانه‌های کوچك برحسب میلیمتر)

شمارهٔ نمونه	مقادیر نمونه	$\bar{x}$	s	R
۱	۴٫۰۶ ۴٫۰۸ ۴٫۰۸ ۴٫۰۸ ۴٫۱۰	۴٫۰۸۰	۰٫۰۱۴	۰٫۰۴
۲	۴٫۱۰ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲ ۴٫۱۲ ۴٫۱۲	۴٫۱۱۲	۰٫۰۱۱	۰٫۰۲
۳	۴٫۰۶ ۴٫۰۶ ۴٫۰۸ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲	۴٫۰۸۴	۰٫۰۲۶	۰٫۰۶
۴	۴٫۰۶ ۴٫۰۸ ۴٫۰۸ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲	۴٫۰۸۸	۰٫۰۲۳	۰٫۰۶
۵	۴٫۰۸ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲ ۴٫۱۲ ۴٫۱۲	۴٫۱۰۸	۰٫۰۱۸	۰٫۰۴
۶	۴٫۰۸ ۴٫۱۰ ۴٫۱۰ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲	۴٫۱۰۰	۰٫۰۱۴	۰٫۰۴
۷	۴٫۰۶ ۴٫۰۸ ۴٫۰۸ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲	۴٫۰۸۸	۰٫۰۲۳	۰٫۰۶
۸	۴٫۰۸ ۴٫۰۸ ۴٫۱۰ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲	۴٫۰۹۶	۰٫۰۱۷	۰٫۰۴
۹	۴٫۰۶ ۴٫۰۸ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲ ۴٫۱۴	۴٫۱۰۰	۰٫۰۳۲	۰٫۰۸
۱۰	۴٫۰۶ ۴٫۰۸ ۴٫۱۰ ۴٫۱۲ ۴٫۱۶	۴٫۱۰۴	۰٫۰۳۸	۰٫۱۰
۱۱	۴٫۱۲ ۴٫۱۴ ۴٫۱۴ ۴٫۱۴ ۴٫۱۶	۴٫۱۴۰	۰٫۰۱۴	۰٫۰۴
۱۲	۴٫۱۴ ۴٫۱۴ ۴٫۱۶ ۴٫۱۶ ۴٫۱۶	۴٫۱۵۲	۰٫۰۱۱	۰٫۰۲

وجدول توزیع مربع کی (جدول A۱۲، ضمیمهٔ۴) با $n-1$ درجهٔ آزادی به‌دست می‌آید؛ دراینجا α که (مثلا ۵٪ یا ۱٪گرفته می‌شود) عبارت‌است ازاحتمال آنکه مقدارمشاهده‌شدهٔ s^2 از S^2 دریك نمونه بزرگترازحد بالای کنترل باشد.

اگرنمودارکنترلی برای واریانس بخواهیم که هم حدبالای کنترل UCL و هم حد پایین کنترل LCL راداشته باشد، این‌حدود عبارت خواهند بود از

$$\mathrm{UCL}=\frac{\sigma^2 c_2}{n-1} \quad \text{و} \quad \mathrm{LCL}=\frac{\sigma^2 c_1}{n-1} \tag{۳}$$

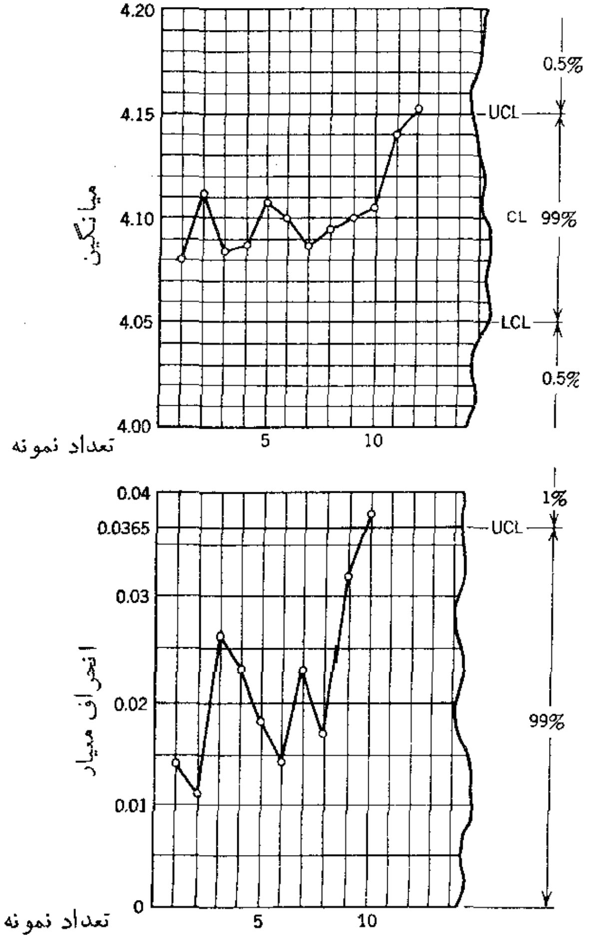
که درآن c_1 و c_2 ازمعادلات

$$P(Y \leqslant c_۲) = ۱ - \frac{\alpha}{۲} \quad و \quad P(Y \leqslant c_۱) = \frac{\alpha}{۲} \tag{۴}$$

وجدول A۱۲، ضمیمهٔ ۴، با $n-۱$ درجهٔ آزادی به‌دست می‌آیند.

نمودارکنترل برای انحراف معیار. به همین ترتیب، به منظور رسم نمودارکنترل برای انحراف معیار، نیاز به حد بالای کنترل

$$\mathrm{UCL} = \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{n-۱}} \tag{۵}$$



شکل ۳۹۱. نمودارکنترل درمورد میانگین (قسمت فوقانی شکل) وانحراف معیاربرای نمونهٔ مذکور درجدول ۱۲.۲۰

داریم‌که از (۲) به دست می‌آید. مثلا، درجدول ۱۲.۲۰ داریم ۵ $=n$. با فرض‌آنکه جامعهٔ مربوطه نرمال، باانحراف معیار ۰ر۰۲ $=\sigma$ ، است و با انتخاب ۱٪ $=\alpha$ ازمعادلهٔ

$$P(Y \leqslant c) = ۱ - \alpha = \%۹۹$$

وجدول A۱۲، ضمیمهٔ ۴، با ۴درجهٔ‌آزادی ۱۳ر۲۸ $=c$ وبنابه (۵)، مقدارمتناظرعبارت است از

$$\mathrm{UCL} = \frac{۰ر۰۲\sqrt{۱۳ر۲۸}}{\sqrt{۴}} = ۰ر۰۳۶۵$$

که درقسمت پایین شکل ۳۹۱ نشان داده شده‌است.

نمودارکنترل درمورد انحراف معیار با هردوحد بالا و پایین‌کنترل از (۳) به‌دست می‌آید.

نمودارکنترل در مورد دامنه. برای‌کنترل σ^2 یا σ باید به‌ترتیب s^2 یا s را محاسبه‌کرد. چون ممکن است این محاسبه برای اشخاصی که آموزش کافی در ریاضی ندیده‌اند تولید اشکال کند معمولا کنترل واریانس یا انحراف معیار را با کنترل دامنهٔ R (بزرگترین مقدارنمونه منهای کوچکترین مقدارنمونه) جایگزین می کنند. درمورد توزیع نرمال می‌توان نشان دادکه انحراف معیار σ باامید ریاضی متغیرتصادفی R^* که R مقدار مشاهده شدهٔ آن است متناسب است، می‌توان $\sigma = \lambda_n E(R^*)$ رامثال زدکه درآن ضریب تناسب λ_n به n ، حجم نمونه، بستگی داشته ودارای مقادیرزیراست :

n	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	۰ر۸۹	۰ر۵۹	۰ر۴۹	۰ر۴۳	۰ر۴۰	۰ر۳۷	۰ر۳۵	۰ر۳۴	۰ر۳۲

n	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	۰ر۳۱	۰ر۲۹	۰ر۲۸	۰ر۲۸	۰ر۲۷	۰ر۲۵	۰ر۲۳	۰ر۲۲

چون R تنها به دومقدارنمونه وابسته است، اطلاعاتی‌که درمورد نمونه به‌دست می‌دهدکمترازاطلاعاتی است‌که از s حاصل می‌شود. واضح است‌که هرچه حجم نمونهٔ n بزرگترباشد، اطلاعاتی که دراثرجایگزین‌کردن s با R ازدست می‌دهیم بیشترخواهد بود. درعمل وقتی s رابه‌کارمی‌بریم،که n بزرگتراز ده باشد.

توجه کنیدکه برآورد انحراف معیاربراساس دامنه یك امتحان تقریبی‌ساده درمحاسبهٔ s است. این روش وقتی مفیداست‌که شخص دیگری (مثلاازیك مرکزمحاسباتی محاسبات

عددی را برای آمارگر انجام می‌دهد. در این صورت سوءتفاهمات و اشتباهات کاملاً مشترک هستند، و بنابراین امتحانهای سریع از اهمیت فزاینده‌ای برخوردارند.

مسائل بخش ۱۶.۲۰

۱. محصولات ماشینی که قوطیهای روغن ماشین را پرمی‌کند تشکیل جامعه‌ای نرمال با میانگین ۱ گالن و انحراف معیار ۰٫۰۲ گالن می‌دهند. نمودار کنترلی از نوعی که در شکل ۳۹۱ دیدیم برای کنترل میانگین ترسیم کنید (یعنی LCL و UCL را بیابید)؛ حجم نمونه را ۴ بگیرید.

۲. **(نمودار کنترل سه ـ سیگما).** نشان دهید که هرگاه درمسئلهٔ ۱، تراز معنی‌دار را $\alpha = \%۳$ اختیار کنیم آنگاه نتیجه می‌شود $\mathrm{LCL} = \mu - ۳\sigma/\sqrt{n}$ و $\mathrm{UCL} = \mu + ۳\sigma/\sqrt{n}$ وسپس مقادیرعددی مربوطه را بیابید.

۳. ده نمونهٔ دوعضوی از پیچهای تولید شده درنظرمی‌گیریم. مقادیراین نمونه‌ها (طول برحسب میلیمتر) عبارتند از

شمارهٔ نمونه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
طول	۲۷٫۴	۲۷٫۴	۲۷٫۵	۲۷٫۳	۲۷٫۹	۲۷٫۶	۲۷٫۶	۲۷٫۸	۲۷٫۵	۲۷٫۳
	۲۷٫۶	۲۷٫۴	۲۷٫۷	۲۷٫۴	۲۷٫۵	۲۷٫۵	۲۷٫۴	۲۷٫۳	۲۷٫۴	۲۷٫۷

بافرض آنکه جامعهٔ نرمال دارای میانگین ۲۷٫۵ و واریانس ۰٫۰۲۴ است وبااستفاده از (۱)، نمودارکنترلی برای میانگین ترسیم کنید و نمودار میانگینهای نمونه‌ها را بر روی نمودارمشخص کنید.

۴. میانگینهای ده نمونهٔ زیر (ضخامت واشرها، مقادیر کد شده) را برروی یک نمودار کنترل مربوط به میانگینها، بافرض آنکه جامعه نرمال با میانگین ۵ وانحراف معیار ۱٫۵۵ است، رسم کنید.

زمان	۸:۰۰	۸:۳۰	۹:۰۰	۹:۳۰	۱۰:۰۰	۱۰:۳۰	۱۱:۰۰	۱۱:۳۰	۱۲:۰۰	۱۲:۳۰
مقادیر نمونه	۳	۳	۵	۷	۷	۴	۵	۶	۵	۵
	۴	۶	۲	۵	۳	۴	۶	۴	۵	۲
	۸	۶	۵	۴	۶	۳	۴	۶	۶	۵
	۴	۸	۶	۴	۵	۶	۶	۴	۴	۳

۵. دامنهٔ نمونه‌های مذکور درمسئلهٔ ۴ را برروی یك نمودار کنترل مربوط به دامنه‌ها را رسم کنید.

۶. نظر به‌اینکه وجود یك نقطه درخارج ازحدود کنترل برای میانگین دلالت براشکالی درکار دارد، اشتباه جستجوی اشکال را هنگامی که اشکالی وجود ندارد هرچند دفعه یك‌بارمرتکب خواهیم شد هرگاه (الف) حدود ۱ـ سیگما، (ب) حدود ۲ـ سیگما را مورداستفاده قراردهیم؟ (نرمال بودن رامفروض بگیرید.)

۷. چه تغییری درمعنی حدود کنترل (۱) حاصل می‌شود؟ هرگاه بخواهیم نمودار کنترلی بااین حدود را درمورد جامعه‌ای که نرمال نیست به‌کاربریم.

۸. هرگاه به جای $\bar{x}$ مجموع مقادیرنمونه، یعنی، $x_1+\ldots+x_n$ را به‌کاربریم چه LCL و UCLی راباید به‌جای (۱) به‌کاربریم؟ درمورد شکل ۳۹۱، این حدود را مشخص کنید.

۹. **(تعدادکالاهای معیوب)** درمورد نمودار کنترل برای‌کالاهای معیوب، LCL ، CL و UCL رابااستفاده ازتوزیع دوجمله‌ای، به‌شرح زیر، تعیین‌کنید. (الف) فرمولهایی بیابیدکه LCL و UCL را متناظربا $\mu\pm 3\sigma$ قرار دهند. (ب) هرگاه بخواهیم نمونه‌هایی باحجم ۱۰ دریك تولید انبوه ازنوع معینی ازمقادیررا درنظربگیریم وبر اساس تجارب گذشته بدانیم که درصد کالاهای معیوب درحدود ۷٫۰ است مقادیر عددی رابیابید، مشروط براینکه فرایند تحت‌کنترل‌آماری باشد. توجه‌کنیدکه به‌خاطر کوچك بودن p، نتیجهٔ فرمول مربوط به LCL عددی منفی خواهد شد. درچنین حالتی LCL را برابر ۰ می‌گیریم وتنها UCL رابه‌کار می‌بریم.

۱۰. **(تعداد عیبها در واحد)** نمودار c یا نمودار عیب در واحد برای کنترل X، تعدادعیبها درواحد (مثلا، تعداد عیبهادر ۱۰ مترکاغذ، تعداد میخهای مفقود شده هنگام پرچ شدن روی‌بال هواپیما، وغیره) به‌کارمی‌رود. (الف) فرمولهایی برای CL و LCL ، UCL متناظربا $\mu\pm 3\sigma$ ، بافرض‌آنکه X دارای توزیع‌پواسن است ، بیابید. (ب) CL ، LCL و UCL رادریك فرایندکنترل تعداد نقصهای روی شیشه‌های جام محاسبه کنید؛ برای این منظورفرض کنیدکه این‌تعداد، درصورتی‌که فرایند تحت‌کنترل‌آماری باشد، به‌طور متوسط برابر ۲٫۵ درهر جام است.

۱۷.۲۰ نمونه‌گیری برای پذیرش

نمونه‌گیری برای پذیرش درتولید انبوه وقتی‌که یك تولید کننده به یك مشتری توده‌ای مرکب از N کالا تحویل می‌دهد به‌کاربرده می‌شود. درچنین وضعیتی باید برای پذیرش یا رد یك تودهٔ کالا تصمیم گرفته شود. اغلب اوقات این تصمیم براساس بررسی نمونه‌ای به

حجم n از تودهٔ کالا و تعیین تعداد **کالاهای معیوب**، که به‌طور خلاصه **معیوبها** نامیده می‌شوند، اتخاذ می‌شود؛ کالاهای معیوب آنهایی هستند که یکی از خصوصیات موردنظر (اندازه، رنگ، استحکام، یا هرچیزمهم دیگر) را نداشته باشند. اگر x، تعدادکالاهای معیوب در نمونه، بزرگتر ازعدد معینی مانند $c\ (<n)$ نباشد، کالا پذیرفته می‌شود. اگر $x>c$، کالا رد می‌شود. c را تعداد مجاز معیوبها یا **عدد پذیرش** می‌نامند. واضح است که تولیدکننده ومشتری باید برروی یك **طرح نمونه‌گیری** یعنی روی حجم نمونهٔ معین n وتعداد مجاز c، باهم توافق کنند. چنین طرحی را **طرح نمونه‌گیری تك** می‌نامند زیرا چنین طرحی بر اساس یك نمونهٔ تك قرارداد. طرحهای نمونه‌گیری دوتایی که درآنها از دونمونه استفاده می‌شود، بعداً مورد بررسی قرار می‌گیرند.

فرض می‌کنیم A پیشامد پذیرش یك‌کالا باشد. واضح است که احتمال متناظر با A، یعنی $P(A)$، نه فقط به n و c بلکه به تعداد کالاهای معیوب توده نیز وابسته است. فرض می‌کنیم M نمایش این‌عدد باشد ومتغیرتصادفی X تعداد معیوبهای‌یك نمونه رانشان دهد، ونمونه‌گیری بدون جایگذاری باشد. آنگاه (ر.ك. بخش ۹.۲۰)

$$(۱)\qquad P(A)=P(X\leqslant c)=\sum_{x=0}^{c}\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}\Big/\binom{N}{n}.$$

اگر $M=0$ (توده شامل‌کالای معیوب نباشد)، آنگاه X مقدار 0 را اختیارمی‌کند، و

$$P(A)=\binom{0}{0}\binom{N}{n}\Big/\binom{N}{n}=1$$

به‌ازای مقادیرمشخص n و c وبا افزایش M احتمال $P(A)$ تنزل می‌کند. اگر $M=N$ (تمام کالاهای تودهٔ معیوب باشد)، آنگاه X مقدار n را اختیار می‌کند، و داریم $P(A)=P(X\leqslant c)=0$ زیرا $c<n$.

نسبت $\theta=M/N$ **نسبت معیوبها** در توده نامیده می‌شود. با توجه به آنکه $M=N\theta$، (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$(۲)\qquad P(A;\theta)=\sum_{x=0}^{c}\binom{N\theta}{x}\binom{N-N\theta}{n-x}\Big/\binom{N}{n}.$$

چون θ می‌تواند یکی از $N+1$ مقدار 0، $1/N$، $2/N$، ...، N/N را اختیارکند، احتمال $P(A)$ تنها به‌ازای این مقادیرتعریف می‌شود. به‌ازای مقادیر مشخص n و c، می‌توان $P(A)$ رابه صورت تابعی از θ ترسیم کرد. نتیجهٔ این ترسیم $N+1$ نقطه است. این‌نقاط راتوسط یك منحنی هموار، که **منحنی مشخصهٔ عمل‌کنندهٔ** (منحنی OCی) طرح نمونه‌گیری موردنظرنامیده می‌شود، به هم وصل می‌کنیم.

مثال ۱

می‌خواهیم چندبسته تیغهٔ رنده انتخاب کنیم. درهر بسته ۲۰ عدد تیغهٔ رنده وجود دارد؛ طرح نمونه‌گیری تکی به شرح زیرمورد استفاده قرارمی گیرد. نمونه‌ای ۲تایی ازتیغه‌ها انتخاب می‌شود، وبستهٔ مربوط به‌آن پذیرفته می‌شود اگروتنها اگردوتیغهٔ نمونه خوب باشند. دراین مورد $N=۲۰$ ، $n=۲$ ، $c=۰$، و (۲) به صورت زیردرمی آید:

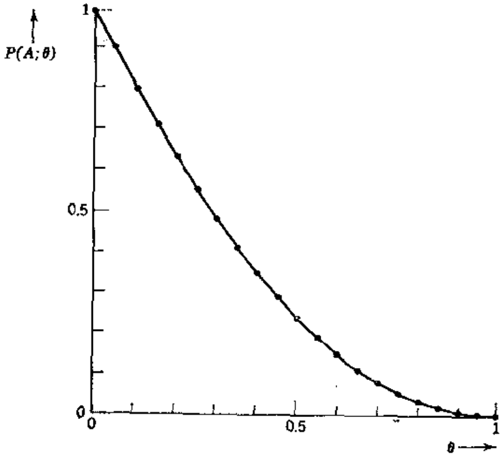
$$P(A;\theta)=\binom{۲۰\theta}{۰}\binom{۲۰-۲۰\theta}{۲}\Big/\binom{۲۰}{۲}=\frac{(۲۰-۲۰\theta)(۱۹-۲۰\theta)}{۳۸۰}$$

مقادیرعددی عبارتند از

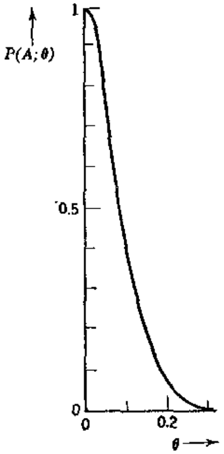
θ	۰٫۰۰	۰٫۰۵	۰٫۱۰	۰٫۱۵	۰٫۲۰
$P(A,\theta)$	۱٫۰۰	۰٫۹۰	۰٫۸۱	۰٫۷۲	۰٫۶۳

منحنی OC درشکل ۳۹۲ نشان داده شده‌است. ▲

دربیشترموارد عملی θ کوچك است (کمتراز ۱۰٪). دربسیاری موارد N ، حجم تودهٔ کالا، خیلی بزرگ است (۱۰۰۰ ، ۱۰۰۰۰ و غیره) ، طوری که می‌توان توزیع فوق هندسی موجود در (۱) و (۲) راباتوزیعی دوجمله‌ای، با $p=\theta$ ، تقریب زد. آنگاه اگر n طوری باشدکه $n\theta$ مناسب باشد (مثلا ، کمتراز ۲۰)، می‌توان توزیع فوق راباتوزیع پواسنی، با میانگین $\mu=n\theta$، تقریب زد. درآن صورت بنابر (۲) داریم



شکل ۳۹۲. منحنی OCی طرح نمونه‌گیری تك با $n=۲$ و $c=۰$ ، برای توده‌ای به حجم $N=۲۰$



شکل ۳۹۳. منحنی OC در مورد مثال ۲

$$P(A;\theta)\sim e^{-\mu}\sum_{x=0}^{c}\frac{\mu^x}{x!} \qquad (\mu=n\theta). \tag{۳}$$

مثال ۲

فرض کنید درمورد توده‌هایی باحجم بزرگ طرح نمونه گیری زیرمورداستفاده قرارگرفته است. نمونه‌ای باحجم $n=۲۰$ درنظر گرفته می‌شود. اگراین نمونه بیش‌از ۱ کالای معیوب نداشته باشد پذیرفته می‌شود؛ هرگاه نمونه شامل ۲ کالای معیوب یا بیشتر بود رد می‌شود. دراین طرح، باتوجه به (۳) به‌دست می‌آوریم

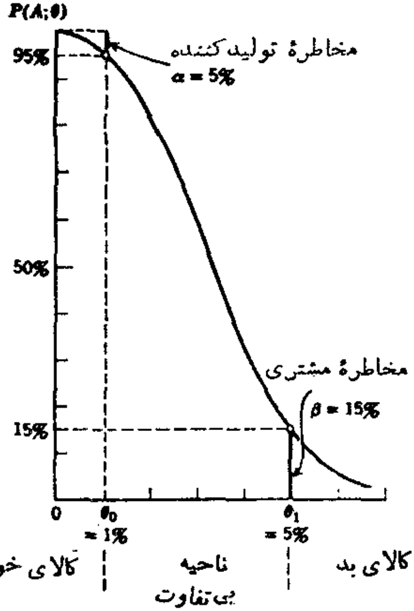
$$P(A;\theta)\sim e^{-۲۰\theta}(۱+۲۰\theta).$$

منحنی OCی مربوطه درشکل ۳۹۳ نشان داده شده‌است. ▲

حال می‌خواهیم دونوع خطای ممکن درنمونه گیری برای پذیرش و مسئلهٔ انتخاب n و c راکه به‌این بحث مربوط می‌شود بررسی کنیم. درنمونه گیری برای پذیرش تولید کننده ومشتری دارای علائق مختلفی هستند. تولیدکننده مایل‌است احتمال ردشدن یك توده کالای «خوب» یا «پذیرفتنی» عددی کوچك باشدکه ما آن را α می‌نامیم. مشتری (خریدار) مایل است احتمال پذیرش یك‌کالای «بد» یا «ناپذیرفتنی» عددکوچك β باشد. برای بیان دقیقترمطلب، فرض می کنیم هردوطرف توافق‌کنندکه اگردرمورد تودهٔ کالایی θ ازعددمعین θ_0 تجاوزنکندآن‌توده یك تودهٔ پذیرفتنی است‌و درصورتی‌که θ بزرگتراز یا مساوی‌باعدد معین θ_1 باشد تودهٔ موردنظریك تودهٔ ناپذیرفتنی است. دراین‌صورت احتمال ردتوده‌ای با $\theta\leqslant\theta_0$ بوده ومخاطرهٔ تولیدکننده نامیده می‌شود. این‌مخاطره باخطای‌نوع I در آزمون فرض (بخش ۱۵.۲۰) متناظر است. β احتمال پذیرش توده‌ای با $\theta\geqslant\theta_1$ است و **مخاطرهٔ مشتری** نامیده می‌شود. این نوع مخاطره هم باخطای نوع II (بخش ۱۵.۲۰) متناظر است. شکل ۳۹۴ مثالی را نشان می‌دهد. θ_0 **ترازکیفیت پذیرفتنی** (AQL) نامیده می‌شود، θ_1 را **درصد اغماض معیوب توده** (LTPD) یا **ترازکیفیت رد شدنی** (RQL) می‌نامند. توده‌ای با $\theta_1>\theta>\theta_0$ را می‌توان تودهٔ بی تفاوت نامید.

باتوجه به‌شکل ۳۹۴ مشاهده می کنیم که نقاط $(\theta_0, ۱-\alpha)$ و (θ_1, β) روی منحنی OC قرار دارند. می‌توان نشان دادکه در مورد توده‌های بزرگ ابتدا می‌توان θ_0 و $\theta_1(>\theta_0)$، α و β را انتخاب‌کرد وسپس n و c را طوری تعیین‌کردکه منحنی OC ازنزدیکی‌نقاط موردنظربگذرد. طرحهای نمونه‌گیری درمورد مقادیرخاص α و β، θ_0 و θ_1 به چاپ رسیده‌اند؛ ر. ك. مرجع [۶]، ضمیمهٔ ۱.

رابطهٔ نزدیکی بین بازرسی نمونه‌گیری و آزمون فرض، به شرح زیر، موجود است:



شکل ۳۹۴. منحنی OC ، مخاطرهٔ تولیدکننده و مشتری

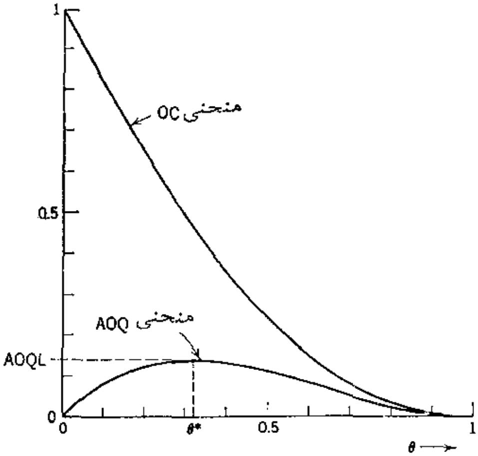
بازرسی نمونه‌گیری	آزمون فرض
تراز کیفیت پذیرفتنی (AQL) $\theta=\theta_0$	فرض $\theta=\theta_0$
درصد اغماض معیوب توده (LTPD) $\theta=\theta_1$	فرض مقابل $\theta=\theta_1$
تعداد مجاز معیوب c	مقدار بحرانی c
مخاطرهٔ تولیدکننده ، درمورد توده‌ای با $\theta\leqslant\theta_0$	α ، احتمال ارتکاب خطای نوع اول (تراز معنی‌دار بودن)
مخاطرهٔ مشتری، β، درمورد پذیرش توده‌ای با $\theta\geqslant\theta_1$	β، احتمال ارتکاب خطای نوع دوم

عمل نمونه‌گیری به خودی خود مشتری را به‌اندازهٔ کافی ازضرر مصون نمی‌دارد. در واقع، هر گاه تولیدکننده مجاز باشد توده‌ای را که قبلا رد شده، بدون ذکر این موضوع، باردیگر به معرض فروش بگذارد، آنگاه حتی کالاهای بد نیز بالاخره پذیرفته خواهند شد. برای مصونیت مشتری درمقابل این امکان وسایر امکانات، تولیدکننده می‌تواند بامشتری بر سراین موضوع توافق کند که تودهٔ رد شده تصفیه شود، یعنی ۱۰۰٪ بازرسی شود، کالا به

کالا، وهمهٔ کالاهای معیوب آن را خارج کرده به جای آنها کالای سالم بگذارند.[۱] فرض می‌کنیم کارخانه‌ای θ۱۰۰٪ کالای معیوب تولید کند و توده‌های رد شدهٔ آن تصفیه شوند، آنگاه K توده به‌اندازهٔ N شامل KN کالا است، که $KN\theta$ ی آن معیوب است $KP(A;\theta)$ کالا پذیرفته می‌شود؛ این مقدار شامل $KPN\theta$ کالای معیوب است. توده‌های رد و تصفیه‌شده شامل هیچ کالای معیوبی نیستند. از این‌رو بعداز تصفیه نسبت معیوبها در K توده برابر است با $KPN\theta/KN=\theta P(A;\theta)$. این تابع θ را **کیفیت خروجی متوسط** (AOQ) نامیده و با $\text{AOQ}(\theta)$ نمایش می‌دهند. بنا براین

$$\text{AOQ}(\theta)=\theta P(A;\theta) \tag{۴}$$

به ازای یك طرح نمونه‌گیری مفروض، تابع مزبور و نمودارش، منحنی کیفیت خروجی متوسط (منحنی AOQ)، رابه سادگی می‌توان ازروی منحنی OC و $P(A;\theta)$ به‌دست آورد. شکل ۳۹۵ مثالی رانشان می‌دهد.



شکل ۳۹۵. منحنیهای OC و AOQ برای نقشهٔ ساده درشکل ۳۹۲

واضح است که $\text{AOQ}(0)=0$. همچنین $\text{AOQ}(1)=0$ زیرا $P(A;1)=0$. باتوجه به‌این موضوع واز $\text{AOQ}\geqslant 0$ نتیجه می‌گیریم که این‌تابع باید درنقطه‌ای مانند $\theta=\theta^*$ دارای ماکزیمم باشد. مقدار مربوطهٔ $\text{AOQ}(\theta^*)$ را **حدکیفیت خروجی**

۱. البته، هرگاه بازرسی مخرب باشد، یادرمقایسه با ارزش کالا گران بوده ومقرون به صرفه نباشد، تصفیه غیرممکن است. درآن صورت تودهٔ رد شده رابا قیمت ارزان می‌فروشند یا اوراق می‌کنند.

متوسط (AOQL) می‌نامند. این بدترین کیفیت متوسطی است که با وجود تصفیه ممکن است پذیرفته شود.

معلوم می‌شود که ممکن است چند طرح نمونه‌گیری تك دارای یك AOQL باشند؛ به مرجع [J۶]، ضمیمهٔ ۱، مراجعه کنید. از این‌رو هرگاه مشتری تنها به AOQL اهمیت دهد، تولیدکننده در انتخاب طرح نمونه‌گیری قدری آزادی خواهدداشت ومی‌تواند طرحی را انتخاب کند که میزان نمونه‌گیری، یعنی تعداد کالاهای بازرسی شده در هر توده را به حداقل برساند. این تعداد عبارت است از

$$nP(A;\theta)+N(۱-P(A;\theta))$$

که در آن جملهٔ اول مربوط به کالاهای پذیرفته‌شده وجملهٔ دوم مربوط به کالاهای رد و تصفیه‌شده است؛ درواقع، برای تصفیه نیاز به بازرسی همهٔ N کالای توده داریم، و $۱-P(A;\theta)$ احتمال رد یك توده است.

متذکر می‌شویم که با استفاده از **طرح نمونه‌گیری دوگانه** می‌توان درکار بازرسی صرفه جویی کرد. در این طرح که نمونه‌ای به‌حجم n را به دو نمونه با حجمهای $n_۱$ و $n_۲$ $(n_۱+n_۲=n)$ تقسیم می‌کنیم. اگر توده خیلی خوب یا خیلی بد باشد، آنگاه امکان دارد، تنها بااستفاده ازیك نمونه، بتوان دربارهٔ پذیرش یا رد تصمیم گرفت، بنابراین نمونهٔ دیگر تنها درصورتی مورد استفاده قرار می‌گیرد که توده کیفیتی متوسط داشته باشد. مرجع [J۶] شامل طرحهای نمونه‌گیری دوگانه بااستفاده از بازرسی همراه باتصفیه از نوع زیراست (که $x_۱$ و $x_۲$ تعدادمعیوبها در دونمونه‌است).

۱. اگر $x_۱\leqslant c_۱$ توده را می‌پذیریم. اگر $x_۱>c_۲$، توده را رد می‌کنیم.

۲. اگر $c_۱<x_۱\leqslant c_۲$، ازنمونهٔ دوم استفاده می‌کنیم. هرگاه $x_۱+x_۲\leqslant c_۲$ توده را می‌پذیریم. اگر $x_۱+x_۲>c_۲$، توده را رد می‌کنیم.

مسائل بخش ۱۷۰۲۰

۱. مطلوب است تقریب دوجمله‌ای توزیع فوق هندسی مذکور درمثال ۱ ومقایسهٔ مقادیر تقریبی و واقعی باهم.

۲. درمثال ۱، مخاطره‌های تولیدکننده ومشتری چیست؟ هرگاه AQL برابر ۱ره و RQL برابر ۶ره باشد.

۳. خریداری لوله‌های الکترونی را به‌کمك طرح نمونه‌گیری تك امتحان می‌کند، او برای این منظوراز نمونه‌ای به حجم ۴۰ وعدد پذیرش ۱ استفاده می‌کند. بااستفاده از جدول A۷، ضمیمهٔ ۴، احتمال پذیرش توده‌هایی را که شامل ۴/۱٪، ۲/۱٪، ۱٪، ۲٪، ۵٪، ۱۰٪ لولهٔ معیوب هستند محاسبه کنید. نمودارمنحنی OC را رسم کنید.

۴. توده‌های بزرگی از باتری که برای استفاده درماشینهای حساب ساخته شده‌اند با توجه به طرح زیرمورد بازرسی قرار می‌گیرند. تعداد $n=۳۰$ باتری به تصادف از یک توده انتخاب شده و آزمون می‌شوند. اگر این نمونه حداکثرشامل $c=۱$ باتری معیوب باشد، توده پذیرفته می‌شود ودرغیراینصورت رد می‌شود. با استفاده ازتقریب پواسن، منحنی OCی طرح را رسم کنید.

۵. منحنی AOQی مذکور درمسئلهٔ ۴ را رسم کنید. AOQL را، با فرض آنکه تصفیه به‌کار گرفته شود، پیدا کنید.

۶. مسئلهٔ ۴ رادرحالتی که $n=۵۰$ و $c=۰$ حل کنید.

۷. منحنی OC ومنحنی AOQ را درمورد طرح سادهٔ تکی برای توده‌های بزرگ به ازای $n=۵$ و $c=۰$ رسم کنید.

۸. مسئلهٔ ۷ رابه ازای $n=۴$ و $c=۱$ حل کنید.

۹. درمسئلهٔ ۷، $\theta_{۰}$ رابه کمک منحنی بیابید، درصورتی که مخاطرهٔ تولیدکننده ۵٪ باشد. درمسئلهٔ ۷، اگرمخاطرهٔ مشتری ۱۰٪ باشد $\theta_{۱}$ رابیابید.

۱۰. نمودارطرحهای نمونه‌گیری رابه‌ازای $c=۰$ ومقادیرصعودی n، مثلا $n=۲,۳,۴$، رسم کرده باهم مقایسه کنید (ازتوزیع دوجمله‌ای استفاده کنید.)

۱۱. درمورد طرح نمونه‌گیری تکی با $n=۵$ و $c=۰$ مخاطره‌ها رابیابید، با این فرض که AQL برابراست با $\theta_{۰}=٪۱$ و RQL برابراست با $\theta_{۱}=٪۱۵$.

۱۲. منحنی OC ومنحنی AOQ رادرموردطرح نمونه‌گیری تکی‌برای توده‌های بزرگ به‌ازای $n=۵$ و $c=۰$ رسم کنید، و AOQL رابیابید.

۱۳. اگردریک طرح نمونه‌گیری تک درمورد توده‌های بزرگ واشر، حجم فضای نمونه ۱۰۰ باشد و بخواهیم AQL برابر ۵٪ و مخاطرهٔ تولیدکننده ۲٪ باشد، عدد پذیرش c راچقدر باید بگیریم؟ (ازتقریب نرمال استفاده کنید.)

۱۴. مخاطرهٔ مشتری درمسئلهٔ ۱۳ چقدراست؟ اگربخواهیم RQL برابر۱۲٪ باشد.

۱۵. فرض می‌کنیم دریک طرح نمونه‌گیری تک برای بازرسی پیچهانمونه‌ای باحجم ۴۰ و $c=۳$ داشته باشیم، وبخواهیم مخاطرهٔ تولیدکننده برابر ۵٪ باشد. AQL چقدر است ؟

۱۸.۲۰ نیکویی برازش. آزمون $x^{۲}$

می‌خواهیم بااستفاده ازنمونهٔ $x_{۱}$، ...، x_n، این فرض راکه تابع معین $F(x)$ تابع

توزیع جامعه‌ای است که نمونه از آن گرفته شده‌است آزمون کنیم. واضح است که، تابع توزیع نمونهٔ $\tilde{F}(x)$ تقریبی برای $F(x)$ است و اگر این تابع «به‌قدر کافی خوب» $F(x)$ را تقریب بزند، این فرض را که $F(x)$ تابع توزیع جامعه‌است رد نخواهیم کرد. هرگاه $\tilde{F}(x)$ «خیلی زیاد» از $F(x)$ انحراف داشته باشد فرض را رد می‌کنیم.

جدول ۱۳.۲۰

آزمون مجذورکی در مورد فرض که $F(x)$ تابع توزیع جامعه‌ای است که از آن نمونهٔ x_1، . . .، x_n گرفته شده است

مرحلهٔ اول. محور x را به K فاصلهٔ I_1، I_2، . . .، I_K طوری تقسیم می‌کنیم که هرفاصله لااقل شامل ۵ مقدار از نمونهٔ x_1، . . .، x_n باشد. عدد b_j، تعداد مقادیری از نمونه‌ راکه درفاصلهٔ $I_j\ (j=1, \ldots, K)$ قراردارند، تعیین می‌کنیم. اگر مقداری ازنمونه درمرزمشترك دوفاصله باشد، به هریك ازاین دو b_jی هم‌مرز ۰٫۵ اضافه می‌کنیم.

مرحلهٔ دوم. بااستفاده از $F(x)$، p_j، احتمال آن راکه متغیرتصادفی تحت‌بررسی مقداری را درفاصلهٔ $I_j\ (j=1, \ldots, K)$ اختیارکند، محاسبه می‌کنیم.

$$e_j = np_j$$

راحساب می‌کنیم. (این تعداد مقادیر نمونه است که به طوری نظری انتظار می‌رود درصورت درست بودن فرض درفاصلهٔ I_j قرار گیرد.)

مرحلهٔ سوم. انحراف

$$\chi_0{}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j}$$

را محاسبه می‌کنیم.

مرحلهٔ چهارم. ترازمعنی‌داری (۵٪، ۱٪ یا درصد دیگری) انتخاب می‌کنیم.

مرحلهٔ پنجم. ازمعادلهٔ

$$P(\chi^2 \leqslant c) = 1 - \alpha$$

با کمك جدول توزیع مجذورکی با $K-1$ درجهٔ آزادی (جدول A۱۲، ضمیمهٔ ۴) را تعیین می‌کنیم. هرگاه r پارامتر $F(x)$ نامعلوم باشند و برآورد درست نمایی ماکزیمم (بخش ۱۳.۲۰) مورد استفاده قرار گیرد، آنگاه $K-r-1$ درجهٔ آزادی (به‌جای $K-1$) به‌کار می‌رود. اگر $\chi_0{}^2 \leqslant c$، فرض ردنمی‌شود. اگر $\chi_0{}^2 > c$، فرض رد می‌شود.

برای تصمیم‌گیری با این روش، لازم است بدانیم که $\tilde{F}(x)$ با $F(x)$، درصورت درست بودن فرض، چقدر تفاوت دارد. بنابراین نخست باید معیاری برای انحراف $\tilde{F}(x)$ از $F(x)$ معرفی کنیم، درضمن باید توزیع احتمال این‌معیار رابافرض درست بودن فرض بدانیم. آنگاه به طریق زیرعمل می‌کنیم. عدد c را طوری تعیین می‌کنیم که درصورت درست بودن فرض برای انحرافی بزرگتراز c احتمال‌کوچکی انتظار رود. اگر، با این همه، انحرافی بزرگتراز c روی دهد، دلیلی داریم‌که به درست بودن فرض شك‌کرده‌آن را رد می‌کنیم. ازطرف دیگر، اگرانحراف از c تجاوزنکند، طوری‌که $\tilde{F}(x)$ تقریبی به قدرکافی خوب برای $F(x)$ باشد، فرض را رد نمی‌کنیم، یعنی دراین حالت مدرك کافی برای ردکردن فرض نداریم، نباید ازنظر دور داشت که ممکن است توابعی وجود داشته باشندکه درآزمون رد نشوند. ازاین‌نظرموقعیت فعلی‌شبیه وضعی است‌که دربخش ۱۵.۲۰ ملاحظه کردیم.

جدول ۱۳.۲۰ آزمونی ازاین نوع راکه توسط آر. ای. فیشرمعرفی شده است، نشان می‌دهد. این‌آزمون باتوجه به‌این واقعیت توجیه می‌شودکه اگرفرض درست باشد، آنگاه χ_0^2 مقدارمشاهده شده یك متغیرتصادفی است‌که تابع توزیع‌آن وقتی‌که n به سمت بینهایت می‌رود به سمت توزیع مجذورکی با $K-1$ درجهٔ‌آزادی (یا $K-r-1$ درجهٔ‌آزادی، اگر r پارامتربرآورد شوند) میل می‌کند. این شرط‌که باید درهرفاصلهٔ ذکر شده درجدول ۱۳.۲۰ حداقل ۵ مقدارنمونه قرارگیرد ازاین واقعیت ناشی می‌شودکه به ازای مقدارمتناهی n متغیرتصادفی تنها تقریباً یك توزیع مجذورکی خواهدداشت. اثبات این مطلب درمرجع [H۴]، ضمیمهٔ ۱، یافت می‌شود. اگرنمونه‌کوچکتر ازآن‌باشدکه نیاز مارا برآورده‌کند، می‌توان آزمون را ادامه داد، ولی باید با دقت بیشتری نتیجه را مورد استفاده قراردارد.

مثال ۱. آزمون نرمال بودن

نرمال بودن جامعه‌ای راکه نمونه مندرج درجدول ۲.۲۰، بخش ۲.۲۰، ازآن گرفته شده است آزمون‌کنید. برآوردهای درست نمایی ماکزیمم در مورد μ و σ^2 عبارتند از $\tilde{\mu} = \bar{x} = ۳۶۴٫۷$ و $\tilde{\sigma}^2 = ۷۱۲٫۹۹$. باتوجه به‌محاسبات‌جدول ۱۴.۲۰ داریم $\chi_0^2 = ۲٫۷۹$. α را برابر ۵% انتخاب می‌کنیم. چون $K = ۱۰$، و $r = ۲$ پارامتررا برآوردکرده‌ایم، باید ازجدول A۱۲، ضمیمهٔ ۴، با $K - r - ۱ = ۷$ درجه‌آزادی استفاده کنیم وجواب معادلهٔ $P(\chi^2 \leqslant c) = \%۹۵$ رابرابر $c = ۱۴٫۰۷$ به‌دست‌آوریم. چون $\chi_0^2 < c$، فرض نرمال بودن جامعه را رد نمی‌کنیم.

مسائل بخش ۱۸.۲۰

۱. دریکی ازآزمایشهای‌کلاسیك جی. مندل تعداد ۳۵۵ نخود زرد و ۱۲۳ نخود سبز به

جدول ۱۴.۲۰

محاسبات مربوط به مثال ۱

جملات موجود در (۱)	b_j	$c_j = ۱۰۰p_j$	$\phi\left(\frac{x_j - ۳۶۴٫۷}{۲۶٫۷}\right)$	$\frac{x_j - ۳۶۴٫۷}{۲۶٫۷}$	x_j
۰٫۰۹۶	۶	۶٫۸۱	۰٫۰۰۰۰ ... ۰٫۰۶۸۱	−∞ ... −۱٫۴۹	−∞ ... ۳۲۵
۰٫۰۴۵	۶	۶٫۵۴	۰٫۰۶۸۱ ... ۰٫۱۳۳۵	−۱٫۴۹ ... −۱٫۱۱	۳۲۵ ... ۳۳۵
۰٫۲۰۱	۱۱	۹٫۶۱	۰٫۱۳۳۵ ... ۰٫۲۲۹۶	−۱٫۱۱ ... −۰٫۷۴	۳۳۵ ... ۳۴۵
۰٫۰۸۰	۱۴	۱۲٫۹۸	۰٫۲۲۹۶ ... ۰٫۳۵۹۴	−۰٫۷۴ ... −۰٫۳۶	۳۴۵ ... ۳۵۵
۰٫۲۶۸	۱۶	۱۴٫۰۶	۰٫۳۵۹۴ ... ۰٫۵۰۰۰	−۰٫۳۶ ... ۰٫۰۰	۳۵۵ ... ۳۶۵
۰٫۰۰۲	۱۵	۱۵٫۱۷	۰٫۵۰۰۰ ... ۰٫۶۵۱۷	۰٫۰۰ ... ۰٫۳۹	۳۶۵ ... ۳۷۵
۱٫۶۰۲	۸	۱۲٫۴۷	۰٫۶۵۱۷ ... ۰٫۷۷۶۴	۰٫۳۹ ... ۰٫۷۶	۳۷۵ ... ۳۸۵
۰٫۰۳۳	۱۰	۹٫۴۴	۰٫۷۷۶۴ ... ۰٫۸۷۰۸	۰٫۷۶ ... ۱٫۱۳	۳۸۵ ... ۳۹۵
۰٫۴۱۷	۸	۶٫۳۷	۰٫۸۷۰۸ ... ۰٫۹۳۴۵	۱٫۱۳ ... ۱٫۵۱	۳۹۵ ... ۴۰۵
۰٫۰۴۶	۶	۶٫۵۵	۰٫۹۳۴۵ ... ۱٫۰۰۰۰	۱٫۵۱ ... ∞	۴۰۵ ... ∞

$\chi_0^2 = ۲٫۷۹۰$

دست آمده است. آیا این با نظریهٔ مندل که بنا بر آن نسبت نخودهای زرد به نخودهای سبز باید ۳ به ۱ باشد مطابقت دارد.

۲. بین ساعات ۱ تا ۲ ی بعدازظهر ۵ روز متوالی (دوشنبه تا جمعه) یکی از تعمیرگاهها به ترتیب دارای ۸۲، ۵۰، ۵۶، ۸۰ و ۵۲ مراجع بوده است. این فرض را که تعداد مورد انتظار مراجعین در آن ساعت در روزهای یاد شده یکسان است آزمون کنید (از $\alpha = \%5$ استفاده کنید.)

۳. سه نمونهٔ ۲۰۰ تایی میخ پرچ از میان تولیدات سه ماشین انتخاب می‌کنیم. تعداد میخهای معیوب در نمونه‌ها ۳، ۸ و ۴ بوده است. آیا این تفاضل معنی‌دار است؟ (از $\alpha = \%5$ استفاده کنید.)

۴. سکه‌ای را ۵۰ بار پرتاب کرده‌ایم. ۲۷ بار شیر آمده است. با استفاده از این نتیجه، این فرض را که احتمال آمدن خط و شیر یکسان است آزمون کنید.

۵. درنمونهٔ مذکور درمسئلهٔ ۴، حداقل تعداد شیرها (بزرگتر از ۲۵) که موجب رد کردن فرض می‌شود چقدر است، درصورتی که $\alpha = \%5$ انتخاب شود؟

۶. نمونهٔ زیر مقادیر جرم پنبهٔ به‌کار رفته در یك پارچه را (بر حسب گرم بر مترمربع) شامل می‌شود. این فرض را که جامعهٔ مربوط نرمال است آزمون کنید.

نمایندهٔ رده	۹۶	۹۸	۱۰۰	۱۰۲	۱۰۴	۱۰۶	۱۰۸	۱۱۰	۱۱۲
فراوانی مطلق رده	۱	۰	۱	۲	۸	۱۹	۲۸	۳۰	۴۱

نمایندهٔ رده	۱۱۴	۱۱۶	۱۱۸	۱۲۰	۱۲۲	۱۲۴	۱۲۶	۱۲۸	۱۳۰
فراوانی مطلق رده	۶۶	۵۰	۲۷	۸	۵	۳	۰	۱	۱

۷. آیا نمونهٔ مذکور درجدول ۴.۲۰، بخش ۲.۲۰، ازیك جامعهٔ نرمال گرفته شده است؟

۸. نرمال بودن جامعه‌ای راکه نمونهٔ زیر از آن گرفته شده است آزمون کنید. x [کیلوگرم بر میلیمتر مربع] استحکام کششی ورقه‌های فولادی با ضخامت ۳ر۰ میلیمتر است.

x	فراوانی	x	فراوانی
۴۲ر۰>	۱۵	۴۳ر۵ — ۴۴ر۰	۲۲ر۵
۴۲ر۰ — ۴۲ر۵	۱۱	۴۴ر۰ — ۴۴ر۵	۱۹ر۵
۴۲ر۵ — ۴۳ر۰	۱۵	۴۴ر۵ — ۴۵ر۰	۱۲
۴۳ر۰ — ۴۳ر۵	۱۴	۴۵ر۰<	۱۹

۹. با استفاده از نمونهٔ داده شده، آزمون کنید که جامعهٔ مربوطه دارای توزیع پواسن است یا نه. x تعداد ذرات آلفایی است که در فاصله‌های ۷٫۵ ثانیه‌ای توسط ئی. راترفورد و اچ. گایگر در یکی از آزمایشهای کلاسیکشان درسال ۱۹۱۰ مشاهده شده است، و $f(x)$ فراوانی (= تعداد فواصل زمانی که طی آنها درست x ذره مشاهده شده) است.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
۰	۵۷	۵	۴۰۸	۱۰	۱۰
۱	۲۰۳	۶	۲۷۳	۱۱	۴
۲	۳۸۳	۷	۱۳۹	۱۲	۲
۳	۵۲۵	۸	۴۵	$\geqslant$۱۳	۰
۴	۵۳۲	۹	۲۷		

۱۰. این فرض را که جامعه‌ای که از آن نمونهٔ ۱۰۰۰ تایی ورق کاغذ زیر گرفته شده است دارای توزیع پواسن است آزمون کنید. x تعداد لکه‌های تیره بر روی ورق و $\tilde{f}(x)$ فراوانی (تعداد ورقه‌های با x لکه) مشاهده شده است. (الف) $\alpha=\%5$، (ب) $\alpha=\%1$.

$\tilde{f}(x)$	x
۴۱۹	۰
۳۵۲	۱
۱۵۴	۲
۵۶	۳
۱۹	۴
۰	$\geqslant$۵

۱۹.۲۰ آزمونهای ناپارامتری

آزمونهای بخش ۱۵.۲۰ به جامعه‌های نرمال مربوط می‌شوند. در بسیاری از کاربردها جامعه‌ها نرمال نیستند. در آن صورت آزمونهایی را به‌کار می‌بریم که به **آزمونهای ناپارامتری یا آزمونهای آزاد توزیع** موسومند؛ این آزمونها بر اساس آمارهٔ ترتیبی بنانهاده شده‌اند و

بنابراین برای هر توزیع پیوسته‌ای معتبرهستند. این آزمونها ساده هستند. با این حال در مورد توزیع نرمال آزمونهای بخش ۱۵.۲۰ نتایج بهتری می‌دهند.

برای تشریح ایدهٔ اساسی آزمون ناپارامتری، به‌بررسی دومثال نوعی می‌پردازیم.

مثال ۱. آزمون علامت در مورد میانه

میانه جواب $x=\tilde{\mu}$ معادلهٔ $F(x)=0.5$ است، که در آن F تابع توزیع است. می‌خواهیم با استفاده از نمونهٔ تفاضلهای ذکر شده در مثال ۵، بخش ۱۵.۲۰، یعنی،

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8,$$

فرض $\tilde{\mu}=0$ را آزمون کنیم، این‌فرض می‌گوید که‌بروندادهای مربوط به‌دو دسته شرایط کاری متفاوت بــه‌طــور معنی‌داری تفاوت نمی‌کنند. فرض مقابل $\tilde{\mu}>0$ و سطح معنی‌دار بودن $\alpha=5\%$ را انتخاب می‌کنیم. اگرفرض درست باشد، p، احتمال یافتن یك تفاضل مثبت برابر احتمال یافتن یك تفاضل منفی است. پس دراین حالت، $p=0.5$، و متغیر تصادفی

$$X = \text{تعداد مقادیر مثبت در بین } n \text{ مقدار}$$

دارای توزیعی دو جمله‌ای با $p=0.5$ است. این نمونه دارای ۸ مقدار است. مقادیر صفر را که در تصمیم اثری ندارند حذف می‌کنیم در این صورت ۶ مقدار باقی می‌ماند، که‌همگی مثبت هستند. چون

$$P(X=6)=\binom{6}{6}(0.5)^6(0.5)^0=0.0156=\%1.56<\alpha$$

فرض را رد می‌کنیم.

اگر یکی از این ۶ مقدار منفی بود، داشتیم

$$P(X\geqslant 5)=\binom{6}{5}(0.5)^5(0.5)^5\times 0.5+\binom{6}{6}(0.5)^6=\%10.9$$

و فرض را رد نمی‌کردیم.

مثال ۲. آزمون در مورد انحراف دلخواه

ماشینی برای بریدن سیمی به قطعات کوچکتر مورداستفاده قرار می‌گیرد. ۵ قطعه که متوالیاً بریده شده‌اند دارای طولهای

$$29 \quad 31 \quad 28 \quad 30 \quad 32$$

هستند. با استفاده ازنمونهٔ مزبور، این فرض را که انحراف وجود نداشته باشد، یعنی ماشین

متمایل به‌تولید قطعات طولانی وطولانیتر نیز نباشد راآزمون کنید. فرض کنید نوع ماشین طوری است که حدس می‌زنیم‌فرض مقابل وجود انحراف مثبت است، یعنی انتظار داریم قطعات طولانیتر از قطعات قبل از خود باشند.

تعداد ترانهشها را درنمونه می‌شماریم، یعنی تعداد دفعاتی را کـه مقدار بزرگتری قبل از مقدارکوچکتر روی می‌دهد.

۲۹ جلوتر از ۲۸ روی می‌دهد (۱ ترانهش)،

۳۱ جلوتر از ۲۸ و ۳۰ روی می‌دهد (۲ ترانهش)،

سه مقدارنمونهٔ بعدی صعودی هستند پس‌درنمونهٔ فوق $۳ = ۲ + ۱$ ترانهش موجود است.

حال به بررسی متغیر تصادفی

$$T = \text{تعداد ترانهشها}$$

می‌پردازیم. اگرفرض‌درست باشد (انحراف وجود نداشته‌باشد)، آنگاه‌هریك‌از $۱۲۰ = !۵$ جایگشت ۵ عنصر ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ دارای‌احتمال (۱/۱۲۰) است. این‌جایگشتهارا مطابق تعداد ترانهشهای آنها مرتب می‌کنیم:

$T = ۰$	$T = ۱$	$T = ۲$	$T = ۳$
۱ ۲ ۳ ۴ ۵	۱ ۲ ۳ ۵ ۴	۱ ۲ ۴ ۵ ۳	۱ ۲ ۵ ۴ ۳
	۱ ۲ ۴ ۳ ۵	۱ ۲ ۵ ۳ ۴	۱ ۳ ۴ ۵ ۲
	۱ ۳ ۲ ۴ ۵	۱ ۳ ۲ ۵ ۴	۱ ۳ ۵ ۲ ۴
	۲ ۱ ۳ ۴ ۵	۱ ۳ ۴ ۲ ۵	۱ ۴ ۲ ۵ ۳
		۱ ۴ ۲ ۳ ۵	۱ ۴ ۳ ۲ ۵
		۲ ۱ ۳ ۵ ۴	۱ ۵ ۲ ۳ ۴
		۲ ۱ ۴ ۳ ۵	۲ ۱ ۴ ۵ ۳
		۲ ۳ ۱ ۴ ۵	۲ ۱ ۵ ۳ ۴
		۳ ۱ ۲ ۴ ۵	۲ ۳ ۱ ۵ ۴
			۲ ۳ ۴ ۱ ۵
			۲ ۴ ۱ ۳ ۵
			۳ ۱ ۲ ۵ ۴
			۳ ۱ ۴ ۲ ۵
			۳ ۲ ۱ ۴ ۵
			۴ ۱ ۲ ۳ ۵

و غیره. بنابراین خواهیم داشت

$$P(T \leqslant ۳) = \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۴}{۱۲۰} + \frac{۹}{۱۲۰} + \frac{۱۵}{۱۲۰} = \frac{۲۹}{۱۲۰} = \%۲۴$$

درنتیجه فرض را رد نمی‌کنیم.

مقادیر تابع توزیع T درحالتی که انحراف وجـود نداشته باشد درجدول A۱۴ ، ضمیمهٔ۴، آمده‌است. این روش ومقادیری که به‌کار رفت به‌توزیعهای پیوسته مربوط می‌شوند. به‌طور نظری می‌توان انتظار داشت که همهٔ مقادیر نمونه متفاوت باشند. عملاً، ممکن‌است به علت گردکردن هنوز برخی ازمقادیر نمونه بـا هم مساوی باشند. اگر m مقدار نمونه باهم برابر باشند، $m(m-۱)/۴$ (میانگین ترانهشهادرجایگشت m عنصر)، یعنی ۱/۲ را به‌ازای هر دوعضو برابر، ۳/۲ به‌ازای هرسه عضو برابر اضافه می‌کنیم.

مسائل بخش ۱۹.۲۰

۱. آزمون علامت را درمـورد نمونهٔ ذکرشده درمسئلهٔ ۱ (داده‌ها ازماهوارهٔ تل‌استار)، بخش ۱۵.۲۰ به‌کار برید.

۲. تحت چه شرایطی می‌توان آزمون علامت را به‌عنوان آزمون میانگین یك توزیع پیوسته مورد استفاده قرارداد؟

۳. آزمون علامت را در مورد مسئلهٔ ۴ ، بخش ۱۵.۲۰ ، به‌کار برید. (مقادیر لازم توزیع دوجمله‌ای درجدول A۶، ضمیمهٔ۴، نیامده‌اند و باید محاسبه شوند.)

۴. به دو گروه ده نفری ازبیماران دومسکن مختلف A و B داده شده‌است. اثر این داروها درجدول زیر آمده است (افزایش زمان خواب برحسب ساعت).

A	۱٫۹	۰٫۸	۱٫۱	۰٫۱	−۰٫۱	۴٫۴	۵٫۵	۱٫۶	۴٫۶	۳٫۴
B	۰٫۷	−۱٫۶	−۰٫۲	−۱٫۲	−۰٫۱	۳٫۴	۳٫۷	۰٫۸	۰٫۰	۲٫۰
تفاضل	۱٫۲	۲٫۴	۱٫۳	۱٫۳	۰٫۰	۱٫۰	۱٫۸	۰٫۸	۴٫۶	۱٫۴

با استفاده ازآزمون علامت تحقیق کنید که آیا تفاضل معنی‌داراست؟

۵. بافرض آنکـه جامعه‌های متناظر با نمونه‌های ذکرشده درمسئلهٔ ۴ نرمال هستند، آزمون ارائه شده درمثال ۳، بخش ۱۵.۲۰، را به‌کار برید.

۶. یك کلید ترموستاتیکی راکه درست در ۲۰ درجه گذاشته شده‌است درمقابل فرض دیگر که جریانی خیلی پایین است آزمون کنید. یك نمونهٔ ۸ مقداری رامورد استفاده قرار دهید که ۷ تای آنها کمتر از °۲۰ سانتیگراد ویکی بیشتر از °۲۰ سانتیگراد باشد.

۷. جدولی شبیه جدول ذکرشده درمثال۲ به‌ازای $n = ۴$ تشکیل دهید.

۸. فرض آنکه نمونه‌ای معین‌از ولتمتر، که ولتاژ روی ولتمترمستقل ازدرجهٔ حرارت T می‌باشد درمقابل فرض دیگرکه ولتاژ روی ولتمتر با افزایش درجهٔ حرارت افزایش می‌یابدآزمون کنید. نمونه‌ای ازمقادیر به‌دست‌آمده با به‌کاربردن ولتاژثابت را مورد استفاده قراردهید:

درجه‌حرارت Tبرحسب‌سانتیگراد	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
ولتاژ روی‌ولتمتر برحسب ولت	۹۹٫۸	۱۰۱٫۰	۱۰۰٫۴	۱۰۰٫۸	۱۰۱٫۵

۹. آزمون ذکرشده درمثال۲ را باداده‌های زیر به‌کار برید (x = محتوی دی‌سولفید موجود در یك نمونهٔ مشخص‌ازپشم، که برحسب درصدمحتوی تارهای‌کاهش‌نیافته اندازه گرفته شده‌است؛ y = محتوی‌آب موجود درپشم که برحسب درصداندازه‌گرفته شده‌است).

x	۱۰	۱۵	۳۰	۴۰	۵۰	۵۵	۸۰	۱۰۰
y	۵۰	۴۶	۴۳	۴۲	۳۶	۳۹	۳۷	۳۳

۱۰. آیامقدارکودسبب افزایش محصول‌گندم، X [کیلوگرم برقطعهٔ زیرکشت] می‌گردد؟ به این منظور ازنمونهٔ مقادیرزیرکه با توجه به افزایش مقدارکود حاصل شده است استفاده کنید.

۱۸٫۱	۱۷٫۳	۱۷٫۵	۱۷٫۲	۱۶٫۶	۱۳٫۲	۱۶٫۸	۱۵٫۲

۲۰.۲۰ زوجهای اندازه‌گیری. برازاندن خطوط مستقیم

اکنون آزمایشهایی راموردبحث قرارمی‌دهیم که طی آنهابه مشاهده یااندازه گیری همزمان دوکمیت می‌پردازیم. درعمل بین دو نوع آزمایش به‌شرح زیرتفاوت می گذاریم.

۱. در **تحلیل همبستگی**، هردوکمیت متغیرها تصادفی‌هستند ومایل‌هستیم روابط بین‌آنها رابدانیم. (ما این شاخه ازآمار را موردبررسی قرارنخواهیم داد.)

۲. در **تحلیل رگرسیونی**، یکی‌ازمتغیرها که‌آن را x می نامیم به‌صورت یك متغیرمعمولی درنظر گرفته می‌شود، یعنی آن را بدون خطای محسوس می‌توان اندازه‌گرفت. Y، متغیر دوم، یك متغیرتصادفی است. x متغیر مستقل (برخی اوقات متغیر کنترل شده) نامیده می‌شود، و می‌خواهیم وابستگی متغیر Y به x رابدانیم. مثالهای نوعی عبارتند

از وابستگی فشارخون Y به x، سن شخص، یاهمان‌طور که خواهیم دید، رگرسیون Y برحسب x، رگرسیون Y، افزایش وزن نوع معینی ازحیوانات، برحسب x، غذای روزانهٔ آنها، رگرسیون Y، رسانایی گرمایی چوب پنبه برحسب x، وزن مخصوص چوب پنبه.

درآزمایش، آزمایشگر نخست n مقدار x_1، . . . ، x_n ازمقادیر x راجداکرده و سپس به مشاهده Y به‌ازای این مقادیر x می‌پردازد، به‌این ترتیب مشاهده‌گر نمونه‌ای بـه صورت (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، . . . ، (x_n, y_n) به‌دست می‌آورد. درتحلیل رگرسیونی فرض می‌شود که میانگین μی Y به x بستگی دارد، یعنی آن راتابعی مانند $\mu = \mu(x)$، بـا مفهوم عادی تابع، درنظرمی‌گیریم. منحنی $\mu(x)$ را منحنی رگرسیون Y برحسب x می‌نامند. در این بخش ساده‌ترین حالت رابررسی می‌کنیم، یعنی حالتی راکه $\mu(x)$ تابعی خطی مانند $\mu(x) = \alpha + \beta x$ است. ممکن است بخواهیم مقادیرنمونه رابه صورت n نقطه درصفحهٔ xY مشخص‌کرده خط راستی به‌آنها ببرازانیم، واین خط رابرای برآورد $\mu(x)$ بـه‌ازای مقادیرمفروض x مورداستفاده قراردهیم به‌طوری که به‌ازای هرمقدارمعین x بتوانیم مقدار Y موردانتظار را تعیین‌کنیم. اگرنقاط پراکنده باشند، برازاندن «با چشم» قابل اطمینان نیست و به‌یك روش ریاضی برای برازاندن خطوط نیازداریم‌کـه نتیجهٔ حاصل ازآن یکتا بوده وتنها به‌نقاط بستگی داشته‌باشد. شیوه‌ای ازاین نوع‌که بـه طور گسترده مورد استفاده قرارمی گیرد **روش‌کمترین مربعات** است‌که توسط‌گاوس ابداع شده‌است. ایـن روش را دربحث حاضرمی‌توان به شرح زیرفرمولبندی کرد.

خط مستقیم باید طوری به نقاط داده شده برازنده شود که مربعات فواصل نقاط از آن مینیمم باشد، فاصلهٔ نقاط از خط در جهت قائم اندازه گرفته شود (در جهت y).

فرض‌کلی (A1)

x_1، . . . ، x_n، مقادیر x نمونهٔ (x_1, y_1)، . . . ، (x_n, y_n) همگی برابر نیستند.

نمونهٔ (x_1, y_1)، . . . ، (x_n, y_n) راکه حجم آن n است درنظرمی‌گیریم. فاصلهٔ قائم (فاصله‌ای کـه درجهت y اندازه‌گرفته می‌شود) مقدارنمونه (x_j, y_j) ازخط راست $y = a + bx$ برابراست با $|y_j - a - bx_j|$؛ به‌شکل ۳۹۶ مراجعه‌کنید. بنابراین‌مجموع مربعات این فواصل‌عبارت است از

$$q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_i)^2. \qquad (1)$$

درروش‌حداقل‌مربعات a و b راطوری‌انتخاب می کنیم که q مینیمم‌شود. q وابسته a و b است و شرط لازم برای مینیمم شدن q عبارت است از

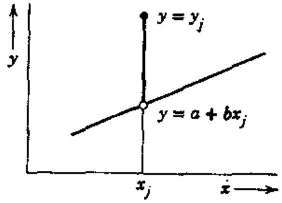
$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0. \qquad (2)$$

با توجه به‌این شرط فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$y-\bar{y}=b(x-\bar{x}) \qquad (۳)$$

که در آن

$$\bar{y}=\frac{۱}{n}(y_۱+\cdots+y_n) \quad \text{و} \quad \bar{x}=\frac{۱}{n}(x_۱+\cdots+x_n). \qquad (۴)$$



شکل۳۹۶. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(x_j و y_j)$ از خط $y=a+bx$

(۳) **خط رگرسیون** مقادیر y نمونه برحسب مقادیر x نمونه نامیده می‌شود. b ، ضریب زاویهٔ این خط، **ضریب رگرسیون** y نسبت به x نامیده می‌شود، وخواهیم دید که

$$b=\frac{s_{xy}}{s_۱^۲} \qquad (۵)$$

دراین رابطه

$$s_۱^۲=\frac{۱}{n-۱}\sum_{j=۱}^{n}(x_j-\bar{x})^۲=\frac{۱}{n-۱}\left[\sum_{j=۱}^{n}x_j^۲-\frac{۱}{n}\left(\sum_{j=۱}^{n}x_j\right)^۲\right] \qquad (۶)$$

و

$$s_{xy}=\frac{۱}{n-۱}\sum_{j=۱}^{n}(x_j-\bar{x})(y_j-\bar{y})=\frac{۱}{n-۱}\left[\sum_{j=۱}^{n}x_jy_j-\frac{۱}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n}x_i\right)\left(\sum_{j=۱}^{n}y_j\right)\right] \qquad (۷)$$

s_{xy} **کوواریانس** نمونه نامیده می‌شود. واضح است که، خط رگرسیون (۳) از نقطهٔ $(\bar{x},\bar{y})$ می‌گذرد.

برای رسیدن به (۳)، با به‌کاربردن (۱)و(۲) می‌یابیم

$$\frac{\partial q}{\partial a}=-۲\sum(y_j-a-bx_j)=۰$$

$$\frac{\partial q}{\partial b}=-۲\sum x_j(y_j-a-bx_j)=۰$$

(که در آن جمع روی j از ۱ تا n صورت می‌پذیرد). بنابراین

$$na+b\sum x_j=\sum y_j$$

$$a\sum x_j+b\sum x_j^{2}=\sum x_j y_j$$

با توجه به فرض (A۱)، دترمینان این دستگاه معادلات خطی،

$$n\sum x_j^{2}-(\sum x_j)^{2}=n(n-1)s_1^{2}$$

[ر. ک. (۶)] مخالف صفر است، و دستگاه دارای جواب منحصر بفرد

$$b=\frac{n\sum x_j y_j-\sum x_i\sum y_i}{n(n-1)s_1^{2}} \quad ، \quad a=\bar{y}-b\bar{x} \qquad (۸)$$

است [ر. ک. (۴)، (۶)، (۷)]. از اینجا (۳) حاصل می‌شود با bیی که توسط (۵) تا (۷) داده شده‌است.

محاسبات دستی را با کد گذاری می‌توان ساده‌تر انجام داد، این کار را با انتخاب

$$y_j=c_2 y_j^*+l_2 \quad ، \quad x_j=c_1 x_j^*+l_1 \qquad (۹)$$

انجام می‌دهیم و مقادیر ثابت c_1، c_2، l_1، l_2 را طوری برمی‌گزینیم که مقادیر تبدیل شدهٔ x_j^* و y_j^* هرچه ممکن‌است ساده باشند. نخست به‌محاسبهٔ مقادیر $\bar{x}^*$، $\bar{y}^*$، s_1^{*2}، $\overset{*}{s}_{xy}$ متناظر با مقادیر تبدیل شده می‌پردازیم

$$\bar{y}=c_2\bar{y}^*+l_2 \quad ، \quad \bar{x}=c_1\bar{x}^*+l_1$$

(۱۰)

$$s_{xy}=c_1c_2\overset{*}{s}_{xy} \quad ، \quad s_1^{2}=c_1^{2}s_1^{*2}.$$

مثال ۱. خط رگرسیون

کاهش‌حجم y [%] چرم به‌ازای مقادیر مشخصی ازفشار بالای x [اتمسفر] اندازه گرفته شده است. نتایج‌درستون‌اول جدول ۱۵.۲۰ آمده‌اند. خط رگرسیون y برحسب x را پیدا کنید.
ملاحظه‌می‌کنیم که $n=۴$ و مقادیر $\bar{x}=۲۸۰۰۰/۴=۷۰۰۰$، $\bar{y}=۱۹٫۰/۴=۴٫۷۵$،

$$s_1^{2}=\frac{1}{3}\left(216000000-\frac{28000^{2}}{4}\right)=\frac{20000000}{3}$$

$$s_{xy}=\frac{1}{3}\left(148400-\frac{28000\cdot 19}{4}\right)=\frac{15400}{3}$$

را به‌دست می آوریم. در نتیجه $b = ۱۵۴۰۰/۲۰۰۰۰۰۰۰ = ۰٫۰۰۰۷۷$، وخطر گرسیون عبارت است از

$$y - ۴٫۷۵ = ۰٫۰۰۰۷۷(x - ۷۰۰۰) \quad \text{یا} \quad y = ۰٫۰۰۰۷۷x - ۰٫۶۴ \quad \blacktriangle$$

فرض (A۲)

به ازای هر مقدار مشخص x متغیر تصادفی Y نرمال با میانگین

$$\mu(x) = \alpha + \beta x \qquad (۱۱)$$

و واریانس σ^2 است، ضمناً σ^2 مستقل از x است.

فرض (A۳)

n آزمایش کــه نمونهٔ (x_1, y_1) ، . . . ، (x_n, y_n) را از آنها بـه دست می‌آوریم مستقل هستند (ر. ک. صفحهٔ)

β، در (۱۱)، **ضریب رگرسیون** جامعه نامیده می‌شود. زیرا می‌توان نشان داد که با درنظر گرفتن فرضهای (A۱) تا (A۳) برآورد درست‌نمایی ماکزیمم A برابرb ، ضریب رگرسیون نمونهٔ (۵)، است.

جدول ۱۵.۲۰
رگرسیون کاهش حجم y [%]
چرم تحت فشار x [اتمسفر]

مقادیر مفروض		مقادیر کمکی	
x_j	y_j	x_j^2	$x_j y_j$
۴۰۰۰	۲٫۳	۱۶۰۰۰۰۰۰	۹۲۰۰
۶۰۰۰	۴٫۱	۳۶۰۰۰۰۰۰	۲۴۶۰۰
۸۰۰۰	۵٫۷	۶۴۰۰۰۰۰۰	۴۵۶۰۰
۱۰۰۰۰	۶٫۹	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۶۹۰۰۰
۲۸۰۰۰	۱۹٫۰	۲۱۶۰۰۰۰۰۰	۱۴۸۴۰۰

(C. E. WEIR, Journ. Res. Nat. Bureau of Standards 45, 1950, 468.)

جدول ۱۶.۲۰

تعیین فاصلهٔ اطمینان برای β (ارائه شده در (۱۱)) بافرضهای (A۱) الی (A۳)

مرحلهٔ اول. سطح اطمینان γ (۹۵٪، ۹۹٪ وغیره) را انتخاب می‌کنیم.

مرحلهٔ دوم. جواب cی معادلهٔ

$$F(c)=\frac{۱}{۲}(۱+\gamma) \qquad (۱۲)$$

را ازجدول توزیع t با $n-۲$ درجهٔ آزادی (جدول A۱۱، ضمیمهٔ ۴؛ n = حجم نمونه) تعیین می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم. با استفاده از نمونه‌ای مانند $(x_۱,y_۱)$، . . . ، (x_n,y_n)، مقدار $(n-۱)s_۱^۲$ را از(۶)، و $(n-۱)s_{xy}$ را از(۷) و b را از(۵) به‌دست می‌آوریم،

$$(n-۱)s_۲^۲=\sum_{j=۱}^{n} y_j^۲-\frac{۱}{n}\Big(\sum_{j=۱}^{n} y_j\Big)^۲ \qquad (۱۳)$$

و

$$q_۰=(n-۱)(s_۲^۲-b^۲s_۱^۲). \qquad (۱۴)$$

مرحلهٔ چهارم. $k=c\sqrt{q_۰/(n-۲)(n-۱)s_۱^۲}$ را محاسبه می‌کنیم. فاصلهٔ اطمینان عبارت است از

$$\mathrm{CONF}\,\{b-k\leqslant\beta\leqslant b+k\}. \qquad (۱۵)$$

بافرضهای (A۱) تا (A۳) می‌توان فاصلهٔ اطمینانی برای β به‌دست‌آورد (جدول ۱۶.۲۰).

مثال ۲. فاصلهٔ اطمینانی برای ضریب رگرسیون

با استفاده ازنمونهٔ ذکرشده درجدول ۱۵.۲۰، باروش ذکرشده درجدول ۶.۲۰ فاصلهٔ اطمینانی برای β تعیین‌کنید.

مرحلهٔ اول. $\gamma=۰٫۹۵$ را انتخاب می‌کنیم.

مرحلهٔ دوم. معادله (۱۲) به صورت $F(c)=۰٫۹۷۵$ در می‌آید، وازجدول A۱۱ با $n-۲=۲$ درجهٔ آزادی نتیجه می‌شود $c=۴٫۳۰$.

مرحلهٔ سوم. ازمثال۱ داریم $۳s_۱^۲=۲۰۰۰۰۰۰۰$ و $b=۰٫۰۰۰۰۷۷$. از جدول ۱۵.۲۰ به‌دست می‌آوریم.

$$q_۰=۱۱٫۹۵-۲۰۰۰۰۰۰۰\times ۰٫۰۰۰۰۷۷^۲=۰٫۰۹۲$$

$$۳s_۲^۲=۱۰۲٫۲-\frac{۱۹^۲}{۴}=۱۱٫۹۵.$$

مرحلهٔ‌چهارم. بنابراین‌داریم: $k=۴٫۳۰\sqrt{۰٫۰۹۲/۲\times ۲۰۰۰۰۰۰۰}=۰٫۰۰۰۰۲۰۶$ و

$$\mathrm{CONF}\,\{۰٫۰۰۰۰۵۶\leqslant\beta\leqslant ۰٫۰۰۰۰۹۸\}.$$

مسائل بخش ۲۰.۲۰

۱. به کمك چشم خط‌مستقیمی برازانید. فاصلهٔ لازم برای توقف پس از ترمزرا در مورد اتومبیلی که باسرعت ۳۵مایل درساعت حرکت می کند برآوردکنید.

x = سرعت (مایل درساعت)	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y = فاصلهٔ لازم برای توقف (فوت)	۵۰	۹۵	۱۵۰	۲۱۰

۲. نتایج حاصل از مثال ۱ را با کدگذاری به دست آورید؛ به این منظور فرض کنید $x_j = ۲۰۰۰x_j^* + ۴۰۰۰$ ، $y_j = ۰٫۱ y_j^* + ۵$.

درهریك ازمسائل زیرخط رگرسیون y برحسب x رایافته وآن را رسم کنید.

۳. (۱,۱)، (۲,۱٫۷)، (۳,۳).

۴. نمونهٔ ذکرشده درمسئلهٔ ۹، بخش ۱۹.۲۰.

۵. مرگ و میر y[%] موریانه‌ها (*Reticulitermes lucifugus Rossi*) به صورت تابعی ازتمرکز x[%] کلرونفتالین

x	۰٫۰۴	۰٫۱۵	۰٫۳۰	۱٫۰۰	۲٫۰۰
y	۳	۱۶	۱۳	۷۰	۹۰

۶. تعداد دور x (دردقیقه) وتوان y(hp) یك موتور دیزلی

x	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۷۵۰
y	۵۸۰	۱۰۳۰	۱۴۲۰	۱۸۸۰	۲۱۰۰

۷. تغییرشکل x (میلی‌متر) وسختی برنیلی y[کیلوگرم برمیلیمترمربع] نوعی فولاد

x	۶	۹	۱۱	۱۳	۲۲	۲۶	۲۸	۳۳	۳۵
y	۶۸	۶۷	۶۵	۵۳	۴۴	۴۰	۳۷	۳۴	۳۲

درهرمورد برای ضریب رگرسیون β یك فاصلهٔ اطمینان ۹۵%ی بیابید، بااستفاده از نمونهٔ داده شده واینکه فرضهای (A۲) و (A۳) صادقند.

۸. x = میزان رطوبت هوا (درصد)، y = انبساط ژلاتین (درصد)

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۰٫۸	۱٫۶	۲٫۳	۲٫۸

۹. (۱,۱)، $(۲,۲+p)$، (۳,۳)، که p ثابت است.

۱۰. نمونهٔ ذکرشده درمسئلهٔ ۷.

ضمیمهٔ ۱: مراجع

A مراجع عمومی

[A1] Abramowitz, M., and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions.* New York: Dover, 1965.

[A2] Buck, R. C., *Advanced Calculus.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1965.

[A3] Courant, R., *Differential and Integral Calculus.* 2 vols. New York: Interscience, 1964, 1956.

[A4] Courant, R., and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics.* 2 vols. New York: Interscience, 1953, 1962.

[A5] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions,* 3 vols. New York: McGraw-Hill, 1953, 1955.

[A6] Fletcher, A., J. C. P. Miller, L. Rosenhead, and L. J. Comrie, *An Index of Mathematical Tables.* Oxford: Blackwell, 1962.

[A7] Fulks, W., *Advanced Calculus.* 2nd ed. New York: Wiley, 1969.

[A8] Jahnke, E., F. Emde, and F. Lösch, *Tables of Higher Functions.* 7th ed. Stuttgart: Teubner, 1966.

[A9] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series.* New York: Dover, 1956.

[A10] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Applications.* New York: Wiley, 1978.

[A11] Magnus, W., F. Oberhettinger, and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics.* 3rd ed. New York: Springer, 1966.

[A12] Protter, M. H., and C. B. Morrey, Jr., *Modern Mathematical Analysis.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.

[A13] Rainville, E. D., *Special Functions.* New York: Macmillan, 1960.

[A14] Thomas, G. B., *Calculus and Analytic Geometry.* 4th ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.

[A15] Whittaker, E. T., and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis.* 4th ed. Cambridge: Harvard University Press, 1927 (reprinted 1965).

B معادلات دیفرانسیل معمولی (فصلهای ۱-۵)

[A4], [A5], [A11], [A13], [A15]

[B1] Birkhoff, G., and G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations.* 3rd ed. New York: Wiley, 1978.

[B2] Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger, *Operational Methods in Applied Mathematics.* New York: Dover, 1963.

[B3] Churchill, R. V., *Operational Mathematics.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1958.

[B4] Coddington, E. A., and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations.* New York: McGraw-Hill, 1955.

[B5] Collatz, L., *Numerical Treatment of Differential Equations.* 3rd ed. New York: Springer, 1960.

[B6] Director, S. W., *Circuit Theory.* New York: Wiley, 1975.

[B7] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. Tricomi, *Tables of Integral Transforms.* 2 vols. New York: McGraw-Hill, 1954.

[B8] Fox, L., *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.

[B9] Hahn, W., *Stability of Motion*. New York: Springer, 1967.

[B10] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley, 1964.

[B11] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover, 1956.

[B12] Kamke, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. New York: Chelsea, 1948. (This extremely useful book contains a systematic list of more than 1500 differential equations and their solutions.)

[B13] Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.

[B14] McLachlan, N. W., *Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences*. 2nd ed. Oxford: Clarendon, 1956.

[B15] Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*. New York: Van Nostrand, 1962.

[B16] Robinson, P. D., *Fourier and Laplace Transforms*. New York: Dover, 1968.

[B17] Stern, T. E., *Theory of Nonlinear Networks and Systems*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965.

[B18] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1944.

[B19] Widder, D. V., *The Laplace Transform*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1941.

C جبر خطی: بردارها و ماتریسها، محاسبات برداری (فصلهای ۶-۹)

[C1] Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1970.

[C2] Bodewig, E., *Matrix Calculus*. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland Pub. 1959.

[C3] Faddeev, D. K., and V. N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra*. San Francisco: Freeman, 1963.

[C4] Frazer, R. A., W. J. Duncan, and A. R. Collar, *Elementary Matrices*. Cambridge: University Press, 1938 (reprinted 1963).

[C5] Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*. 2 vols. New York: Chelsea, 1959.

[C6] Gel'fand, I. M., *Lectures on Linear Algebra*. New York: Interscience, 1961.

[C7] Hohn, F. E., *Elementary Matrix Algebra*. 2nd ed. New York: Macmillan, 1964.

[C8] Kreyszig, E., *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*. Toronto: University of Toronto Press, 1975.

[C9] Lamb, H., *Hydrodynamics*. 6th ed. New York: Dover, 1945.

[C10] McDuffee, C. C., *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea, 1946.

[C11] Milne, E. A., *Vectorial Mechanics*. London: Methuen, 1948.

[C12] Nering, E. D., *Linear Algebra and Matrix Theory*. 2nd ed. New York: Wiley, 1970.

[C13] Schreier, O., and E. Spencer, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*. 2nd ed. New York: Chelsea, 1959.

[C14] Schwerdtfeger, H., *Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices*. Groningen: Noordhoff, 1950.

[C15] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon, 1965.

[C16] Wilkinson, J. H., and C. Reinsch, *Linear Algebra*. New York: Springer, 1971.

D سری و انتگرال فوریه (فصل ۱۰)

[D1] Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*. 3rd ed. London: Macmillan, 1930.

[D2] Churchill, R. V. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1963.

[D3] Davis, H. F., *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Boston: Allyn and Bacon, 1963.
[D4] Rogosinski, W., *Fourier Series*. New York: Chelsea, 1959.
[D5] Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*. New York: McGraw-Hill, 1951.
[D6] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials*. 3rd ed. New York: American Mathematical Society, 1967.
[D7] Titchmarsh, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. 2nd ed. Oxford: Clarendon, 1948.
[D8] Tolstov, G. P., *Fourier Series*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962.
[D9] Zygmund, A., *Trigonometric Series*. 2 vols. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1959.
[D10] Zygmund, A., *Trigonometrical Series*. New York: Dover, 1955.

E معادلات دیفرانسیل جزیی (فصل ۱۱)

[A4], [A5], [B8], [D3]

[E1] Bateman, H., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Cambridge: University Press, 1944 (reprinted 1964).
[E2] Bergman, S., and M. Schiffer, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*. New York: Academic Press, 1953.
[E3] Duff, G. F. D., *Partial Differential Equations*. Toronto: University of Toronto Press, 1956.
[E4] Duff, G. F. D., and D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: Wiley, 1966.
[E5] Forsythe, G. E., and W. R. Wasow, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1960.
[E6] Garabedian, P. R., *Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1964.
[E7] Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem*. New York: Dover, 1952.
[E8] Kellog, O. D., *Foundations of Potential Theory*. New York: Dover, 1953.
[E9] Mitchell, A. R., *Computational Methods in Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1969.
[E10] Petrovsky, I. G., *Lectures on Partial Differential Equations*. New York: Interscience, 1954.
[E11] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*. 2 vols. New York: Dover, 1945.
[E12] Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York: Wiley, 1961.
[E13] Sneddon, I. N., *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1957.
[E14] Sommerfeld, A., *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press, 1949.
[E15] Webster, A. G., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. 2nd ed. New York: Hafner, 1947.

F آنالیز مختلط (فصلهای ۱۲–۱۸)

[A15]

[F1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1966.
[F2] Bieberbach, L., *Conformal Mapping*. New York: Chelsea, 1964.
[F3] Dettman, J. W., *Applied Complex Variables*. New York: Macmillan, 1965.
[F4] Hayman, W. K., *Meromorphic Functions*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
[F5] Hille, E., *Analytic Function Theory*. 2 vols. Boston: Ginn, 1959, 1962.
[F6] Knopp, K., *Theory of Functions*. 2 vols. New York: Dover, 1945.
[F7] Nehari, Z., *Conformal Mapping*. New York: McGraw-Hill, 1952.

[F8] Nevanlinna, R., *Analytic Functions.* New York: Springer, 1970.
[F9] Rothe, R., F. Ollendorf, and K. Pohlhausen, *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems.* New York: Dover, 1961.
[F10] Springer, G., *Introduction to Riemann Surfaces.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957.
[F11] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions.* 2nd ed. London: Oxford University Press, 1939 (reprinted 1975).

G آنالیز عددی (فصل ۱۹)

[B5], [B8], [C3], [C15], [C16], [E5], [E9]

[G1] Alt, F. L., *Electronic Digital Computers.* New York: Academic Press, 1958.
[G2] Buckingham, R. A., *Numerical Methods.* London: Pitman, 1957.
[G3] Forsythe, G. E., and P. C. Rosenbloom, *Numerical Analysis and Partial Differential Equations.* New York: Wiley, 1958.
[G4] Henrici, P., *Elements of Numerical Analysis.* New York: Wiley, 1964.
[G5] Hartree, D. R., *Numerical Analysis.* 2nd ed. London: Oxford University Press, 1958.
[G6] Hildebrandt, F. B., *Introduction to Numerical Analysis.* New York: McGraw-Hill, 1956.
[G7] Hull, T. E., and D. D. F. Day, *Commputers and Problem Solving.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1970.
[G8] Isaacson, E., and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods.* New York: Wiley, 1966.
[G9] Kopal, Z., *Numerical Analysis.* 2nd ed. London: Chapman and Hall, 1961.
[G10] McCracken, D. D., and W. S. Dorn, *Numerical Methods and* FORTRAN *Programming.* New York: Wiley, 1964.
[G11] Milne, W. E., *Numerical Calculus.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1949.
[G12] National Physical Laboratory, *Modern Computing Methods.* 2nd ed. London: Her Majesty's Stationery Office, 1961.
[G13] Noble, B., *Numerical Methods.* 2 vols. New York: Interscience, 1964.
[G14] Rivlin, T. J., *An Introduction to the Approximation of Functions.* Waltham, Mass.: Blaisdell, 1969.
[G15] Sard, A., and S. Weintraub, *A Book of Splines.* New York: Wiley, 1971.
[G16] Todd, J., *Numerical Analysis.* In: Condon, E. U., and H. Odishaw, *Handbook of Physics.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1967.
[G17] Todd, J., *Survey of Numerical Analysis.* New York: McGraw-Hill, 1962.
[G18] Truitt, T. D., and A. E. Rogers, *Basics of Analog Computers.* New York: Rider, 1960.
[G19] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962.
[G20] Willers, F. A., *Practical Analysis.* New York: Dover, 1948.

H احتمال و آمار (فصل ۲۰)

[J2], [J6], [J8]-[J10], [J13]-[J15]

[H1] Cochran, W. G., *Sampling Techniques.* 2nd ed. New York: Wiley, 1963.
[H2] Cochran, W. G., and G. M. Cox, *Experimental Designs.* 2nd ed. New York: Wiley, 1957.
[H3] Cox, D. R., *Planning of Experiments.* New York: Wiley, 1958.
[H4] Cramér, H., *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton: Princeton University Press, 1946.

[H5] Feller, W., *An Introduction to Probability and Its Applications.* Vol. I. 2nd ed. New York: Wiley, 1957.

[H6] Fisher, R. A., *Statistical Methods for Research Workers.* 13th ed. New York: Hafner, 1958.

[H7] Fishman, G. S., *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation.* New York: Wiley, 1973.

[H8] Fraser, D. A. S., *Nonparametric Methods in Statistics.* New York: Wiley, 1957.

[H9] Grant, E. L., *Statistical Quality Control.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1952.

[H10] Huff, D., *How to Lie with Statistics.* New York: Norton, 1954.

[H11] IRCCRAND, The Ohio State University Random Number Generator Package. Department of Statistics, The Ohio State University. Columbus, Ohio, 1974.

[H12] Kreyszig, E., *Introductory Mathematical Statistics. Principles and Methods.* New York: Wiley, 1970.

[H13] Parzen, E., *Modern Probability Theory and Its Applications.* New York: Wiley, 1960.

[H14] Rice, W. B., *Control Charts in Factory Management.* New York: Wiley, 1947.

[H15] Scheffé, H., *The Analysis of Variance.* New York: Wiley, 1959.

[H16] Wald, A., *Statistical Decision Functions.* New York: Wiley, 1950.

[H17] Wilks, S. S., *Mathematical Statistics.* New York: Wiley, 1962.

J جداول

[A6], [A8], [B7]

[J1] *Barlow's Tables of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots, and Reciprocals.* 4th ed. London: Spon, 1941 (10th impression 1965).

[J2] British Association for the Advancement of Science, *Mathematical Tables.* Vol. VII. *The Probability Integral.* Cambridge: University Press, 1939 (reissued 1968).

[J3] *C.R.C. Standard Mathematical Tables.* 19th ed. Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Co., 1971.

[J4] *C.R.C. Handbook of Tables for Mathematics.* 4th ed. Cleveland, Ohio: Chemical Rubber Co., 1975.

[J5] Davis, H. T., *Tables of the Mathematical Functions.* 3 vols. Bloomington, Ind.: Principia Press, 1962–1963.

[J6] Dodge, H. F., and H. G. Romig, *Sampling Inspection Tables.* 2nd ed. New York: Wiley, 1959.

[J7] Dwight, H. B., *Mathematical Tables.* 3rd ed. New York: Dover 1961.

[J8] Fisher, R. A., and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research.* 6th ed. London: Oliver and Boyd, 1963.

[J9] Hald, A., *Statistical Tables and Formulas.* New York: Wiley, 1952.

[J10] Harvard Computation Laboratory, *Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1955.

[J11] National Bureau of Standards, *Tables of the Error Function and Its Derivative.* Washington, D.C.: US Gov. Printing Office, 1954.

[J12] National Bureau of Standards, *Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients.* New York: Columbia University Press, 1944.

[J13] National Bureau of Standards, *Tables of Normal Probability Functions.* Washington, D.C.: US Gov. Printing Office, 1953.

[J14] Pearson, E. S., and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians.* Vol. I. 3rd ed. Cambridge: University Press, 1966.

[J15] Rand Corporation, *A Million Random Digits with* 100,000 *Normal Deviates.* Glencoe: Free Press, 1955.

ضمیمهٔ ۲: جواب مسائل با شمارهٔ فرد

بخش ۱۰۱، صفحهٔ ۱۰

۱. مرتبه اول

۳. مرتبه دوم

۵. مرتبه اول

۱۱. $y=-e^{-x}+c$

۱۳. $y=-\frac{1}{12}\cos 2x+c_1x+c_2$

۱۵. $y'+y=e^{-x}$

۱۷. $y=(x^3-23)/3$

۱۹. $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$

۲۱. $c=-1/8$

۲۵. ۰ر۴۱۷ مایل

۲۷. ۷ر۴۲ کیلومتر = ۴ر۶۱ مایل

۲۹. $P(h)=P_0\exp(-0.000116\,h)$

بخش ۲۰۱، صفحهٔ ۱۴

۱۹. منحنیهای جواب دربالای $y=3$ و $y=0$ نزولی یکنوا هستند و وقتی‌که $x\to\infty$ به ترتیب به ۳ و $-\infty$ میل می‌کنند.

بخش ۳۰۱، صفحهٔ ۲۸

۳. فرض کنید که $\tilde{c}$ را در (۴) فراموش کرده، نوشته‌اید $\ln|y|=-x^2$، این رابطه را به $y=e^{-x^2}$ تبدیل کرده و بعداز آن ثابت c را اضافه کرده‌اید. در این صورت دارید $y=e^{-x^2}+c$ که جواب $y'=-2xy$ نیست.

۵. $x^2+y^2=c$

۷. $y=c\ln|x|$

۹. $y=ce^{-ax}-b/a$

۱۱. $y=1+(\ln|x|+c)^2$

۱۳. $y=c/\cosh^2 x$

۱۵. $I=I_0e^{-(R/L)t}$

۱۷. $y=\arcsin x$

۱۹. $y=y_0\exp(-x^2)$

۲۱. $y=۴\ln|x|/\ln ۳$ **۲۳.** $r=۲\sin^۲\theta$

۲۵. ۴ر۱۰ کیلومتر بر ثانیه

۲۷. ثابت $=c=pV$. این قانونی است که بویل (۱۶۶۲) و ماریوت (۱۶۷۶) از راه تجربه بدان دست یافتند.

۲۹. $\Delta A=-kA\Delta x$ (A مقدار نور، برخوردکننده، ΔA نور جذب شده، Δx ضخامت و k — ضریب تناسب هستند). اگر $\Delta x\to ۰$ در این صورت $A'=-kA$. بنابراین $A(x)=A_۰e^{-kx}$ برابر است با مقدار نور در لایهٔ ضخیم در عمق x از سطح برخورد.

۳۳. $I\,(d\omega/dt)=-k\omega^{۱/۲}$، که در آن $k>۰$، $\omega(t)=(\sqrt{\omega_۰}-(k/۲I)\,t)^۲$، $t_۱=۲I\sqrt{\omega_۰}\,(۱-۲^{-۱/۲})/k$، $t_۲=۲I\sqrt{\omega_۰}/k$.

۳۵. $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dr}\,\dfrac{dr}{dt}=۴\pi r^۲\dfrac{dr}{dt}=kA=۴k\,\pi r^۲$ ؛ ۷ر۵ ماه.

۳۷. $T(t)=۲۳-۸e^{-kt}$، $T(۱)=۱۹$ می‌دهد $k=\ln ۲$، $t=۶ر۳۲\,\min$.

۳۹. $B(h)=\pi r^۲$، $r^۲=h^۲\mathrm{tg}^۲۳۰^\circ=h^۲/۳$، $dh/dt=-۱۲ر۷h^{-۳/۲}$، $۰ر۴h^{۵/۲}=c-۱۲ر۷\,t$، $c=۴\times ۱۰^۴$، $t=c/۱۲ر۷=۳۱۵۰\mathrm{s}\approx ۵۳\min$

۴۱. (الف) ۲۱ر۱ متر. (ب) $\dot v=g-(\overline{b}/m)v=-۰ر۱۰(v-۹۸)$ وبنابراین وقتی $t\to\infty$، $۹۸\,\mathrm{m/s}\leftarrow v(t)=۹۸+c\,e^{-۰ر۱۰t}$ و دیگر مدل مناسب نیست.

۴۳. به‌دست می‌آوریم

$$v(t)=۳۷ر۱۹(۱-e^{-۰/۱۰۸۹t}),$$
$$s(t)=۳۷ر۱۹[t-۹ر۱۸۳(۱-e^{-۰/۱۰۸۹t})],$$
$$s(۲ر۲۲)=۹ر۲\ \mathrm{m}$$

۴۵. $y(t)=(b-acf)/(۱-cf)$، که درآن $f(t)=\exp(b-a)kt$.

۴۷. هذلولی ثابت $=k^۲x^۲-y^۲$.

۴۹. شیب نرمال $y=ax$ برابر است با $a=y/x$ و شیب مماس $y'=-۱/a=-x/y$، بنابراین (دایره‌ها) $y^۲+x^۲=c$، $yy'+x=۰$.

۵۱. $y=cx$ **۵۳.** $y^۲-x^۲=c$

۵۵. $y=x+c$

بخش ۴.۱ ، صفحهٔ ۳۶

۱. $y=x(\ln|x|+c)$

۳. $y=x+x/(c-\ln|x|)$

۵. $y=x\arcsin(x+c)$

۷. $\ln(x^{2}+y^{2})+2\arctan\frac{y}{x}=\ln 2+\frac{\pi}{2}$

۹. $y=x+x(5-x^{2})^{-1/2}$

۱۱. $y=x+\frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}}$

۱۳. $y=x^{-1}\ln|x+c|$

۱۵. $(y-x)^{2}-2y=c$

۱۷. $y=ax,\ y/x=a=$ ثابت $,\ y'=g(a)=$ ثابت

۱۹. $2xy^{2}+xy'=y,\ \ y^{-2}(y\,dx-x\,dy)=2x\,dx,\ \ x/y=x^{2}+c,$
$y=x/(x^{2}+1)$

بخش ۵.۱، صفحهٔ ۴۰

۱. $du=8x\,dx+18y\,dy$

۳. $du=(y\,dx+x\,dy)e^{xy}$

۵. $(3x^{2}y-2\sin 2x)\,dx+x^{3}dy=0$

۷. $e^{-2xy}[(1-2xy)\,dx-2x^{2}dy]=0$

۹. $xy^{2}=c$

۱۱. $y/x=c$

۱۳. $x^{2}\ln|y|=c$

۱۵. از (۴ب) داریم $x+k'(y)=x$ — که یك تناقض است. باتفکیك متغیرها بەدست می‌آوریم $y=cx$.

۱۷. خیر، $y=1/(3\ln|x|+c)$

۱۹. بلی، $\cosh x\cos y=c$

۲۱. بلی، $\ln|x|\cos 2y=c$

۲۳. $x^{2}/a^{2}+y^{2}/b^{2}=c$

۲۵. $x^{2}+y/x=c$

۲۹. $g=ky+c_{1},\ h=kx+c_{2}$ که در آنها c_{1}، c_{2} و k ثابت هستند.

۳۱. $x^{3}y^{4}=16$

۳۳. هذلولی $(x-3)(y-1)=1$

۳۵. $e^{x}\cos y+(x-y)^{۲}=\pi^{۲}-۱$

۳۷. $(x+۲)^{۲}-(y+۱)^{۲}=۱$

۳۹. $(x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۱$

بخش ۶.۱، صفحهٔ ۴۴

۱. $e^{۲x}\cos \pi y=c$

۳. $(y+۱)^{۲}=cx^{۳}$

۵. $x\tan xy=c$

۷. $F=yx^{۲},\ x^{۳}y^{۲}=c$

۹. $F=e^{x},\ e^{x}\sin y=c$

۱۱. $F=\sin x,\ \sin^{۲}x\cos y=c$

۱۳. $F=x,\ x^{۲}y=-۴$

۱۵. $F=۱/xy,\ x^{۲}y^{۲}e^{x}=۱۸\,e^{۳}$

۱۷. $xy^{۲}=c$ ، بنابراین سایرعوامل عبارتند از $xy^{۲}F=xy^{۳}$ ، $(xy^{۲})^{۲}F=x^{۲}y^{۵}$ ، وغیره.

۱۹. $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x+(a/x)Q$

۲۱. $\partial Q/\partial x=\partial P/\partial y+P$

بخش ۷.۱، صفحهٔ ۵۰

۳. $y=ce^{x}+x$

۵. $y=cx^{-۱}+x$

۷. $y=ce^{۴x}+x^{۲}$

۹. $y=ce^{-۲x}+۰٫۲e^{۲x}+۲$

۱۱. $y=cx^{۲}+x^{۲}e^{x}$

۱۳. $y=(c+۰٫۵\,e^{x^{۲}})\,x^{-۲}$

۱۵. $y=(x-۱)\,e^{x}$

۱۷. $y=e^{x}x^{۳}-x$

۲۵. $y(x)=r_{۰}/f_{۰}+ce^{-f_{۰}x}$

۲۷. $m=W/g=۴۹۰۰/۹٫۸۰\ \mathrm{kg}$ ، $dv/dt=-۰٫۰۲\,(v-۲۰)$ ، $v(t)=۲۰\,(۱-e^{۰٫۰۲t})$ ، $v_{\infty}=۲۰\,\mathrm{m/s}=۷۲\,\mathrm{km/h}$ ، $t=۱۱۵\ \mathrm{sec}$ ، $y=۱٫۴\ \mathrm{km}$.

۲۹. $v(t)=\dfrac{W-B}{k}(۱-e^{-kt/m})$ ، $m=\dfrac{W}{g}=\dfrac{۲۲۵۴}{۹٫۸۰}=۲۳۰\ \mathrm{kg}$ ، $y(t)=\dfrac{W-B}{k}\left[t-\dfrac{m}{k}(۱-e^{-kt/m})\right]$ ، $t_{\mathrm{crit}}=۱۷٫۳\,\mathrm{s}$ ، $y_{\mathrm{crit}}=۱۰۶\,\mathrm{m}$.

بخش ۸.۱، صفحهٔ ۵۴

۱. $v=e^{-x},\ u=۲e^{x}+c,\ y=ce^{-x}+۲$

۳. $y=(۳x+c)e^{x}$

۵. $x=(y^{۴}/۲)+cy^{۲}$

۹. $y = 1/(1+ce^{x})$

۱۱. $y = 1/(ce^{-x^2/2} - x^2 + 2)$

۱۳. $y = \left(\frac{1}{2}xe^{x} + cxe^{-x}\right)^{1/2}$

۱۵. $u' + \left(f + \frac{a'}{a}\right)u = \frac{1}{a}(r - fb - b')$

۱۷. پیوستگی f و r وجود انتگرالهای (۴) را ایجاب می‌کند، بنابراین (۴)، به طور کامل y را معین می‌کند و درآن c به‌طور یکتا با $y(x_0) = y_0$ مشخص می‌شود.

۱۹. $y' = -f(x)y + r(x)$ ودر (x_0, y_0) برابرمی‌شود با $-f(x_0)y_0 + r(x_0)$، و $\eta - y_0 = (\xi - x_0)[r(x_0) - f(x_0)y_0]$ نمایش خطی است که از (x_0, y_0) با آن شیب می‌گذرد. به همین ترتیب $\eta - y_1 = (\xi - x_0)[r(x_0) - f(x_0)y_1]$ نمایش دهندهٔ خطی است که از (x_0, y_1) می گذرد وشیب آن برابراست بامقدار y' در (x_0, y_1) که از (۱) به‌دست می‌آید. مختصات نقطهٔ تقاطع این دوخط (ξ, η) است وچون این مختصات به y بستگی ندارند حکم ثابت شده‌است.

بخش ۱.۹، صفحهٔ ۶۲

۵. $t = \tau_L \ln 100 = 0.009$ [sec]

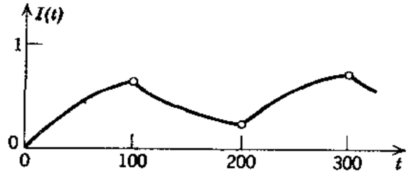
۷. $\tau_L = 0.025$ sec, $t = 0.02$ sec

۹. $I(0) = -E_0\omega L/(R^2 + \omega^2 L^2)$

۱۵. $RQ' + Q/C = E_0$، $Q(t) = E_0 C(1 - e^{-t/RC})$، $V(t) = Q(t)/C = 12(1 - e^{-0.05t})$

۱۷. $I(t) = \omega E_0 C[1 + (\omega RC)^2]^{-1}(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t - e^{-t/RC})$.

۱۹. از (۵*)، $I = I_1 = 1 - e^{-0.01t}$ $(0 \leqslant t \leqslant 100)$، $I = I_2 = c_2 e^{-0.01(t-100)}$ $(100 \leqslant t \leqslant 200)$ و $I_1(100) = I_2(100)$ داریم $c_2 = 1 - e^{-1} \approx 0.63$. $I = I_3 = 1 + c_3 e^{-0.01(t-200)}$ $(200 \leqslant t \leqslant 300)$ ازاینکه $I_2(200) = I_3(200)$ نتیجه‌می‌شودکه $c_3 = (1 - e^{-1})e^{-1} - 1 \approx -0.77$ و به همین ترتیب. (شکل را ببینید)



مسئلهٔ ۱۹

بخش ۱۰.۱، صفحهٔ ۶۹

۱. خطوط مستقیم وموازی باشیب ۱/۳.

۳. هذلولیهایی که مجانبهای آنها محورهای مختصاتند.

۵. سهمیهای همنهشت.

۷. $y+1-C(x-4)=0$

۹. $x^2/c^2+y^2/(c^2+1)-1=0$

۱۱. $y'=3y/x$

۱۳. $y'=y$

۱۵. $y'=xy/(x^2-1)$

۱۷. $y=\ln|x|+c^*$

۱۹. بیضی‌های $x^2+3y^2=c^*$

۲۱. $y=\sqrt{c^*-2x}$

۲۳. $xy=c^*$

۲۵. منحنیهای به‌شکل زنگ $x=c^*e^{-y^2}$

۲۷. $2x^2+3y^2=c^*$

۲۹. $e^x\cos y=c^*$

۳۱. $y=c^*e^{-2x}$

۳۳. از $dv=0$ نتیجه می‌شود $dy/dx=-v_x/v_y$ واین باید برابر u_y/u_x باشد (ر. ك. مسئلهٔ ۳۲).

۳۵. $y'=-x/y,\ x^2+y^2=c^*$

۳۹. $x^2-y^2=c^*$

بخش ۱۱.۱، صفحهٔ ۷۵

۱. $y_n=1+2\int_0^x y_{n-1}(t)\,dt,\ \ y_0=1,\ y_1=1+2x,$
$y_2=1+2x+(2x)^2/2!,$ غیره, $y=e^{2x}$

۳. $y_n=\int_0^x y_{n-1}^2(t)dt+4x,\ y_0=0,\ y_1=4x,\ y^2=4x+\frac{16}{3}x^3,\ \cdots,$
$y=2\tan 2x$

۵. $y_n=1+\int_0^x[t+y_{n-1}(t)]\,dt=1+\frac{1}{2}x^2+\int_0^x y_{n-1}(t)\,dt,$
$y_0=1,\ y_1=1+x+\frac{1}{2}x^2,\quad y_2=1+x+x^2+\frac{1}{6}x^3,$ غیره,
$y=2e^x-x-1$

۹. $y_1(1)=2,\ y_2(1)=2{,}5,\ y_3(1)=2{,}667$

بخش ۱۲.۱، صفحهٔ ۸۱

۳. $y=cx^{4}$ (c دلخواه است) ۵. هیچکدام

۷. اگرمی‌داشتند یکتایی نقض می‌شد (چرا ؟)

۹. ۱/۲، بزرگترین مقدار $b/(1+b^{2})$ که درآن $1+b^{2}$ کوچکترین K است.

۱۱. $\alpha=1/4$

۱۳. بلی، با $M=1$، برروی محور xها $(y=0)$.

۱۵. $y\equiv 0$, $y=(x-1)^{2}$. نه برروی محور xها $(y=0)$.

بخش ۱.۲، صفحهٔ ۸۷

۵.
$$(y_1+y_2)''+f(y_1+y_2)'+g(y_1+y_2)=(y_1''+fy_1+gy_1)+(y_2''+fy_2'+gy_2)=2r$$

۷.
$$(y_1+y_2)''+f(y_1+y_2)'+g(y_1+y_2)=(y_1''+fy_1'+gy_1)+(y_2''+fy_2'+gy_2)=r+0=r$$

۹. $y=c_1e^{-x}+\frac{1}{2}x^{2}+c_2$ ۱۱. $y=c_1\sinh x+c_2$

۱۳. $y=c_1x^{-1}+c_2$

۱۵. $y=c_1e^{t}+c_2, c_1+c_2=1, c_1=2, y=2e^{t}-1, y(5)=2e^{5}-1=296\,\mathrm{m},$
$\dot{y}(5)=297\,\mathrm{m/s}$

۱۷. $y=e^{x}-1$ ۲۱. $x=\frac{1}{5}e^{2y}+c_1y+c_2$

۲۳. $y=x^{4}$

بخش ۲.۲، صفحهٔ ۹۱

۱. e^{x}, e^{-x} ۳. e^{-2x}, e^{x}

۵. $1, e^{x}$ ۷. e^{3x}, e^{-3x}

۹. $e^{-(2+i)x}, e^{-(2-i)x}$

۱۱. از قضیهٔ بنیادی ۱، بخش ۱.۲، استفاده کنید.

۱۳. (الف) $1, e^{-4x}$؛ (ب) $c_1e^{-4x}+c_2$ ۱۵. $y''+2y'-3y=0$

۱۷. $y''-۲y'=۰$

۱۹. $y''+۲y'+۵y=۰$

بخش ۳.۲، صفحهٔ ۹۷

۱. مستقل

۳. مستقل

۵. وابسته

۷. مستقل

۹. وابسته

۱۱. وابسته

۱۳. مستقل

۱۹. $c_۱e^{۵x}+c_۲e^{-۵x}$

۲۱. $c_۱e^{۳x}+c_۲$

۲۳. $c_۱e^{۳x}+c_۲e^{-۵x}$

۲۵. $y=e^{۳x}-۲e^{x}$

۲۷. $y=۳\cosh x$

۲۹. $y=\cosh ۲x$

۳۱. $y=e^{-x/۳}$

۳۳. اگر $y\not\equiv ۰$، $y(A)=y(B)=۰$ و $y_۱$ در (۱) و (۵) صدق می‌کند. همچنین است درمورد $y_۲=y_۱+y$ و $y_۱\not\equiv y_۲$. بالعکس اگر $y_۱$ و $y_۲$ جوابهای (۱) و (۵) باشند دراین‌صورت $y=y_۱-y_۲\not\equiv ۰$ جواب (۱) بوده و $y(A)=y(B)=۰$.

۳۷. $y''+\omega^۲y=۰$

۳۹. $y''+۶y'+۱۰y=۰$

بخش ۴.۲، صفحهٔ ۱۰۴

۱. $y=A\cos x+B\sin x$

۳. $y=e^{-۲x}(A\cos ۲x+B\sin ۲x)$

۵. $y=e^{x}(A\cos ۳x+B\sin ۳x)$

۷. ۲، $y=A\cos \pi x+B\sin \pi x$

۹. ۳، $y=(c_۱+c_۲x)e^{-۳x}$

۱۱. ۱، $y=c_۱e^{x/۲}+c_۲e^{-۲x}$

۱۳. ۳، $y=(c_۱+c_۲x)e^{x/۲}$

۱۵. ۱، $y=c_۱e^{x/۲}+c_۲e^{-x/۴}$

۱۷. $y''+۲y'+۲y=۰$

۱۹. $y''-۸y'+۱۶y=۰$

۲۱. $y''-۹y=۰$

۲۳. $y''-۴y'=۰$

۲۹. $y''+۴y'+۵y=۰,\ y=-۳e^{-۲x}\sin x$

۳۱. $y''-۲y'+(\pi^۲+۱)y=۰,\ y=e^{x}(\cos \pi x-\sin \pi x)$

۳۳. $y=۲e^{۲x}$

۳۵. $y=(۲+۲x)e^{۲x}$

۳۷. $y=e^{-۲x}(\cos x-\sin x)$

۳۹. $y=e^{۲x}-۲e^{x}$

بخش ۵.۲ ، صفحهٔ ۱۰۸

۱. $-16x^2+20x-3,\ 0,\ 3\sin x-5\cos x$

۳. $0,\ 3e^{2x}\ 0,\ -3e^{-x}$ ۹. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$

۱۱. $y=e^{-x}(A\cos 2\pi x+B\sin 2\pi x)$ ۱۳. $y=c_1e^{x/2}+c_2e^{-x/3}$

بخش ۶.۲ ، صفحهٔ ۱۱۷

۱. مستقل. $1/\sqrt{2}=0{,}7$ برابر بسامد اصلی

۳. $1/2\pi,\ 1/\pi,\ 3/2\pi,\ 2/\pi$

۵. $y=y_0\cos\omega_0 t+(v_0/\omega_0)\sin\omega_0 t=(y_0^2+v_0^2\omega_0^{-2})^{1/2}\cos(\omega_0 t-\text{arc}\tan(v_0/y_0\omega_0))$

۹. $ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta\approx-mg\theta$ ($w=mg$ مؤلفه مماسی)، $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$، $\omega_0^2=g/l$. جواب $\sqrt{g/l}/2\pi$

۱۱. $$T=2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg+(k_1+k_2)l}}$$

۱۳. $m\ddot{y}=-a\gamma y$ که در آن $m=1\text{kg}$ ، $ay=\pi\times 0{,}01^2\times 2y$ برابر حجم آبی است که نیروی برگرداندهٔ $a\gamma y$، با $\gamma=9800$ (= متر مکعب / وزن) را باعث می‌شود. $\ddot{y}+\omega_0^2 y=0$ ، $\omega_0^2=a\gamma/m=a\gamma=0{,}000628\gamma$. بسامد برابر است با $\omega_0/2\pi=0{,}4(\sec^{-1})$

۱۷. هرگاه c_1 و c_2 هم‌علامت باشند.

۲۳. جوابهای مثبت $\tan t=1$ ، یعنی، $\pi/4$ (ماکزیمم)، $5\pi/4$ (مینیمم) و غیره .

۲۵. هرگاه ماکزیمم در t_0 باشد بعدی آن در $t_1=t_0+2\pi/\omega^*$ است. بنابراین سینوس و کسینوس (۱۱) دارای دورهٔ تناوب $2\pi/\omega^*$ هستند، نسبت آنها می‌شود $\exp(-\alpha t_0)/\exp(-\alpha t_1)=\exp(2\pi\alpha/\omega^*)\times\Delta=2\pi$ $\tan t=-1{,}1$ نتیجه می‌شود $t_{\min}=3\pi/4$ و $t_{\max}=7\pi/4$ وغیره.

۲۷. $y=[(v_0+\alpha y_0)t+y_0]e^{-\alpha t}$

۲۹. $y=c_1e^{-v_0/c_1}/\alpha$ ، که در آن $c_1=v_0+\alpha y_0$

بخش ۷.۲ ، صفحهٔ ۱۲۳

۱. با قرار دادن $y_2=uy_1$ ، $y_2'=uy_1'+u'y_1$ ، $y_2''=uy_1''+2u'y_1'+u''y_1$ در (۱)

داریم $(x^2y_1''+axy_1'+by_1)u+(2x^2y_1'+axy_1)u'+x^2u''y_1=0$. چون y_1 در (۱) صدق می‌کند عامل u صفر است. چون درحالت بحرانی $y_1'=mx^{m-1}$ و $a=1-2m$ عبارت باقیمانده می‌شود $u'+xu''=0$. بنابراین $u'=1/x$، $u=\ln x$، $y_2=x^m\ln x$.

۵. $y=c_1x+c_2x^3$ ۷. $y=(c_1+c_2\ln x)x$

۹. $y=c_1+c_2x^4$ ۱۱. $y=c_1+c_2\ln x$

۱۳. $2z-3=x,\ y=c_1(2z-3)^{-2}+c_2(2z-3)^{-1/2}$

۱۵. $y=(1-\ln x)x^2$ ۱۷. $y=x-x^3$

۱۹. $\ddot{y}+(a-1)\dot{y}+by=0$، $x=e^t$، $t=\ln x$؛ بنا به‌قاعدهٔ زنجیر

$\dot{y}=y'\dot{x}=y'x$؛ $y''x^2+y'x+(a-1)y'x+by=0$، $\ddot{y}=y''x^2+y'x$

بخش ۸.۲، صفحهٔ ۱۳۱

۱. $W=(\lambda_2-\lambda_1)\exp(\lambda x+\lambda_2 x)$ ۳. $W=qe^{2px}$

۵. $W=(m_2-m_1)x^{m_1+m_2-1}$ ۷. $y''+\omega^2y=0$

۹. $x^2y''-1{,}5xy'+y=0$ ۱۱. $xy''-y'=0$

۱۳. $y''+2y'+2y=0$ ۱۵. $y''+\beta^2y=0$

۱۷. وابسته   ۱۹. مستقل

۲۱. وابسته   ۲۳. خیر

۲۵. قضیهٔ ۲ را به‌کار برید.

بخش ۹.۲، صفحهٔ ۱۳۵

۷. وابسته   ۹. وابسته   ۱۱. وابسته   ۱۳. مستقل

بخش ۱۰.۲، صفحهٔ ۱۳۸

۳. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$

۵. $y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$

۷. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$

۹. $y'''-3y''+3y'-y=0$

۱۱. $y^{\text{IV}}-۶y'''+۹y''=۰$ ۱۳. $y^{\text{V}}-۵y'''+۴y'=۰$

۱۷. $y=c_۱x^{-۱}+c_۲x+c_۳x^۳$ ۱۹. $y=(c_۱+c_۲e^x+c_۳e^{-x})x$

بخش ۱۱۰۲، صفحهٔ ۱۴۱

۷. $y=c_۱e^x+c_۲e^{-x}+xe^x$

۹. $y=A\cos ۲x+B\sin ۲x+۳x\cos ۲x$

۱۱. $y=c_۱e^x+c_۲e^{-x}-\cos x$ ۱۳. $y=c_۱x^{۱/۲}+c_۲x^{۱/۲}\ln x+\cos(x/۲)$

۱۵. $y=(c_۱+c_۲x)e^{-۳x}+(x\arctan x-۰٫۵\ln(x^۲+۱))e^{-۳x}$

بخش ۱۲۰۲، صفحهٔ ۱۴۷

۱. $D(D-s)y=kx^n,\ D^{n+۲}(D-s)y=kD^{n+۱}[x^n]=۰,$

۳. $y=K_۰+K_۱x+\cdots+K_{n+۱}x^{n+۱}+ce^{sx}$

۳. $x^۲+x-۲$ ۵. $۱٫۵x^۴-۵x^۳+۹٫۵x^۲-۱۱x+۶$

۷. $-۵\cos ۲x+\sin ۲x$ ۹. $-x\cos x$

۱۱. $۲x^۳-۳x^۲+۱۵x-۸$ ۱۳. $A\cos x+B\sin x-x^۲-x+۲$

۱۵. $A\cos ۲x+B\sin ۲x+۰٫۲e^{-x}$ ۱۷. $A\cos x+B\sin x-۰٫۵x\cos x$

۱۹. $c_۱e^{۲x}+c_۲e^x+۰٫۵xe^{۲x}$

۲۱. $ce^{-x}+x^۴-۴x^۳+۱۲x^۲-۲۴x+۲۴$

۲۳. $y=۵\cos ۵x-\sin ۵x+۰٫۲x$ ۲۵. $۳e^x+۲x^۲$

۲۷. $e^{-x}-e^{۲x}+xe^{۲x}$ ۲۹. $e^{-۲x}\cos ۲x+\sin x$

بخش ۱۳۰۲، صفحهٔ ۱۵۵

۱. $y=A\cos t+B\sin t-\cos ۲t$

۳. $y=A\cos ۴t+B\sin ۴t+(\cos t-\sin t)/۱۵$

۵. $y=-۵\cos ۳t+۲\sin ۳t+۲\cos t-\sin t$

۷. $y=c_۱e^{-t}+c_۲e^{-۲t}+\sin t-۳\cos t$

۹. $y=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)+۶\sin ۳t-۷\cos ۳t$

۱۱. $y=e^{-t}(A\cos ۲t+B\sin ۲t)+۰٫۱\cos t-۰٫۲\sin t$

۱۳. $y=\cos ۵t+\sin t$

۱۵. $y=(y_۰-(۱-\omega^۲)^{-۱})\cos t+v_۰\sin t+(۱-\omega^۲)^{-۱}\cos \omega t$

۱۷. $y_۰=۱/(۱-\omega^۲),\ v_۰=۰$. خیر.

۲۱. $y=e^{-۵t}\cos ۲t+\sin t$

۲۳. $y=e^{-t}\sin t-۰٫۵\sin ۲t$

۲۵.
$$y=\begin{cases}(۱+۲/\pi^۲)(۱-\cos t)-t^۲/\pi^۲ & \text{هرگاه } ۰\leqslant t\leqslant \pi\\ -(۱+۴/\pi^۲)\cos t+(۲/\pi)\sin t & \text{هرگاه } t>\pi\end{cases}$$

بخش ۱۴۰۲، صفحهٔ ۱۶۲

۳. $R>R_{\text{crit}}=۲\sqrt{L/C}$ حالت I است، و به‌همین ترتیب.

۵. $S=۰$ یعنی $C=۱/\omega^۲L$.

۷. $I=-۰٫۷۵\cos ۱۰t+۰٫۶\sin ۱۰t$

۹. $I=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)+۵\cos t+۱۰\sin t$

۱۱. $I=(c_۱+c_۲t)e^{-t}+۱۲\cos ۲t+۹\sin ۲t$

۱۳. $I=۶۰\sin ۲t-۳۰\sin t$

۱۵. $I=۵e^{-۲t}\sin t$

۱۷. $I=e^{-۳t}(۳\sin ۴t-۴\cos ۴t)+۴\cos ۵t$

۱۹.
$$I=\begin{cases}I_۱\equiv A_۱\cos t+B_۱\sin t+۱ & \text{وقتی } ۰<t<a\\ I_۲\equiv A_۲\cos t+B_۲\sin t & \text{وقتی } t>a\end{cases}$$

از اینکه $I(۰)=۰$ ، $Q(۰)=۰$ ، $E(۰)=۰$ نتیجه می‌شود $\dot{I}(۰)=۰$ ، $A_۱=-۱$ ، $B_۱=۰$ و $\dot{I}_۱=۱-\cos t$. از روی این بدست می‌آوریم $I_۱(a)=۱-\cos a$ ، $\dot{I}_۱(a)=\sin a$. بنابراین $I_۲(a)=I_۱(a)=۱-\cos a$، $\dot{I}_۲(a)=\dot{I}_۱(a)-a=-a+\sin a$ یعنی $A_۲\cos a+B_۲\sin a=۱-\cos a$، $-A_۲\sin a+B_۲\cos a=-a+\sin a$. بنابراین $A_۲=\cos a+a\sin a-۱$، و $B_۲=\sin a-a\cos a$

$$I=\begin{cases} 1-\cos t & \text{وقتی } 0<t<a \\ \cos(t-a)-a\sin(t-a)-\cos t & \text{وقتی } t>a \end{cases}$$

.۲۱
$$I=\begin{cases} \frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t & \text{وقتی } 0<t<\pi \\ -\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})\cos t+\frac{1}{2}(3-e^{-\pi})\sin t & \text{وقتی } t>\pi \end{cases}$$

.۲۵
$$I=\begin{cases} 1-e^{-t} & \text{وقتی } t<a \\ [(1-a)e^{a}-1]e^{-t} & \text{وقتی } t>a \end{cases}$$

بخش ۱۵.۲، صفحهٔ ۱۶۷

.۱ $I_p=\mathrm{Re}[(-0{,}1-0{,}2i)(\cos 2t+i\sin 2t)]=-0{,}1\cos 2t+0{,}2\sin 2t$

.۳ $I_p=(360\sin 3t-300\cos 3t)/61$

.۵ $I_p=(50\sin 4t-110\cos 4t)/73$

.۷ $y_p=2\sin 4t$

.۹ $y_p=0{,}1008\sin 10t-0{,}2006\cos 10t$

بخش ۱۶.۲، صفحهٔ ۱۷۰

.۱ $y=A\cos x+B\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|+x$

.۳ $y=(c_1+c_2x+x\ln x-x)e^{2x}$.۵ $y=(c_1+c_2x-\cos x)e^{-x}$

.۷ $y=\left(c_1+c_2x+\frac{4}{35}x^{7/2}\right)e^{x}$

.۹ $y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x-0{,}5\cos 2x/\cos x)$

.۱۱ $y=c_1x^{-1}+c_2x-4$. دقت کنید که در (۸) داریم $r=4/x^2$ (نه ۴)، زیرا معادلهٔ دادهشده را باید بر x^2 تقسیم کنیم تا این که بهصورت (۱) از آنچه (۸) از روی آن بهدست آمد برسیم.

.۱۳ $y=C_1x+c_2x^2+x^4/6$.۱۵ $y=c_1x+c_2x^2+\frac{1}{12}x^{-2}$

.۱۷ $y=c_1x^2+c_2x^3+\frac{1}{42}x^{-4}$.۱۹ $y=c_1+c_2x^2+(2x-2)e^{x}$

بخش ۱۰۳، صفحهٔ ۱۷۹

۱. $x=c_۱e^t+c_۲e^{-t},\ y=c_۱e^t-c_۲e^{-t}$

۳. $x=\frac{۱}{۲}(\sin t-\cos t)+c_۱,\ y=\frac{۱}{۲}(\sin t+\cos t)+c_۲$

۵. $x=c_۱e^t+c_۲e^{-t}+c_۳\cos t+c_۴\sin t-t,$
$y=c_۱e^t+c_۲e^{-t}-c_۳\cos t-c_۴\sin t-۱$

۷. $x=۲e^{۵t}-e^{-۵t},\ y=e^{۵t}+۲e^{-۵t}$

۹. $x=e^{۵t}-\frac{۵}{۳}e^{۲t},\ y=e^{۵t}-\frac{۲}{۳}e^{۲t}$

۱۳. $I_۱=-\frac{۲۰۰}{۳}e^{-۲t}+\frac{۱۲۵}{۳}e^{-۰٫۸t}+۲۵,\ I_۲=-\frac{۱۰۰}{۳}e^{-۲t}+\frac{۱۰۰}{۳}e^{-۰٫۸t}$

۱۵. $I_۱=۲-۲e^{-۳۰۰t}$، $I_۲=۲+e^{-۳۰۰t}$، جریانهای حالت پایدار ۲ آمپر و ۲ آمپر هستند.

بخش ۲۰۳، صفحهٔ ۱۸۵

۱. $\sqrt{A^۲+B^۲}$

۳. $y=A\cos\frac{۱}{۲}t+B\sin\frac{۱}{۲}t$؛ بیضی‌های ثابت $=y^۲+۴v^۲$.

۵. $y=c_۱e^t+c_۲e^{-t}$، هذلولیهای ثابت $=y^۲-v^۲$

۷. خطوط مستقیم وموازی $v=y+c$

۹. هذلولیهای ثابت $=yv$

بخش ۳۰۳، صفحهٔ ۱۹۴

۳. $x=Ae^t$، $y=Be^{۲t}$، $y=(B/A^۲)x^۲$ هرگاه $A\neq ۰$، شاخه‌های هذلولی و محور yها. افقی، قائم.

۷. $x=Ae^{-t}$، $y=(At+B)e^{-t}$

۹. $\ddot{x}=-x$، ثابت $=x^۲+y^۲$، جهت عقربهٔ ساعت.

بخش ۲۰۴، صفحهٔ ۲۰۹

۱. ۳ ۳. ۱ ۵. ∞ ۷. ۱ ۹. ∞ ۱۱. ۳ ۱۳. ۱ ۱۵. ۳

۱۷. $c_0=0,\ c_1=2,\ c_m=c_{m-1}/(m-2),\ y=2x+c_2x^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$
$$=c_2x^2e^x+2x$$

۱۹. $y=c_1(x+x^2)$

۲۱. $y=c_0+c_1x+\left(\frac{3}{2}c_1-c_0\right)x^2+\left(\frac{7}{6}c_1-c_0\right)x^3+\cdots$. با قرار دادن $c_0=A+B$ و $c_1=A+2B$ به‌دست می‌آوریم $y=Ae^x+Be^{2x}$. این چنین می‌نماید که حتی اگر جواب یک معادله تابعی معلوم باشد روش سری توانی ممکن است به صورت معمولی به‌این نتیجه نرسد.

۲۳. $y=c_1x+c_0\left(1-x^2-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^6-\frac{1}{7}x^8-\cdots\right)$. (این حالت خاصی ازمعادلهٔ لژاندر ($n=1$) است که آن را درقسمت بعدی بررسی می‌کنیم.

۲۵. $y=c_0\left(1-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4-\frac{3}{6!}x^6-\frac{3\times5}{8!}x^8-\cdots\right)+c_1x$

۲۷. $(t+1)\dot{y}-y=t+1,\ y=c_0(1+t)+(1+t)\left(t-\frac{t^2}{2}+-\cdots\right)$
$$=c_0x+x\ln x$$

۲۹. $y=c_0\left(1+\frac{t^2}{2!}+\cdots\right)+c_1\left(t+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)=A\cosh x+B\sinh x$
(که درآن $A=c_0\cosh 1-c_1\sinh 1$ ، $B=c_1\cosh 1-c_0\sinh 1$)

بخش ۳.۴ ، صفحهٔ ۲۱۵

۱. $p_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$

بخش ۴.۴ ، صفحهٔ ۲۳۱

۱. $y_1=\frac{c_0}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\cdots\right)=c_0\frac{\cos x}{x^2},\ y_2=c_0{}^*\frac{\sin x}{x^2}$

۳. $y_1=\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{2\times5}+\frac{x^6}{2^2\times2!\times7}-\frac{x^8}{2^3\times3!\times9}+-\cdots,\ y_2=\frac{1}{x}$

۵. $y_1=x^{-2}\sin x^2,\ y_2=x^{-2}\cos x^2$

۹. $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\times4)^2} + \frac{x^6}{(2\times4\times6)^2} + \cdots,$

$y_2 = y_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{8\times16} - \cdots$

۱۱. $y_1 = x^2,\ y_2 = x^{-2}$

۱۳. $y_1 = x^{-3}\sinh 2x,\ y_2 = x^{-3}\cosh 2x$

۱۵. $y_1 = e^x,\ y_2 = e^x \ln x$

۲۳. $\frac{y_1}{y_2}$ یك ثابت نیست. این مطلب استقلال خطی را ایجاب می‌کند.

۳۱. $y = C_1\ F\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; x\right) + C_2 x^{3/2} F\left(\frac{5}{2},\ 2,\ \frac{5}{2}; x\right)$

۳۳. $y = C_1 F\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}; t-1\right) + C_2 (t-1)^{1/2}$

۳۵. $y = C_1 F\left(2,\ -2,\ -\frac{1}{2}; t-2\right) + C_2 (t-2)^{3/2} F\left(\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}; t-2\right)$

بخش ۵.۴ ، صفحهٔ ۲۳۸

۵. $J_0(1) = 1 - \frac{1}{2^2(1!)^2} + \frac{1}{2^4(2!)^2} - \frac{1}{2^6(3!)^2} + \cdots$ قدرمطلق هر باقیمانده R_n این سری حداکثر برابر است با قدرمطلق جملهٔ اول R_n؛ نتیجه‌ای از آزمون آشنای لیبنیتز (همچنین ر. ك بخش ۴.۱۵)، و به‌دلیل دقت موردنظر باید داشته باشیم $|R_n| < 10^{-5}$. حال $10^{-5} > \frac{1}{2^{2n}(n!)}$ ، $2^{2n}(n!)^2 > 10^5$ به‌ازای $n = 4$ صادق است. از این‌رو مجموع جملات صریح بالا به مقدار تقریبی مورد نظر منجرمی‌شود. $\ln 2 = \ln(1+1) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots - \frac{1}{100000}$ به تقریب مورد نظر منجرمی‌شود و ما به ۱۰۰۰۰۰ جمله نیاز داریم.

۹. حاصل‌ضرب مشتقهای (۲۰) و (۲۱) را به‌کار ببرید. معادلهٔ اول را در $x^{-\nu}$، معادله دوم‌را در x^{ν} ضرب کرده و به‌ترتیب برحسب $J_{\nu-1}$ و $J_{\nu+1}$ حل‌کنید وجمع نمایید.

۱۳. [با مراجعه به (۲۲) با $\nu = 1$] $J_2(x) = 2x^{-1}J_1(x) - J_0(x)$

۱۷. $-2J_2(x)-J_0(x)+c$

۱۹. $-x^{-3}J_3(x)+c$

۲۵. $y=(A\cos x+B\sin x)/\sqrt{x}$

بخش ۶.۴ ، صفحهٔ ۲۴۵

۱. ۱ و ۱

۳. $AJ_2(x)+BY_2(x)$

۵. $AJ_0(\sqrt{x})+BY_0(\sqrt{x})$

۷. $AJ_n(\lambda x)+BY_n(\lambda x)$

۹. $x(AJ_1(x)+BY_1(x))$

۱۱. $x^n(AJ_n(x^n)+BY_n(x^n))$

۱۳. $\sqrt{x}\left[AJ_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)+BY_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$

۱۷. از (۱۲) بخش ۵.۴ استفاده کنید.

بخش ۷.۴ ، صفحهٔ ۲۵۲

۱. $1/\sqrt{2\pi},\ (\cos x)/\sqrt{\pi},\ (\cos 2x)/\sqrt{\pi},\ \cdots$

۳. $\sin\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cdots$

۵. $1/\sqrt{T},\ \sqrt{2/T}\cos(2n\pi x/T)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

۷. $P_0/\sqrt{2},\ \sqrt{\frac{3}{2}}P_1(x),\ \sqrt{\frac{5}{2}}P_2(x),\sqrt{\frac{7}{2}}P_3(x)$

۹. قرار دهید $x=ct+k$

بخش ۸.۴ ، صفحهٔ ۲۵۷

۵. $\lambda=((2n+1)\pi/2l)^2,\ n=0,\ 1,\ \ldots;\ y_n(x)=\sin((2n+1)\pi x/2l)$

۷. $\lambda=(n\pi/l)^2,\ n=0,\ 1,\ \cdots;\ y_n(x)=\cos(n\pi x/l)$

۹. $\lambda=n^2\pi^2,\ n=1,\ 2,\ \cdots;\ y_n(x)=\sin(n\pi\ln|x|)$

۱۱. $\lambda=n^2,\ n=1,\ 2,\ \cdots;\ y_n(x)=e^{-x}\sin nx$

۱۳. تعداد لایتناهی

۱۵. $y''+\lambda y=0,\ y'(0)=0,\ y'(\pi)=0$

بخش ۹.۴، صفحهٔ ۲۶۱

۱. $x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x),\ x^3=\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x),$

$$x^4=\frac{1}{5}P_0(x)+\frac{4}{7}P_2(x)+\frac{8}{35}P_4(x)$$

۳. $2(-P_0(x)+P_1(x)-P_2(x)+P_3(x))$

۵. $P_0(x)/4+P_1(x)/2+5P_2(x)/16+\cdots$

۷. $P_0(x)/2+5P_2(x)/8+\cdots$

۱۱. از فرمولی که چند جمله‌ای هرمیت را تعریف می‌کند مشتق بگیرید.

۱۹. $$\int_0^\infty e^{-x}x^kL_n(x)\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^k\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})\,dx$$

$$=-\frac{k}{n!}\int_0^\infty x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^ne^{-x})\,dx$$

$$=\cdots=(-1)^k\frac{k!}{n!}\int_0^\infty\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^ne^{-x})\,dx$$

$= 0$ وقتی که $n>k$

۲۱. $v(\theta)=\cos n\theta$ در $d^2v/d\theta^2+n^2v=0$ صدق می‌کند. قرار دهید $x=\cos\theta$

۲۵. (۲۰) بخش ۴ــ۵ و به‌ازای $v=1$،

$$c_m=\frac{2}{R^2J_1^2(\alpha_{m0})}\int_0^R xJ_0\Big(\frac{\alpha_{m0}}{R}x\Big)dx=\frac{2}{\alpha_{m0}^2J_1^2(\alpha_{m0})}\int_0^{\alpha_{m0}}wJ_0(w)\,dw$$

$$=\frac{2}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})},\quad f=2\Big(\frac{J_0(\lambda_{10}x)}{\alpha_{10}J_1(\alpha_{10})}+\frac{J_0(\lambda_{20}x)}{\alpha_{20}J_1(\alpha_{20})}+\cdots\Big)$$

۲۷. $c_m=\dfrac{2akJ_1(\alpha_{m0}a/R)}{\alpha_{m0}RJ_1^2(\alpha_{m0})}$ ۲۹. $C_m=\dfrac{4J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}^2J_1^2(\alpha_{m0})}$

۳۱. $$c_m=\frac{2R^2}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}\Big[1-\frac{2J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}\Big]$$

۳۵. $$x^3=16\Big[\frac{J_3(\alpha_{13}x/2)}{\alpha_{13}J_4(\alpha_{13})}+\frac{J_3(\alpha_{23}x/2)}{\alpha_{23}J_4(\alpha_{23})}+\cdots\Big]$$

بخش ۱.۵ ، صفحهٔ ۲۷۴

۱. $k(1-e^{-cs})/s$

۳. $-e^{-s}/s+(1-e^{-s})/s^2$

۵. $1/s^2+2/s$

۷. $a/s+b/s^2+2c/s^3$

۹. $as/(s^2+4)$

۱۱. $(\omega\cos\theta+\sin\theta)/(s^2+\omega^2)$

۱۳. $\frac{1}{3}\sin 3t$

۱۵. $a_1+a_2t+a_3t^2/2$

۱۷. $4\cosh 4t+\sinh 4t$

۱۹. $\sin(2n\pi t/T)$

۲۱. $\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2},\ e^{-t}-e^{-2t}$

۲۳. $t^{3/2}/T\left(\frac{1}{2}\right)$ زیرا $T\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}T\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}T\left(\frac{1}{2}\right)$

بخش ۲.۵ ، صفحهٔ ۲۸۰

۱۳. $f'\equiv 0$ ، $\mathcal{L}(f')=0=s\mathcal{L}(f)-0-(1-0)e^{-s}-(0-1)e^{-2s}$ جواب: $(e^{-s}-e^{-2s})/s$

۱۵. $(1-e^{-s})/s^2-e^{-2s}/s$

۱۷. $\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}$

۱۹. $\cosh t-1$

۲۱. $2(1-e^{-t})-t$

۲۳. $2e^{3t}-9t^2-6t-2$

۲۵. $\frac{2}{3}\sin 3t$

۲۷. $y=-e^{-t}+2e^{3t}$

۲۹. $y=2e^{2t}-e^{-4t}$

بخش ۳.۵ ، صفحهٔ ۲۹۲

۱. $n\pi/[s+2)^2+n^2\pi^2]$

۳. $[A(s+\alpha)+B\beta]/[(s+\alpha)^2+\beta^2]$

۹. $e^{-t}(\cos t+2\sin t)$

۱۱. $e^{2t}\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4\right)$

۱۳. $y=e^{-t}(2\cos 2t-\sin 2t)$

۱۵. $y=e^{-t}\sin 3t$

۱۷. $k(e^{-as}-e^{-bs})/s$

۱۹. $1/s(1+e^{-s})$

۲۱. $1/s(1-e^{-s})$

۲۳. $(e^{-s}-e^{-2s})/s^2$

۲۵. $q(t)=CV_0e^{-t/RC}\ (t\geqslant 0)$

۲۷. $1<t<3$ هرگاه $f(t)=-10$

۲۹. $f(t)=t-۱,\ ۲t-۳,\ ۶-t$ به‌ازای $۱<t<۲,\ ۲<t<۳,\ ۳<t<۶$
ودرغیر این حالات صفر.

۳۱. $e^{-s}/s^{۲}$ ۳۳. $-se^{-\pi s}/(s^{۲}+۱)$

۳۵. $e^{a(k-s)}/(s-k)$ ۳۷. $K\omega(۱+e^{-\pi s/\omega})/(s^{۲}+\omega^{۲})$

۳۹. $s^{-۱}-(s+۱)^{-۱}-e^{-\pi s}(s^{-۱}-e^{-\pi}(s^{-۱})$

۴۱. $۲s^{-۳}-e^{-s}(۲s^{-۳}+۲s^{-۲}+s^{-۱})$ ۴۳. $u_{۲}(t)$

۴۵. $e^{۲(t-۲)}u_{۲}(t)$ ۴۷. $e^{۳(t-۱)}u_{۱}(t)$

۴۹. $-e^{\pi-t}\sin t$ هر گاه $t>\pi$ و درغیراین صورت صفر .

۵۱. $i'+\int_{۰}^{t} i(\tau)\,d\tau=t[۱-u_a(t)]=t-(t-a)\,u_a(t)-au_a(t)$

به‌ازای $۰<t<a$ $\quad i=۱-\cos t$

جواب

به ازای $t>a$ $\quad i=\cos(t-a)-a\sin(t-a)-\cos t$

۵۳. به‌ازای $۰<t<\pi$ $\quad i=\frac{۱}{۲}(e^{-t}-\cos t+\sin t)$

به ازای $t>\pi$ $\quad i=-\frac{۱}{۲}(۱+e^{-\pi})\cos t+\frac{۱}{۲}(۳-e^{-\pi})-\sin t$

۵۵. $\tilde{f}$ را به‌صورت $\tilde{f}(t)=f(t+a)$ تعریف کنید. دراین‌صورت $f(t)=\tilde{f}(t-a)$
و بنا به (۲)،

$$\mathcal{L}\{f(t)\,u_a(t)\}=\mathcal{L}\{\tilde{f}(t-a)\ u_a(t)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{\tilde{f}(t)\}e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

بخش ۴.۵ ، صفحهٔ ۲۹۸

۱. $\frac{۱}{(s-۱)^{۲}}$ ۳. $\frac{۶s}{(s^{۲}+۹)^{۲}}$ ۵. $\frac{۲s(s^{۲}-۳)}{(s^{۲}+۱)^{۳}}$

۷. $\frac{s^{۲}+۲s+۵}{(s^{۲}+۲s-۳)^{۲}}$ ۹. $\frac{۲(s+۲)}{(s^{۲}+۴s+۵)^{۲}}$ ۱۱. $t\sin t$

۱۳. $e^{-t}(\sin t)/t$ ۱۵. $(e^{t}-۱)/t$ ۱۷. $(e^{-bt}-e^{-at})/t$

بخش ۵.۵ ، صفحهٔ ۳۰۳

۱. t ۳. te^{t}

۵. $(e^{at}-۱)/a^{۲}-t/a$ ۷. $\frac{۲}{۳}\sin t-\frac{۱}{۳}\sin ۲t$

۹. $\frac{t}{2}\sin t$

۱۱. $e^{at}t^{2}/2$

۱۳. $(1-\cos \omega t)/\omega^{2}$

۱۵. $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$

۱۷. $\frac{1}{2}(\sin t+t\cos t)$

۱۹. $t-\tau=\sigma$ می‌دهد $\tau=t-\sigma$، $d\tau=-d\sigma$ و

$$\int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{t}^{0} g(\sigma)\, f(t-\sigma)\,(-d\sigma)$$

۲۳. $1/s=\mathcal{L}(1),\ (f*1)(t)=\int_{0}^{t} f(\tau)d\tau$

۲۵. $y=\frac{3}{8}\sin t-\frac{1}{8}\sin 3t$

۲۷. $y=\frac{1}{2}(1-\cos\sqrt{2}t)$ هرگاه $0<t<1$، $\frac{1}{2}(\cos\sqrt{2}(t-1)-\cos\sqrt{2}t$ اگر $t>1$

۲۹. $y=\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$

بخش ۶.۵، صفحهٔ ۳۱۶

۳. $(e^{at}-e^{bt})/(a-b)$

۵. $4\cos 4t+\sin 4t$

۷. $(1-t)e^{-t}$

۹. $2e^{2t}+te^{t}$

۱۱. $te^{2t}(\cos t-\sin t)$

۱۳. $e^{t}(\cos t+t\sin t)$

۱۹. $y=2e^{2t}+e^{-t}$

۲۱. $y=5e^{2t}-2t^{2}$

۲۳. $y=(2t+3)e^{-t}+\sin t$

۲۵. $y_1=\cos t,\ y_2=\sin t$

۲۷. $y_1=e^{t}+e^{2t},\ y_2=e^{2t}$

۲۹. $y_1=e^{t},\ y_2=e^{-t},\ y_3=e^{t}-e^{-t}$

بخش ۷.۵، صفحهٔ ۳۲۵

۳. $\frac{\omega}{(s^{2}+\omega^{2})\,(e^{\pi s/\omega}-1)}$

۵. $\frac{\omega}{s^{2}+\omega^{2}}\coth\frac{\pi s}{2\omega}$

۷. $\frac{1}{s^2+\omega^2}\left(s+\frac{\omega}{\sinh \pi s/2\omega}\right)$ ۹. $\frac{e^2(1-s)^{\pi}-1}{(1-s)(1-e^{-2\pi s})}$

۱۱. در مسئلهٔ ۵ بگذارید $\omega=\frac{1}{2}$ و در K ضرب کنید

۱۳. $\left[\frac{\pi}{s}e^{-\pi s}(e^{-\pi s}-1)+\frac{1}{s^2}(e^{-\pi s}-1)^2\right]/(1-e^{-2\pi s})$

۱۵. $\left[\frac{1}{s^2}(1-e^{-\pi s})-\frac{\pi}{s}e^{-\pi s}\right]/(1-e^{-2\pi s})$

۱۷. $Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=v(t),\ RI+\frac{I}{Cs}=\frac{1-e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}$

به‌ازای $0<t<1$ $\quad i=C(1-e^{-t/RC})$

به‌ازای $t>1$ $\quad i=((C-R^{-1})e^{1/RC}-C)e^{-t/RC}$

۱۹.
$$i(t)=\begin{cases} a\cos\omega t+b\sin\omega t-ae^{-t/RC} & \text{به‌ازای } 0<t<\pi/\omega \\ -a(1+e^{\pi/\omega RC})e^{-t/RC} & \text{به‌ازای } t>\pi/\omega \end{cases}$$

که در آن $a=\omega CK$ ، $b=\omega^2RC^2K$ ، $K=1/[1+(\omega RC)^2]$

۲۳.
$$i(t)=\begin{cases} \frac{V_0}{\omega^* L}e^{-\alpha t}\sin\omega^* t & \text{به‌ازای } 0<t<a \\ \frac{V_0}{\omega^* L}[e^{-\alpha t}\sin\omega^* t-e^{\alpha(t-\alpha)}\sin\{\omega^*(t-a)\}] & \text{به‌ازای } t>a \end{cases}$$

که در آن $\alpha=\frac{R}{2L}$ ، $\omega^{*2}=\frac{1}{LC}-\alpha^2$

۲۵. جریان اولیه ۲ آمپر، بار اولیه صفر، $i=e^{-t/5}\left(2\cos\frac{2}{5}t+\sin\frac{2}{5}t\right)$

۳۳. $y=\frac{P}{K}[1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}]$

۳۵. به‌جای عبارت P — درمسئلهٔ ۳۴ حالا داریم $P[1-u_1(t)]$ —. به ازای $0<t<1$ جواب همانند مسئلهٔ ۳۴ است. اگر این جواب را v_1 بنماییم جواب v به‌ازای $t>1$ عبارت است از

$$v=v_1+\frac{P(t-1)}{M_1+M_2}-\frac{P}{k(M_1+M_2)}\sin[k(t-1)]$$

$$=\omega-\frac{P}{M_1+M_2}+\frac{P}{k(M_1+M_2)}[\sin kt-\sin(k(t-1))].$$

بخش ۲.۶، صفحهٔ ۳۴۱

۱. $۲, ۰, ۱, |\mathbf{v}|=\sqrt{۵}$ ۳. $۱, ۱, ۱, |\mathbf{v}|=\sqrt{۳}$ ۵. $۲, ۳, ۱, |\mathbf{v}|=\sqrt{۱۴}$

۷. $۰, -۱, ۰, |\mathbf{v}|=۱$ ۹. $۰, ۰, ۰, |\mathbf{v}|=۰$ ۱۱. $Q::(۷, ۴, ۵)$

۱۳. $Q:\left(-\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}-۱\right)$ ۱۵. $Q:(۰, ۰, ۰)$ ۱۷. $Q:(۳, ۸, -۹)$

۱۹. $Q:(-۳, -۲, -۲)$

بخش ۳.۶، صفحهٔ ۳۴۶

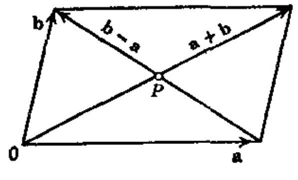
۱. $۳\mathbf{i}+۶\mathbf{j}-۹\mathbf{k}, \frac{۱}{۲}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\frac{۳}{۲}\mathbf{k}, -۲\mathbf{i}-۴\mathbf{j}+۶\mathbf{k}$

۳. $۲\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۴\mathbf{k}, \mathbf{i}-\mathbf{j}+۷\mathbf{k}, -\mathbf{i}+\mathbf{j}-۷\mathbf{k}$

۵. $\sqrt{۵۹}, \sqrt{۱۴}-۵$ ۷. $-۳\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-۲۱\mathbf{k}$ ۹. $۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۱۱. $۶\mathbf{i}+۲\mathbf{j}$ ۱۳. $\mathbf{p}=-۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$

۱۵. بردار $\mathbf{r}$ از ۰ تا P به‌صورت $\mathbf{r}=k(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ است. همچنین $\mathbf{r}=\mathbf{a}+l(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. از این‌رو $k\mathbf{a}+k\mathbf{b}=(۱-l)\mathbf{a}+l\mathbf{b}$. از این‌جا $k=۱-l$، $k=l$؛ از این‌رو $k=\frac{۱}{۲}$، $l=\frac{۱}{۲}$ واثبات کامل است.



مسئلهٔ ۱۵

بخش ۴.۶، صفحهٔ ۳۵۱

۱. $۲; \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ۳. $۲; \mathbf{i}, \mathbf{j}+\mathbf{k}$

۵. $n; (۱, ۰, \ldots, ۰), (۰, ۱, ۰, \ldots, ۰), \ldots, (۰, \ldots, ۰, ۱)$

۷. $۲; \cos x, \sin x$ ۹. صفحهٔ xy

۱۱. بافرض $\mathbf{a}=c_۱\mathbf{e}_{(۱)}+\cdots+c_n\mathbf{e}_{(n)}=q_۱\mathbf{e}_{(۱)}+\cdots+q_n\mathbf{e}_{(n)}$ به‌دست می‌آوریم $(c_۱-q)\mathbf{e}_{(۱)}+\cdots+(c_n-q_n)\mathbf{e}_{(n)}=۰$، $c_j-q_j=۰$ به‌ازای هر j زیرا $\mathbf{e}_{(j)}$ به‌طور خطی مستقل است.

بخش ۵.۶، صفحهٔ ۳۵۸

۱. $۵, ۵$

۳. $-۱۱, -۱۱$

۵. $\sqrt{۴۱}, \sqrt{۴۳}$

۷. $\sqrt{۱۸}, \sqrt{۱۴}+\sqrt{۲۶}$

۹. ۲۷

۱۱. $۲, ۰, -۲$

۱۳. ۳

۱۵. ۲

۱۷. ۰

۱۹. $a_۱ = -۸/۳$

۲۱. $\mathbf{p}_{(۱)}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{p}_{(۲)}\cdot\mathbf{d} = (\mathbf{p}_{(۱)}+\mathbf{p}_{(۲)})\cdot\mathbf{d}$

۲۳. اگر و تنها اگر هر چهار گوشه برابر باشند.

۲۷. زاویهٔ β مثلث در B زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{c} = -۲\mathbf{i}$ از B تا A و $\mathbf{a} = -۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}$ از B تا C است، بنابراین $\cos\beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}/|\mathbf{a}||\mathbf{c}| = ۱/\sqrt{۲}$، $\beta = \pi/۴$ وغیره.

۲۹. $-۲۳/۲۶$

۳۱. $\sqrt{۳}/۲$

۳۳. -۵

۳۵. ۲

۳۷. $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^۲ = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^۲+|\mathbf{b}|^۲-۲|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma,$ و غیره

۳۹. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^۲ = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \leqslant |\mathbf{a}|^۲+۲|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|+|\mathbf{b}|^۲ = (|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)^۲$

بخش ۸.۶، صفحهٔ ۳۶۹

۱. $۶\mathbf{i}-۳\mathbf{j}, -۶\mathbf{i}+۳\mathbf{j}$

۳. $۳\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۳\mathbf{k}, \sqrt{۲۷}, ۱$

۵. $-۱۲\mathbf{i}+۶\mathbf{j}-۶\mathbf{k}, ۱۲\mathbf{i}-۶\mathbf{j}+۶\mathbf{k}$

۷. $۲۱\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۹\mathbf{k}$

۹. $۳\mathbf{i}-۶\mathbf{j}-۳\mathbf{k}, -۳\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$

۱۱. $۶\mathbf{i}-۳\mathbf{j}$

۱۵. ۲

۱۷. $\sqrt{۸۶}$

۱۹. ۴

۲۱. ۱۱

۲۳. $۱/۲$

۲۵. $\sqrt{۲۶۶}/۲$

۲۷. $\sqrt{۱۸}$

۲۹. $\sqrt{۲۶}$

۳۱. متعامد

۳۳. متعامد

۳۵. موازی

۳۷. $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$

۳۹. $\pm(۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k})/\sqrt{۱۳}$

۴۱. $\pm\mathbf{i}$

۴۳. $\pm(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})/\sqrt{۶}$

۴۵. $\mathbf{n} = ۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$ و $\mathbf{p} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ بردارهای نرمال بر صفحه هستند و $\mathbf{v} = \mathbf{n}\times\mathbf{p} = ۷\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۵\mathbf{k}$

۴۷. $\mathbf{k}$

۴۹. ۰

بخش ۶.۹، صفحهٔ ۳۷۵

۱. ۱ ۳. -۱ ۵. ۳ ۷. -۱۲ ۹. -۳

۱۱. مستقل ۱۳. مستقل ۱۵. وابسته ۱۷. مستقل ۱۹. $\lambda=۵/۳$

۲۱. $\lambda=۵,\ \mu=۱۰$ ۲۳. ۳ ۲۵. ۲ ۲۷. ۲۰

۲۹. $۷/۳$ ۳۱. $۱/۶$ ۳۳. $۶\mathbf{i}+۶\mathbf{j}-۷\mathbf{k},\ ۹$

۳۵. $۶\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۲\mathbf{k},\ ۵\mathbf{i}+۵\mathbf{j}$ ۳۷. $۱۷\mathbf{i}-۲۶\mathbf{j}-۲۷\mathbf{k}$

۳۹. $\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]$ برابراست با $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ و نیز $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}[\mathbf{c}\times\mathbf{d}])=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$

بخش ۱.۷، صفحهٔ ۳۸۷

۱. $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & ۷ \end{pmatrix}$ ۳. $\begin{pmatrix} ۱۲ & ۴ \\ -۲ & ۴ \end{pmatrix}$ ۵. $\begin{pmatrix} ۰ & ۴ \\ ۱ & ۷ \end{pmatrix}$

۷. خیر ۹. A بلی، B خیر

۱۱. $\begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۴ \\ ۷ & ۱ & ۰ \\ ۶ & -۵ & ۱ \end{pmatrix}$ ۱۳. $\begin{pmatrix} ۱۰ & ۲ & ۸ \\ ۱۳ & ۳ & ۰ \\ ۱۵ & -۱۴ & ۲ \end{pmatrix}$

۱۵. $\begin{pmatrix} ۰ & -۹ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۳ \\ -۴ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ ۱۷. خیر، خیر، بلی ،بلی؛

۲۳. ر. ك. قضیهٔ ۱ بخش ۲.۷ برای ماتریسهای متقارن

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۲۵. $n(n+۱)/۲$، n ماتریس باقطر اصلی ۱ و تمام عناصر دیگرصفر، وماتریسهای‌متقارن با . . . وبقیهٔ عناصرصفر

۲۷. $\begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$

.۲۹
$$\begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

بخش ۴.۷ ، صفحهٔ ۴۰۱

.۱ $\mathbf{A}^{\top}\mathbf{B}=(۴\ -۲),\ \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۴ \\ -۲ \end{pmatrix}$

.۳ $C^{۲}=\begin{pmatrix} ۱ & -۳ & -۳ \\ ۱۲ & ۴ & ۳ \\ ۰ & -۴ & ۱ \end{pmatrix}$

.۵ $\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۵ & -۱ \\ -۱ & ۱۰ \end{pmatrix},\ \mathbf{B}\mathbf{B}^{\top}=\begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۹ & -۳ \\ ۲ & -۳ & ۲ \end{pmatrix}$

.۷ $\mathbf{C}^{۲}=\begin{pmatrix} ۱ & -۳ & -۳ \\ ۱۲ & ۴ & ۳ \\ ۰ & -۴ & ۱ \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{۴}=\begin{pmatrix} -۳۵ & -۳ & -۱۵ \\ ۶۰ & -۳۲ & -۲۱ \\ -۴۸ & -۲۰ & -۱۱ \end{pmatrix}$

$$\mathbf{C}^{۴}-۳\mathbf{C}^{۲}+۲\mathbf{I}=\begin{pmatrix} -۳۶ & ۶ & -۶ \\ ۲۴ & -۴۲ & -۳۰ \\ -۴۸ & -۸ & -۱۲ \end{pmatrix}$$

.۹ $\mathbf{A}^{\top}\mathbf{C}\mathbf{A}=(۵)$

.۱۱ $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ ، وغیره.

.۱۵ ازقیاس وفرمولهای جمع توابع سینوس وکسینوس استفاده کنید

.۱۷ $\begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & -۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_۱ \\ w_۲ \end{pmatrix}$

بخش ۵.۷، صفحهٔ ۴۱۱

.۱ $x=۱,\ y=۲$

.۳ $x=۱/۷,\ y=-۱/۷$

.۵ $x=z,\ y=-z$

.۷ $x=۲,\ y=-۱,\ z=۰$

۹. $x=-۱,\ y=۲z$

۱۱. $x=-۲,\ y=۰,\ z=۴$

۱۳. $x=y+۱,\ z=۱$

۱۵. $x=۳y+۲,\ z=۰$

۱۷. $y=w-۵x+۹,\ z=۰$

۱۹. $w=۲x+۱,\ y=۱,\ z=۲$

۲۱. $w=۰,\ x=۳z,\ y=۲z+۱$

۲۳. $I_۱=۱,\ I_۲=۳,\ I_۳=۴$ آمپر

۲۵. $I_۱=\dfrac{R_۴E_۱+R_۵(E_۱+E_۲)}{(R_۱+R_۲+R_۳)(R_۴+R_۵)+R_۴R_۵}$، و غیره.

۲۹. $P=۴,\ D=S=۵$

بخش ۷.۶، صفحهٔ ۴۱۸

۱. ۱ **۳.** ۱ **۵.** ۲ **۷.** ۲

۹. ۳

۱۳. بردارهای سطری بریك خط قرار دارند. بردارهای سطری هم‌صفحه‌اند.

۱۵. مستقل خطی

۱۷. وابسته خطی

۱۹. وابسته خطی

۲۱. وابسته خطی

۲۳. $k=۶$

۲۵. k دلخواه

بخش ۷.۸، صفحهٔ ۴۲۹

۳. از (۱) استفاده کنید ودر آن به‌جای $\mathbf{A}$ بگذارید $\mathbf{C}$ و قراردهید $\mathbf{C}=\mathbf{A}^{-۱}$

۵. $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{pmatrix}$

۷. $\begin{pmatrix} ۰٫۲ & -۰٫۱ & ۰ \\ ۰ & -۰٫۲ & ۰٫۱ \\ -۰٫۱ & ۰ & ۰٫۱ \end{pmatrix}$

۹. $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$

۱۱. $\begin{pmatrix} ۰٫۳ & ۰ & ۰٫۱ \\ ۰ & ۰٫۵ & ۰ \\ -۰٫۱ & ۰٫۱ & -۰٫۱ \end{pmatrix}$

۱۳.
$$\begin{aligned} x &= x^*+۲y^*+۵z^* \\ y &= -y^*+۲z^* \\ z &= ۲x^*+۴y^*+۱۱z^* \end{aligned}$$

۱۵.
$$\begin{aligned} x &= ۱۹x^*+۲y^*-۹z^* \\ y &= -۴x^*-y^*+۲z^* \\ z &= -۲x^*+z^* \end{aligned}$$

۱۷. از (۷) استفاده کنید.

۱۹. $\mathbf{I}=\mathbf{I}^{\top}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{\top}=\mathbf{A}^{\top}(\mathbf{A}^{-1})^{\top}$

بخش ۹.۷، صفحهٔ ۴۳۷

۱. ۱۴ **۳.** ۱ **۵.** ۲۴

۷. $1+a^2+b^2+c^2$ **۹.** ۰

بخش ۱۰.۷، صفحهٔ ۴۵۰

۱. ۹۰ **۳.** $4a^2b^2c^2$

بخش ۱۱.۷، صفحهٔ ۴۵۷

۱. ۲ **۳.** ۱ **۵.** ۲ **۷.** $x=1,\ y=2$

۹. $x=2,\ y=4$ **۱۱.** $x=2,\ y=1,\ z=-3$

۱۵. $\begin{pmatrix} -3/13 & 5/13 \\ 2/13 & 1/13 \end{pmatrix}$ **۱۷.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

۱۹. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 1/b & 0 \\ 1/c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

۲۵. ثابت کنید $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\mathbf{A}_{jk}=\det \mathbf{A}$، $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\mathbf{A}_{ik}=0\,(i\neq j)$ و آنها را به‌کار برید.

بخش ۱۲.۷، صفحهٔ ۴۶۵

۱. $\mathbf{A}=\mathbf{H}+\mathbf{S}$ که درآن $\mathbf{H}=(\mathbf{A}+\bar{\mathbf{A}}^{\top})/2$ هرمیتی‌است و $\mathbf{S}=(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\top})/2$ ضد هرمیتی است.

۳. $\mathbf{C}^{\top}$ باید با $-\mathbf{C}$ برابر باشد و این بدان معنی است که a و b حقیقی‌اند.

۵. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **۷.** $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

۹. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **۱۵.** ۴

۱۷. $-|x_1|^2+10\,\mathrm{Re}\,\overline{x_1}x_2-2\,\mathrm{Im}\,\bar{x}_1x_2+2|x_2|^2$

۱۹. 2 **۲۱.** 0 **۲۳.** $2i|x_1|^2+8i\,\mathrm{Im}\,\bar{x}_1x_2$

۲۵. $S=\alpha+i\beta=\bar{\mathbf{x}}^\top\mathbf{A}\mathbf{x},\ \bar{S}=\alpha-i\beta=\mathbf{x}^\top\overline{\mathbf{A}\mathbf{x}}=-\mathbf{x}^\top\mathbf{A}^\top\bar{\mathbf{x}}$

$$=-(\bar{\mathbf{x}}^\top\mathbf{A}\mathbf{x})^\top=-S=-\alpha-i\beta.$$

بخش ۱۳.۷، صفحهٔ ۴۷۳

۱. خیر   **۳.** $6,\ 4,\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **۵.** 0، هر بردار غیر صفر

۷. $10,-10,\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ **۹.** $2/5,\ -2/5,\ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

۱۱. $a,\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ b,\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ c,\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **۱۳.** $1,\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},-1,\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

۱۵. $20,\ 25,\ 30$

۱۹. از این واقعیت نتیجه می‌شود که صفرهای یك چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی، حقیقی یا جفت مزدوجهای مختلط، هستند.

۲۵. از $\mathbf{A}\mathbf{x}_j=\lambda_j\mathbf{x}_j(\mathbf{x}_j\neq 0)$ ومسائل ۲۳ و ۲۴، $k_n\mathbf{A}^n\mathbf{x}_j=k_n\lambda_j^n\mathbf{x}_j$ و (عدد صحیح $k_p\mathbf{A}^p\mathbf{x}_j=k_p\lambda_j^p\mathbf{x}_j\ (n\geqslant 0,\ p\geqslant 0$. با جمع کردن طرفین می‌بینیم که $k_n\mathbf{A}^n+k_p\mathbf{A}^p$ دارای مقادیر ویژهٔ $k_n\lambda_j^n+k_p\lambda_j^p$ است. از روی این حکم ثابت می‌شود.

بخش ۱۴.۷، صفحهٔ ۴۷۸

۵. دوران حول محور x_3 درفضا

۷. $\lambda=\pm 1,\ \begin{pmatrix}1\\i-i\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\i+i\sqrt{2}\end{pmatrix}$

۹. فرض کنید $\mathbf{A}$ یکانی است. قراردهید $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. دراین صورت
$\mathbf{B}^\top=(\mathbf{A}^{-1})^\top=(\mathbf{A}^\top)^{-1}=(\overline{\mathbf{A}}^{-1})^{-1}=\overline{\mathbf{B}}^{-1}$

۱۱. فرض کنید $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}\ (\mathbf{x}\neq 0)$ ، $\mathbf{Ay}=\mu\mathbf{y}\ (\mathbf{y}\neq 0)$.
پس $\lambda\mathbf{x}^T=\mathbf{x}^T\mathbf{A}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T=(\mathbf{Ax})^T$. از این رو $\lambda\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{x}^T\mathbf{Ay}=\mathbf{x}^T\mu\mathbf{y}=\mu\mathbf{x}^T\mathbf{y}$
بنابراین، اگر $\mu\neq\lambda$ ، $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=0$ که خود اثبات متعامد لورن است.

۱۷. $\mathrm{tr}\mathbf{A}=\mathrm{tr}(\mathbf{ATT}^{-1})=\mathrm{tr}[(\mathbf{AT})\mathbf{T}^{-1}]=\mathrm{tr}[\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{AT})]=\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{A}}$ ، زیرا $\mathrm{tr}\mathbf{AB}=\mathrm{tr}\mathbf{BA}$

۱۹. $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x}\neq 0)$. بنابراین (الف) $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$. حال داریم $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATy}=\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}$ و (الف) می‌شود $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}=\lambda\mathbf{y}$.

۲۳. $|a|=|b|=|c|$

۲۵. $(۱۰۵۷۹۰ \quad ۹۴۲۱۰), (۱۰۳۰۰۰ \quad ۹۷۰۰۰)$

بخش ۱۵.۷، صفحهٔ ۴۸۹

۱. مقادیر ویژهٔ ۳ و ۲ بردارهای ویژه $\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}۲\\۱\end{pmatrix}$ ، $\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}$. جواب:

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}_1e^{3t}+\mathbf{x}_2e^{2t}$$

۳. $y_1=e^{3t},\ y_2=e^{3t}$

۵. $y_1=2e^{3t},\ y_2=-10e^{3t};\ y_3=-27e^{3t}$

۹. $y_1=-2\cos\sqrt{18}\,t,\ y_2=\cos\sqrt{18}\,t$

۱۳. $\lambda_1=-k,\ \lambda_2=-3k,\ \mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\mathbf{y}=x_1\cos\sqrt{k}\,t+x_2\sin\sqrt{3k}\,t$$

بخش ۱.۸، صفحهٔ ۴۹۶

۱۱. $y<-\sqrt{3}|x|$ و $0<y<\sqrt{3}|x|$

۱۳. $T=3y-4y^3$ ۱۵. صفحه‌های موازی   ۱۷. کره‌های متحدالمرکز

۱۹. سهمی‌گون دوران   ۲۱. بیضی‌گون دوران

۲۳. بیضی‌های ثابت $=3x^2+y^2$ ۳۱. ثابت $=x/y$، ثابت $=x^2+2y^2$

۳۳. $y=cx^2$، ثابت $=y^2+x^4$ ۳۵. بیضی‌گونها

بخش ۲.۸، صفحهٔ ۵۰۱

۱. $\mathbf{u}'=\mathbf{b},\ \mathbf{u}''=0$

۳. $\mathbf{u}' = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j},\ \mathbf{u}'' = -\mathbf{u},\ |\mathbf{u}'| = ۱$

۵. $\mathbf{u}' = \mathbf{i} + ۲t\mathbf{j} + ۳t^{۲}\mathbf{k},\ \mathbf{u}'' = ۲\mathbf{j} + ۶t\mathbf{k}$

۷. $e^{t}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j},\ \sqrt{e^{۲t} + e^{-۲t}},\ e^{t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j},\ \sqrt{e^{۲t} + e^{-۲t}}$

۹. $۳\cos ۳t\,(\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ ۳\sqrt{۲}|\cos ۳t|,\ -۹\sin ۳t\,(\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ ۹\sqrt{۲}\,|\sin ۳t|$

۱۱. $-۱۰t^{۴}\mathbf{i} - ۲t\mathbf{j} + ۴t^{۳}\mathbf{k}$

۱۳. $-(۴t^{۳} + ۵t^{۴})\mathbf{i} + (۴t^{۳} + ۱۴t^{۶})\mathbf{j} - (۱۲t^{۵} - ۲t)\mathbf{k}$

۱۵. $۱ + ۳t^{۲} + ۱۲t^{۳}$

۱۷. $۲x\mathbf{i} + ۲y\mathbf{j},\ + ۲x\mathbf{j}$

۱۹. $z\mathbf{j} + y\mathbf{k},\ z\mathbf{i} + x\mathbf{k},\ y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

۲۱. $۲xy\mathbf{i} + z^{۲}\mathbf{k},\ x^{۲}\mathbf{i} + ۲yz\mathbf{j},\ y^{۲}\mathbf{j} + ۲zx\mathbf{k}$

۲۵. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})'' = \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v} + ۲\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}''$
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})'' = \mathbf{u}'' \times \mathbf{v} + ۲\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' + \mathbf{u} \times \mathbf{v}''$

بخش ۳.۸ ، صفحهٔ ۵۰۵

۱. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{r}(t) = ۲\mathbf{i} + (۱ + ۲t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

۵. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

۷. $\mathbf{r}(t) = (۱ - t)\mathbf{i} + (۵ - ۳t)\mathbf{j} + (۳ - ۴t)\mathbf{k}$

۹. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$

۱۱. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

۱۳. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$

۱۵. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^{۲}\mathbf{j} + t^{۲}\mathbf{k}$

۱۷. $\mathbf{r}(t) = (-۱ + \cos t)\mathbf{i} + ۲\sin t\,\mathbf{j}$

۱۹. دایرهٔ واقع در صفحهٔ xy، منحنی سینوسی درصفحهٔ yz، منحنی کسینوسی درصفحهٔ xz

بخش ۴.۸ ، صفحهٔ ۵۰۸

۱. $\sinh ۱$

۳. $۸(\sqrt{۱۰۰۰} - ۱)/۲۷$

۵. $\pi^{۲}/۲$

۷. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$

۱۱. $\sqrt{۲}(e^{\pi} - ۱)$

۱۳. $۸a$

بخش ۵.۸ ، صفحهٔ ۵۱۳

۱. $\mathbf{q}(w)=(-1/\sqrt{2}+w)\mathbf{i}+(1/\sqrt{2}+w)\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{q}(w)=\mathbf{i}+w\mathbf{j}+(4\pi+2w)\mathbf{k}$

۵. $\cos\alpha=\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}=c/\sqrt{a^2+c^2}=$ ثابت

۱۵. $\mathbf{r}'=\dot{\mathbf{r}}/\dot{s},\ \mathbf{r}''=\ddot{\mathbf{r}}/\dot{s}^2+\cdots,\ \mathbf{r}'''=\dddot{\mathbf{r}}/\dot{s}^3+\cdots,$

$$\tau=(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')/\kappa^2=\frac{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})^3}{\dot{s}^6}\,\frac{(\dot{\mathbf{r}}\quad\ddot{\mathbf{r}}\quad\dddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})-(\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})^2}$$

که درآنها نقاط معرف جملاتی هستند که بعداً با اعمال‌قواعدآشنایی که درمورد ساده کردن دترمینان داریم حذف می‌شوند.

بخش ۶.۸ ، صفحهٔ ۵۱۹

۱. $\mathbf{v}=\mathbf{i},\ |\mathbf{v}|=1,\ \mathbf{a}=0$

۳. $\mathbf{v}=(2-2t)\mathbf{i},\ |\mathbf{v}|=|2-2t|,\ \mathbf{a}=-2\mathbf{i}$

۵. جزء $-1\leqslant y\leqslant 1$ بر روی محور y، $\cos t\,\mathbf{j}$، $|\cos t|$، $-\sin t\,\mathbf{j}$

۷. دایره، $2t$ ، $-2\sin t^2\mathbf{i}+2t\cos t^2\mathbf{j}$ ، $(-2\sin t^2-4t^2\cos t^2)\mathbf{i}+(2\cos t^2-4t^2\sin t^2)\mathbf{j}$

۹. مارپیچ مستدیر، $\mathbf{v}=-\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$، $|\mathbf{v}|=\sqrt{2}$، $\mathbf{a}=-\cos t\,\mathbf{i}-\sin t\,\mathbf{j}$

۱۱. $|a|=\omega^2R=(2\pi/2{,}36\times10^6)^2\times3{,}85\times10^8=0{,}0027\mathrm{m/s^2}$، که فقط $2{,}8\times10^{-4}$ برابر شتاب جاذبه، g، است.

۱۳. $\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}_0t^2/2+\mathbf{v}_0t+\mathbf{v}_0$ ($\mathbf{a}_0$، $\mathbf{v}_0$، $\mathbf{r}_0$ بردارهای ثابتند)

۱۵. مسیر تغییری نمی‌کند اما راه حرکت بر روی مسیر تغییر می‌کند.

بخش ۷.۸، صفحهٔ ۵۲۴

۱. $2t+1/t$ ۳. $(g'h-gh')/h^2$ ۷. $-t(1+t^2)^{-3/2}$

۹. $2,\ 0$ ۱۱. $e^{2u}\sin 2v,\ e^{2u}\cos 2v$

۱۵. $r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan(y/x),r_x=x/r,\theta_x=-y/r^2,r_{xx}=y^2/r^3$ وغیره

$w_{xx}=x^2r^{-2}w_{rr}-2xyr^{-3}w_{r\theta}+y^2r^{-4}w_{\theta\theta}+y^2r^{-3}w_r+2xyr^{-4}w_\theta$ و غیره

بخش ۸.۸، صفحهٔ ۵۳۲

۱. $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ۳. $\cos x\cosh y\,\mathbf{i}+\sin x\sinh y\,\mathbf{j}$

۵. $۲(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})/(x^۲+y^۲)$

۷. $yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

۹. $۲x\mathbf{i}+۲y\mathbf{j}+۲z\mathbf{k}$

۱۱. $(yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k})e^{xyz}$

۱۳. $۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}$

۱۵. $y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

۱۷. $۱۸x\mathbf{i}+۲y\mathbf{j}$

۱۹. $\mathbf{i}-\mathbf{j}$

۲۱. $۳\mathbf{i}-\mathbf{j}$

۲۳. $۲۸\mathbf{i}+۱۶\mathbf{j}$

۲۵. $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۲۷. $۴\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۲۹. $۴\mathbf{i}+۴\mathbf{k}$

۳۱. $x-y+z$

۳۳. $\frac{۱}{۲}x^۲+y^۲+\frac{۱}{۲}z^۲$

۳۵. $\frac{۱}{۲}\ln(x^۲+y^۲)$

۳۷. $۴,\ ۴\sqrt{۲},\ ۴,\ ۰,\ -۴,\ -۴\sqrt{۲},\ -۴,\ ۰$

۳۹. ۳

۴۱. ۰

۴۳. $۸/\sqrt{۵}$

بخش ۹.۸، صفحهٔ ۵۳۸

۳. $c_{۱۱}=c_{۲۲}=c_{۳۳}=۱$، $b_۱=-۱$، $b_۲=۵$، $b_۳=۲$، بقیه تماماً صفر

۵. $c_{۱۲}=c_{۲۱}=c_{۳۳}=۱$، بقیه تماماً صفر

۷. $c_{۱۲}=c_{۲۳}=c_{۳۱}=۱$، بقیه تماماً صفر

بخش ۱۰.۸، صفحهٔ ۵۴۴

۱. ۲

۳. $۲x$

۵. $yz+zx+xy$

۷. $-x^۲$

۹. خیر، زیرا (۱) شامل مختصات می‌شود

۱۵. ۰

۱۹. ۲۷۲

بخش ۱۱.۸، صفحهٔ ۵۴۷

۱. $-۲\mathbf{k}$

۳. $۲y\mathbf{i}+۲z\mathbf{j}+۲x\mathbf{k}$

۵. $y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

۷. $\operatorname{curl}\mathbf{v}=۰$، $\operatorname{div}\mathbf{v}=۲$، تراکم‌پذیر، $\mathbf{r}=c_۱e^t\mathbf{i}+c_۲e^t\mathbf{j}+c_۳\mathbf{k}$

۹. $\operatorname{curl}\mathbf{v}=-۳y^۲\mathbf{k}$، $\operatorname{div}\mathbf{v}=۰$، تراکم‌ناپذیر، $\mathbf{r}=(c_۲^۳t+c_۱)\mathbf{i}+c_۲\mathbf{j}+c_۳\mathbf{k}$

۱۷. $\circ,\ z(x-y)\mathbf{i}+x(y-z)\mathbf{j}+y(z-x)\mathbf{k}$

۱۹. a_1, a_2, a_3 و a_1^*, a_2^*, a_3^* را به‌ترتیب مؤلفه‌های $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ نسبت به‌مختصات دکارتی راستگرد x_1, x_2, x_3 و x_1^*, x_2^*, x_3^* بگیرید. با استفاده از $(5')$ بخش ۹.۸، قاعدهٔ زنجیری توابع چند متغیره، و (۹) بخش ۹.۸ درمی‌یابیم.

$$a_1=\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}=\sum_{m=1}^{3}\left(c_{m3}\frac{\partial v_m^*}{\partial x_2}-c_{m2}\frac{\partial v_m^*}{\partial x_3}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(c_{m3}\frac{\partial v_m^*}{\partial x_l^*}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_2}-c_{m2}\frac{\partial v_m^*}{\partial x_l^*}\frac{\partial x_l^*}{\partial x_3}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}(c_{m3}c_{l2}-c_{m2}c_{l3})\frac{\partial v_m^*}{\partial x_l^*}$$

$$=(c_{33}c_{22}-c_{32}c_{23})\left(\frac{\partial v_3^*}{\partial x_2^*}-\frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*}\right)+\cdots$$

$$=(c_{33}c_{22}-c_{32}c_{23})a_1^*+(c_{13}c_{32}-c_{12}c_{33})a_2^*+(c_{23}c_{12}-c_{22}c_{13})a_3^*.$$

با استفاده از (۳) بخش ۹.۸، اتحاد لاگرانژ (بخش ۹.۶) ، و $\mathbf{k}^*\times\mathbf{j}^*=-\mathbf{i}^*$، $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$ به‌دست می‌آوریم

$$c_{33}c_{22}-c_{32}c_{23}=(\mathbf{k}^*\times\mathbf{j}^*)\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}^*\cdot\mathbf{i}=c_{11}$$ ، وغیره

ازاین‌رو $a_1=c_{11}a_1^*+c_{21}a_2^*+c_{31}a_3^*$ که به‌صورت $(5')$ بخش ۹.۸ است. به طریقی مشابه می‌توان فرمولهای متناظری برای a_2 و a_3 پیدا کرد. اگر مختصات $x_1x_2x_3$ چپگرا باشند، دراین صورت $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=+\mathbf{i}$، اما درآن صورت یك علامت منها درجلو دترمینان (۱) هست. قضیه ثابت است.

بخش ۲.۹، صفحهٔ ۵۵۸

۱. $\frac{5}{3}\sqrt{5}$ ۳. 4π ۵. $\frac{5}{3}$ ۷. $\ln 2$

۹. $-\frac{48}{5}$ ۱۱. $\circ$ ۱۳. $\frac{7}{5}$ ۱۵. 8

۱۷. $-\frac{25}{2}$ ۱۹. $W=\frac{5}{6}$, $|W|\leqslant 2$

بخش ۳.۹، صفحهٔ ۵۶۸

۱. $\frac{2}{3}$ ۳. $\frac{3}{8}$

۵. $\frac{۶۷}{۱۲۰}$ ۷. $\frac{۱}{۶}$

۹. $\frac{۱۶}{۳}$ ۱۱. $\bar{x}=۱,\ \bar{y}=۲$

۱۳. $\frac{۸}{۳},\ \frac{۴}{۳}$ ۱۵. $I_x=bh^۳/۱۲,\ I_y=b^۳h/۴$

۱۷. $I_x=(a+b)h^۳/۲۴,\ I_y=h(a^۴-b^۴)/۴۸(a-b)$

۱۹. ۱۸ ۲۱. $۳۲\pi/۳$

۲۳. ۱ ۲۵. ۱

بخش ۴.۹، صفحهٔ ۵۷۵

۱. ۰ ۳. -۱ ۵. $۱/۳$

۷. ۴ ۹. $\pi(\cosh ۱-۱)$ ۱۱. ۰

۱۳. πab ۱۵. $۹/۲$ ۱۷. ۰

۱۹. در قضیه گرین بگیرید $f=-ww_y$ و $g=ww_x$ که درآنها اندیسهای زیر نمایش مشتقات جزئی است. دراین‌صورت $g_x-f_y=w_x^۲+w_y^۲$ زیرا $\nabla^۲w=۰$ و

$$f\,dx+g\,dy=(-ww_yx'+ww_xy')ds=w\,\text{grad}\,w\cdot(y'\mathbf{i}-x'\mathbf{j})ds$$

$$=w(\text{grad}\,w)\cdot\mathbf{n}\,ds=w\frac{\partial w}{\partial n}ds$$

که در آنها پریمها نمایش مشتق نسبت به s است

۲۱. $-(e^۲-۱)/۲$ ۲۳. ۲π ۲۵. ۱

بخش ۵.۹، صفحهٔ ۵۷۹

۱. صفحهٔ xy، خطوط مستقیم موازی

۳. استوانه دوار $x^۲+y^۲=۱$، خطوط مستقیم، دوایر

۵. استوانهٔ بیضی‌گون $x^۲+۱۶y^۲=۱۶$، خطوط مستقیم، بیضیها

۷. مخروط دوار $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$، دوایر، خطوط مستقیم

۹. $\mathbf{r}=ui+v\mathbf{k}$ ۱۱. $\mathbf{r}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+(۱-u-v)\mathbf{k}$

۱۳. $\mathbf{r}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+u^{۲}\mathbf{k}$ ۱۵. $x^{۲}/a^{۲}+y^{۲}/b^{۲}+z^{۲}/c^{۲}-۱=۰$

۱۷. $x^{۲}/a^{۲}-y^{۲}/b^{۲}-z=۰$ ۱۹. $(v\mathbf{i}+u\mathbf{j}-\mathbf{k})/\sqrt{۱+u^{۲}+v^{۲}}$

بخش ۶.۹، صفحهٔ ۵۸۸

۳. $(\mathbf{r}^*-\mathbf{r})\cdot \operatorname{grad} f=۰,\ \mathbf{n}=\operatorname{grad} f/|\operatorname{grad} f|$

۵. $x^*+y^*-z^*=۱$ ۷. $۴x^*-z^*=۴$

۹. $۴x^*+۲y^*-z^*=۵$ ۱۱. $du^{۲}+dv^{۲}$

۱۳. $a^{۲}\cos^{۲}v\, du^{۲}+a^{۲}dv^{۲}$

۱۵. $(۱+v^{۲})\, du^{۲}+۲uv\, du\, dv+(۱+u^{۲})\, dv^{۲}$

۱۷. $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ برمنحنیها مماسند. قضیهٔ ۱ بخش ۵.۶ را به‌کار برید.

۱۹. ۲π ۲۱. $\pi(\sqrt{۱۲۵}-۱)/۶$ ۲۵. $\pi\sqrt{۲}$

بخش ۷.۹، صفحهٔ ۵۹۵

۱. ۶π ۳. $(۳^{۵/۲}-۲^{۷/۲}+۱)/۱۵$

۵. $(۱۰^{۳/۲}-۱)/۹$ ۷. ۰

۹. $(۵^{۳/۲}-۱)/۲$ ۱۳. $۲\pi h$

۱۵. $۲\pi^{۲}ab\,(۲a^{۲}+۳b^{۲})$ ۱۷. $۲\pi^{۲}ab(۴a^{۲}+۴ab+۵b^{۲})$

بخش ۹.۹، صفحهٔ ۶۰۷

۱. ۱ ۳. $\pi/۲$ ۵. $\frac{۱}{۸}$

۷. $\frac{۱}{۱۲۰}$ ۹. $۲c^{۵}/۳$ ۱۱. $\pi h^{۵}/۱۰$

۱۳. در (۳) بخش ۸.۹ به‌ترتیب $\mathbf{u}$ را $x\mathbf{i}$، $y\mathbf{j}$، $z\mathbf{k}$ بگیرید

۱۹. ۳ ۲۱. ۰ ۲۳. ۱۲

۲۵. در (۹) قرار دهید $f=۱$ ۲۷. از مسئله ۲۶ استفاده کنید

بخش ۱۱.۹، صفحهٔ ۶۱۶

۱. ±۱ ۳. $\pm۳\pi/۲$

۵. نمایش پارامتریك C را به‌کار برید.

۷. $-۱۸\pi\sqrt{۲}$

۹. $\frac{۱}{۳}$

۱۱. ۰

۱۳. ۰

۱۵. ۰

بخش ۹.۱۲، صفحهٔ ۶۲۶

۱. بلی

۳. خیر

۵. بلی

۷. بلی

۹. $u=(x^۲-y^۲-z^۲)/۲$

۱۱. $u=x+yz$

۱۳. $u=\sin x-y^۲z$

۱۵. $\frac{۱}{۲}$

۱۷. ۵

۱۹. $e^۲-۵$

بخش ۱.۱۰، صفحهٔ ۶۳۰

۱. $۱, ۱, ۲, ۲, \pi, \pi, ۲\pi, ۲\pi$

۱۷. $\pi/۲(n=۰)$، ۰ (n زوج)، $۱/n(n=۱, ۵, ۹, \ldots)$، $-۱/n(n=۳, ۷, ۱۱, \ldots)$

۱۹. ۰

۲۱. $۰(n=۰)$، $۲\pi/n(n=۱, ۳, \ldots)$، $-۲\pi/n(n=۲, ۴, \ldots)$

۲۳. $\pi^۳/۳(n=۰)$، $(-۱)^n ۲\pi/n^۲(n=۱, ۲, \ldots)$

۲۵. $n[(-۱)^n e^{-\pi}-۱]/(۱+n^۲)$

بخش ۲.۱۰، صفحهٔ ۶۳۳

۱. $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}\left(\sin x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x+\frac{۱}{۵}\sin ۵x+\cdots\right)$

۳. $\frac{۲}{\pi}\left(\sin x-\frac{۲}{۳}\sin ۲x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x+\frac{۱}{۵}\sin ۵x-\frac{۲}{۶}\sin ۶x+\cdots\right)$

۵. $۲\left(\sin x-\frac{۱}{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۳}\sin ۳x-\frac{۱}{۴}\sin ۴x+-\cdots\right)$

۷. $۲\left[\left(\frac{\pi^۲}{۱}-\frac{۶}{۱^۳}\right)\sin x-\left(\frac{\pi^۲}{۲}-\frac{۶}{۲^۳}\right)\sin ۲x+\left(\frac{\pi^۲}{۳}-\frac{۶}{۳^۳}\right)\sin ۳x-+\cdots\right]$

۹. $\frac{۴}{\pi}\left(\cos x+\frac{۱}{۹}\cos ۳x+\frac{۱}{۲۵}\cos ۵x+\cdots\right)$

۱۱. $\frac{۴}{\pi}\left(\cos x-\frac{۱}{۳}\cos ۳x+\frac{۱}{۵}\cos ۵x-+\cdots\right)$

۱۳. $\frac{۲}{\pi}\sin x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x-\frac{۲}{۹\pi}\sin ۳x-\frac{۱}{۴}\sin ۴x+\frac{۲}{۲۵\pi}\sin ۵x+\cdots$

۱۵. $a_۰=\pi^۲/۶,\ a_n=(-۱)^n ۲/n^۲,\ b_n=\{۲[(-۱)^n-۱]/n^۳\pi\}-\{\pi(-۱)^n/n\}$

بخش ۳.۱۰، صفحهٔ ۶۴۳

۳. $\frac{۲}{\pi}+\cos ۱۰۰\pi t$

$+\frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\cdot۳}\cos ۲۰۰\pi t-\frac{۱}{۳\cdot۵}\cos ۴۰۰\pi t+\frac{۱}{۵\cdot۷}\cos ۶۰۰\pi t-+\cdots\right)$

۵. $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{۲}-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi t}{۲}+\frac{۱}{۵}\cos\frac{۵\pi t}{۲}-+\cdots\right)$

۷. $\frac{۲}{\pi}\left(\sin \pi t-\frac{۱}{۲}\sin ۲\pi t+\frac{۱}{۳}\sin ۳\pi t-+\cdots\right)$

۹. $-\frac{۴}{\pi^۲}\left(\cos \pi t+\frac{۱}{۹}\cos ۳\pi t+\frac{۱}{۲۵}\cos ۵\pi t+\cdots\right)$

$+\frac{۲}{\pi}\left(\sin \pi t+\frac{۱}{۳}\sin ۳\pi t+\cdots\right)$

۱۱. $\frac{۱}{\pi}\left(\sin ۴t-\frac{۱}{۹}\sin ۱۲t+\frac{۱}{۲۵}\sin ۲۰t-\frac{۱}{۴۹}\sin ۲۸t+-\cdots\right)$

۱۳. $\frac{۱}{۳}-\frac{۴}{\pi^۲}\left(\cos \pi t-\frac{۱}{۴}\cos ۲\pi t+\frac{۱}{۹}\cos ۳\pi t-\frac{۱}{۱۶}\cos ۴\pi t+-\cdots\right)$

$a_۰=\frac{۱}{۴}(۳-e^{-۲}),\ a_n=\frac{۲k_n}{l_n},\quad b_n=\frac{n\pi k_n}{l_n}\ (n=۲,۴,\cdots),$

$b_n=\frac{n\pi k_n}{l_n}-\frac{۲}{n\pi}\ (n=۱,۳,\cdots),$ اگر $k_n=۱-(-۱)^n e^{-۲},$

$l_n=۴+n^۲\pi^۲$

۱۷. قرار دهید $x=\pi t$

۱۹. قرار دهید $x=\pi t/2$. سری را در $2/\pi$ ضرب کنید (چرا؟).

بخش ۴.۱۰، صفحهٔ ۶۴۷

۳. زوج: $|x^3|$، $x^2\cos nx$، $\cosh x$. فرد: $x\cos nx$، $\sinh x$، $x|x|$

۵. فرد

۷. نه زوج نه فرد

۹. زوج

۱۱. فرد

۱۳. نه‌زوج نه‌فرد

۱۵. $|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|,\ f^2(-x)=(-1)^2f^2(x)=f^2(x)$

۲۱. $\cosh x+\sinh x$

۲۳. $x^2(1-x^2)^{-1}+x(1-x^2)^{-1}$

۲۵. ر.ک. مسئله ۵ بخش ۲.۱۰

۲۷. ر.ک. مسئله ۷ بخش ۲.۱۰

۲۹. $\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{9}\sin 3x+\frac{1}{25}\sin 5x-+\cdots\right)$

۳۱. $-\pi-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\cdots\right)+2\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\right)$

بخش ۵.۱۰، صفحهٔ ۶۵۳

۱. $f(t)=1$

۳. $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{l}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{l}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{l}-+\cdots\right)$

۵. $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{l}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi t}{l}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi t}{l}+\cdots\right)$

۷.
$$\frac{l^3}{4}+\frac{6l^3}{\pi^2}\left[\left(\frac{4}{\pi^2}-1\right)\cos\frac{\pi t}{l}+\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi t}{l}+\left(\frac{4}{3^4\pi^2}-\frac{1}{3^2}\right)\cos\frac{3\pi t}{l}+\cdots\right]$$

۹. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi t}{l}+\frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi t}{l}+\frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi t}{l}+\cdots\right)$

۱۱. $\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{l}+\cdots\right)$

۱۳. $\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{l}+\frac{2}{2}\sin\frac{2\pi t}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{l}+\frac{2}{6}\sin\frac{6\pi t}{l}+\cdots\right)$

۱۵. $\frac{2l^2}{\pi}\left[\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)\sin\frac{\pi t}{l}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{l}+\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3^3\pi^2}\right)\sin\frac{3\pi t}{l}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi t}{l}+\cdots\right]$

بخش ۶.۱۰ ، صفحهٔ ۶۵۹

۱۵. خیر

بخش ۷.۱۰ ، صفحهٔ ۶۶۶

۱. $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{1}{\omega^2-1}\sin t$، مقادیر عددی دامنهٔ $A(\omega)$ جملهٔ آخر عبارتند از

ω	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۹	۱٫۱	۱٫۵	۲٫۰	۱۰٫۰
$A(\omega)$	−۱٫۳۳	−۰٫۲۰	−۵٫۳	۴٫۸	۰٫۸	۰٫۳۳	۰٫۰۱

۳. $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+B_1\sin t+B_3\sin 3t+B_5\sin 5t$ که در آن

ω	0.5	0.9	1.1	2.0	2.9	3.1	4.0	4.9	5.1	6.0	8.0
$B_1=1/(\omega^2-1)$	−1.33	−5.3	4.8	0.33	0.13	0.12	0.07	0.04	0.04	0.03	0.02
$B_3=1/9(\omega^2-9)$	−0.013	−0.014	−0.014	−0.02	−0.19	0.18	0.02	0.01	0.01	0.004	0.002
$B_5=1/25(\omega^2-25)$	−0.002	−0.002	−0.002	−0.002	−0.002	−0.003	−0.004	−0.04	0.04	0.004	0.001

۵. $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$

$$+\frac{\pi^2}{12\omega^2}-\frac{1}{\omega^2-1}\cos t+\frac{1}{4(\omega^2-4)}\cos 2t-+\cdots$$

۰۷ $y=C_1 \cos \omega t+C_2 \sin \omega t$

$$+\frac{1}{2\omega^2}-\frac{1}{1\times 3(\omega^2-4)}\cos 2t-\frac{1}{3\times 5(\omega^2-16)}\cos 4t-\cdots$$

۰۹ $y=-\frac{K}{c}\cos t$

۰۱۱ $y=\frac{1-n^2}{D}a_n \cos nt+\frac{nc}{D}a_n \sin nt,\ D=(1-n^2)^2+n^2c^2$

۰۱۳ $y=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n c}{n^2 D_n}\cos nt-\frac{(-1)^n(1-n^2)}{n^3 D_n}\sin nt\right]$ که درآن

$$D_n=(1-n^2)^2+n^2c^2$$

۰۱۵ $I=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt+B_n \sin nt)$ ، $A_n=\frac{80(10-n^2)}{\pi n^2 D_n}$ ،

$D_n=(10-n^2)^2+100n^2$ ، $B_n=0$ (n زوج) ، $A_n=0$ ، $B_n=\frac{800}{n\pi D_n}$ (n فرد)

بخش ۸.۱۰ ، صفحهٔ ۶۷۱

۰۱ (N) فرد $F=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{N}\sin Nx\right]$

۰۵ $F=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-\cdots+\frac{(-1)^{N+1}}{N^2}\cos Nx\right)$

$$E^*=\frac{2\pi^5}{5}-\pi\left(\frac{2\pi^4}{9}+16+1+\frac{16}{81}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$

بخش ۹.۱۰ ، صفحهٔ ۶۷۴

۰۹ $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{a \sin aw}{w}+\frac{\cos aw-1}{w^2}\right]\cos xw\, dw$

۰۱۱ $\frac{6}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{2+w^2}{4+5w^2+w^4}xw\, dw$

۰۱۳ $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left(a^2-\frac{2}{w^2}\right)\sin aw+\frac{2a}{w}\cos aw\right]\frac{\cos wx}{w}\, dw$

۱۵.

$$f(ax)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty} A(w)\cos axw\,dw$$

$$=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty} A\left(\frac{p}{a}\right)\cos xp\frac{dp}{a}$$ که در آن $wa=p$

بخش ۱۰۱۱، صفحهٔ ۶۸۶

۲۱. $u=۳\ln(x^۲+y^۲)/\ln ۴$ **۲۳.** باانتگرالگیری $u=f(y)$

۲۵. $u_x=f(y),\ u=xf(y)+g(y)$ **۲۷.** $u=axy+bx+cy+k$

۲۹. $u=ax+by+c$

۳۱. $p_y-p=۰$، $p=A(x)e^y$، $u=\int p\,dx=f(x)e^y+g(y)$ که در آن $f(x)=\int A\,dx$

۳۳. $u=B(x)e^{-y}-\frac{۱}{۲}x^۲-xy+C(y)$

بخش ۳۰۱۱، صفحهٔ ۶۹۱

۱. بسامد عبارت‌است از $C/۲l=\sqrt{T}/۲l\sqrt{\rho}$، ومی بینیم که برای کشش تابعی‌صعودی و درمورد ρ و l تابعی نزولی‌است.

۳. $u=k\cos ۲t\sin ۲x$ **۵.** $u=\dfrac{۲k}{a(\pi-a)}\sum_{n=۱}^{\infty}\dfrac{\sin na}{n^۲}\cos nt\sin nx$

۷.

$$u=\frac{۸k}{\pi^۲}\left[(۲-\sqrt{۲})\cos t\sin x-\frac{۲+\sqrt{۲}}{۹}\cos ۳t\sin ۳x\right.$$
$$\left.+\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲۵}\cos ۵t\sin ۵x-\cdots\right]$$

۹.

$$u=۰٫۱۲\left(\cos t\sin x-\frac{۱}{۲^۳}\cos ۲t\sin ۲x\right.$$
$$\left.+\frac{۱}{۳^۳}\cos ۳t\sin ۳x-+\cdots\right)$$

۱۱. $۲۷,\ ۹۶۰/\pi^۶\approx ۰٫۹۹۸۶$ **۱۳.** $u=e^{k(x+y)}$

۱۵. $u=x^k y^k$ **۱۷.** $u=ke^{x^۲+y^۲+c(x-y)}$

۱۹. $u=(c_۱e^{kx}+c_۲e^{-kx})(A\cos ky+B\sin ky)$، وغیره

۲۳. این از فرمول اویلر نتیجه می‌شود؛ توجه کنید که t صرفاً نقش یك پارامتر را بازی می‌کنید وسری عبارت است ازسری سینوس فوریه تابع ثابت ۱ ضربدر $A\sin\omega t$

۲۵. در $u(x,\ t)$ مسئلهٔ ۲۱ قراردهید $G_n(t)$ [مسئلهٔ ۲۴] و شرایط اولیه داده شده را به‌کار برید. دراین صورت

$$G_n(0)=B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$G_n(0)=\lambda_n B_n{}^*+\frac{2A\omega(1-\cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n{}^2-\omega^2)}=0.$$

بخش ۴.۱۱ ، صفحهٔ ۷۰۰

۹. $u=f_1(x)+f_2(x+y)$ **۱۱.** $u=xf_1(x+y)+f_2(x+y)$

۱۵. $y'^2-2y'+1=(y'-1)^2=0,\ y=x+c,\ \Psi(x,\ y)=x-y,\ v=x,$
$z=x-y$

۱۷. $F_n=\sin(n\pi x/l),\ G_n=a_n\cos(cn^2\pi^2t/l^2)$

۱۹. $u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0,\ u_x(0,\ t)=0,\ u_x(l,\ t)=0$

بخش ۵.۱۱ ، صفحهٔ ۷۰۵

۱. جوابهای معادله موج برحسب t دوره‌ای است.

۵. چون دمای دوانتها ثابت نگاهداشتهٔ شده است ، دما به‌توزیع حالت تعادل (مستقل از زمان) $u_1(x)$ میل می‌کند وقتی که $t\to\infty$ ، و $u_I=U_1+(U_2-U_1)x/l$ ، جواب (۱) با $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ درشرایط مرزی صدق می‌کند.

۷. $u=\sin 0.1\,\pi x\, e^{-1.752\pi^2 t/100}$

۹. $u=\frac{40}{\pi^2}\left(\sin 0.1\pi x e^{-0.01752\pi^2 t}-\frac{1}{9}\sin 0.3\pi x e^{-0.01752(3\pi)^2 t}+-\cdots\right)$

۱۱. $u=\frac{800}{\pi^3}\left(\sin 0.1\pi x e^{-0.01752\pi^2 t}+\frac{1}{3^3}\sin 0.3\pi x e^{-0.01752(3\pi)^2 t}+\cdots\right)$

۱۵. $u=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x e^{-t}-\frac{1}{4}\cos 2x\, e^{-4t}+\frac{1}{9}\cos 3x e^{-9t}-+\cdots\right)$

۱۷. $u=\frac{\pi}{8}+\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\cos x e^{-t}-\frac{1}{\pi}\cos 2x e^{-4t}-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9\pi}\right)\cos 3x e^{-9t}+\cdots$

بخش ۶.۱۱، صفحهٔ ۷۱۱

۱۳. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(a-x)/\tau}^{(b-x)/\tau} e^{-w^2}dw-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(a+x)/\tau}^{(b+x)/\tau} e^{-w^2}dw$

بخش ۸.۱۱، صفحهٔ ۷۱۹

۱. C و نیز بسامد افزایش می‌یابند.

۵. $c\pi\sqrt{260}$ (مقادیر ویژهٔ متناظر $F_{4,16}$، $F_{16,14}$)، و غیره.

۹. $B_{mn}=\frac{-8}{mn\pi^2}((-1)^m k_n+(-1)^n l_m)$ که درآن

$$l_m=\begin{cases} 0 & (\text{زوج } m)\\ b & (\text{فرد } m)\end{cases} \quad \text{و} \quad k_n=\begin{cases} 0 & (\text{زوج } n)\\ a & (\text{فرد } n)\end{cases}$$

۱۱. $B_{mn}=0$ (m یا n زوج)، $B_{mn}=\frac{64a^2b^2}{\pi^6 m^3 n^3}$ (m, n هردوفرد)

۱۵. $u=\frac{0.64}{\pi^6}\sum_{\substack{m=1\\ m,n\ \text{فرد}}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^3n^3}\cos(\pi t\sqrt{m^2+n^2})\sin m\pi x\sin n\pi y$

۱۷. $u=k\cos\pi\sqrt{5}\,t\sin\pi x\sin 2\pi y$

بخش ۹.۱۱، صفحهٔ ۷۲۸

۵. $a^2u_{x^*x^*}+c^2u_{y^*y^*}$

بخش ۱۰.۱۱، صفحهٔ ۷۳۱

۹. $u_2: r=\alpha_1/\alpha_2=0.43565,\ u_3: r=\alpha_1/\alpha_3=0.27789, r=0.63788$

۱۹. $u=4k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1^2(\alpha_m)}\cos\alpha_m t J_0(\alpha_m r)$

بخش ۱۱.۱۱، صفحهٔ ۷۳۷

۱. $a^2u_{x^*x^*}+b^2u_{y^*y^*}+c^2u_{z^*z^*}$

۱۹. $\frac{u_1-u_0}{\ln\frac{r_1}{r_0}}\ln r+\frac{u_0\ln r_1-u_1\ln r_0}{\ln\frac{r_1}{r_0}}$

بخش ۱۲.۱۱، صفحهٔ ۷۴۲

۵. $u=1$

۷. $u=\frac{۲}{۳}r^{۲}P_{۲}(\cos\phi)+\frac{۱}{۳}=r^{۲}\left(\cos^{۲}\phi-\frac{۱}{۳}\right)+\frac{۱}{۳}$

۹. $u=\frac{۴}{۳}r^{۲}P_{۲}(\cos\phi)-\frac{۱}{۳}$، $۲x^{۲}-۱=\frac{۴}{۳}P_{۲}(x)-\frac{۱}{۳}$، $\cos ۲\phi=۲\cos^{۲}\phi-۱$

۱۱. $u=۴r^{۳}P_{۳}(\cos\phi)-۲r^{۲}P_{۲}(\cos\phi)+rP_{۱}(\cos\phi)-۲$

بخش ۱۳.۱۱، صفحهٔ ۷۴۷

۵. $U(x,\ s)=\frac{c(s)}{x^{s}}+\frac{x}{s^{۲}(s+۱)}$، $U(\circ,\ s)=\circ$، $c(s)=\circ$،

$u(x,\ t)=x(t-۱+e^{-t})$

۹. قرار دهید $z^{۲}=x^{۲}/۴c^{۲}\tau$، z را به‌عنوان متغیر جدیدی برای انتگرالگیری به‌کار برید. از $\operatorname{erf}(\infty)=۱$ استفاده کنید.

بخش ۱.۱۲، صفحهٔ ۷۵۶

۳. $۷/۲۹+(۲۶/۲۹)i$ ۵. $۷/۵\circ-(۱۳/۲۵)i$ ۷. $-۱/۵$

۹. $۴x^{۳}y-۴xy^{۳}$ ۱۱. $۲/۲۵$ ۱۳. $(x^{۲}-y^{۲})/(x^{۲}+y^{۲})$

۲۵. $\operatorname{Re}(\overline{iz})=-\operatorname{Im}z,\ \operatorname{Im}(\overline{iz})=-\operatorname{Re}z$

بخش ۲.۱۲، صفحهٔ ۷۶۲

۱. ۲ ۳. ۱ ۵. $\sqrt{\frac{(x-۱)^{۲}+y^{۲}}{(x+۱)^{۲}+y^{۲}}}$

۷. ۱ ۹. $\pi/۴$ ۱۱. $-\pi/۲$

۱۳. $۵\cos\pi$

۱۵. $\frac{۱}{۵}\left[\cos\left(-\arctan\frac{۳}{۴}\right)+i\sin\left(-\operatorname{asc}\tan\frac{۳}{۴}\right)\right]$

۱۹. در نظر بگیرید $c=a+ib=z_{۱}/(z_{۱}+z_{۲})$، فرض کنید $z_{۱}+z_{۲}\neq\circ$. از (۱۲) داریم $|a|\leqslant|c|$، $|a-۱|\leqslant|c-۱|$. از این‌رو $|a|+|a-۱|\leqslant|c|+|c-۱|$. واضح است که $|a|+|a-۱|\geqslant ۱$ و نامساوی آخری می‌شود:

$$۱\leqslant|c|+|c-۱|=\left|\frac{z_{۱}}{z_{۱}+z_{۲}}\right|+\left|\frac{z_{۲}}{z_{۱}+z_{۲}}\right|.$$

با ضرب کردن در $|z_1+z_2|$ به (۱۰) می‌رسیم

۴۱. هردوطرف نامساوی را به‌توان دوبرسانید.

بخش ۳.۱۲، صفحهٔ ۷۶۶

۱. $y \geqslant -1$

۳. نواحی راست شاخهٔ راست و نواحی چپ شاخهٔ چپ هذلولی $x^2 - y^2 = 1$

۵. نوار قائم باکرانهای $x = -\pi$ و $x = \pi$

۷. $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$ **۹.** محور y

۱۱. داخل دایرهٔ به‌شعاع $\frac{1}{2}$ و به‌مرکز $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

۱۳. پاره‌خط مستقیم بانقاط انتهایی z_1، z_2

بخش ۴.۱۲، صفحهٔ ۷۷۰

۱. $11+13i,\ -27+3i,\ 41-23i$

۳. $2-i,\ (4-3i)/5,\ (8-i)/13$

۵. $(1-x)/[(1-x)^2+y^2],\ y/[(1-x)^2+y^2]$

۷. $\operatorname{Re} w > 0$ **۹.** $|w| > 9$ **۱۱.** $\operatorname{Re} w \geqslant 0$

۱۵. خیر، زیرا $f(z) \to 0\ [= f(0)]$ وقتی‌که $z \to 0$ حول محور y، اما $f(z) \to 1\ [\neq f(0)]$ وقتی‌که $z \to 0$ حول محور x مثبت.

۱۷. بلی، زیرا به‌ازای $z \neq 0$، $|f(z)| = x^2/\sqrt{x^2+y^2} \leqslant |x| \leqslant |z|$ و، بنابراین، $|f(z)| \to 0 [= f(0)]$ وقتی‌که $|z| \to 0$

۲۱. $4z(z^2+1)$ **۲۳.** $(2-2z^2)/(z^2+1)^2$

۲۵. $(6-8i)/25$ **۲۷.** $-1-3i$

۲۹. خارج قسمت در (۴) عبارت است از $\Delta x/\Delta z$، که وقتی $\Delta x = 0$ برابر صفر می‌شود واگر $\Delta y = 0$ برابر ۱ است و بنابراین وقتی $\Delta z \to 0$ حدی ندارد.

بخش ۵.۱۲، صفحهٔ ۷۷۶

۱. a **۳.** $-1/z^2$ **۵.** $1-1/z^2$

۱۱. بلی ۱۳. خیر ۱۵. بلی، جز در $z=1$

۱۷. خیر ۱۹. خیر ۲۳. z

۲۵. $-iz^2/2$ ۲۷. $\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

۲۹. $u=ax^3-3kx^2y-3axy^2+ky^3$، بنابراین $b=-3k,\ c=-3a$

۳۳. بگیرید $f=u+iv$ و $|f|=c$. دراین صورت $u^2+v^2=c^2$. بامشتقگیری داریم $uu_x+vv_x=0$، $uu_y+vv_y=0$. بنابه (۵)، $uu_x-vu_y=0$، $uu_y+vu_x=0$، از این‌رو

$$(uu_x-vu_y)^2+(uu_y+vu_x)^2=(u^2+v^2)(u_x^2+u_y^2)=c^2(u_x^2+u_y^2)=0$$

هرگاه $c=0$، در این صورت $u=v=0$. هرگاه $c\neq 0$، در آن صورت $u_x^2+u_y^2=0$، یعنی $u_x=u_y=0$ و بنابه (۵)، $v_x=0$، $v_y=0$. بنابراین $u=$ ثابت، $v=$ ثابت.

۳۵. فرض کنید $f=u+iv$. بنابه (۳)، $f'=u_x+iv_x=0$. ازاین‌رو $u_x=0$، $v_x=0$. بنا به (۴) یا (۵)، $u_y=0$، $v_y=0$. ازاین‌رو $u=$ ثابت، $v=$ ثابت، $f=u+iv=$ ثابت.

بخش ۶.۱۲، صفحهٔ ۷۸۳

۱. $\pm(1+i)/\sqrt{2}$ ۳. $2i,\ -2i$ ۵. $-1,\ (1\pm i\sqrt{3})/2$

۷. $i,\ (\pm\sqrt{3}-i)/2$ ۹. $\pm(1+i)/\sqrt{2},\ \pm(-1+i)/\sqrt{2}$

۱۱. $\pm(\sqrt{3}+i)/2\ \pm i,\ \pm(\sqrt{3}-i)/2$

۱۳. $3,\ 3(-1\pm i\sqrt{3})/2$ ۱۵. $3(\pm 1\pm i)/\sqrt{2}$

۱۷. 0 ۱۹. $\pm(1+i)\sqrt{2}$

۲۱. $\pm(2+3i)$ ۲۳. $i,\ -1-i$ ۲۵. $3+2i,\ 2-i$

۲۷. $z^4=4+4i,\ z=\pm\sqrt[8]{32}(\cos\beta+i\sin\beta),\ \beta=\pi/16,\ 9\pi/16$

۲۹. $(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$

بخش ۷.۱۲، صفحهٔ ۷۸۸

۳. $(1+i)/\sqrt{2}$ ۵. $e(\cos 1+i\sin 1)$

۷. $e^{2x}\cos 2y,\ e^{2x}\sin 2y$ ۹. $e^{x^2-y^2}\cos 2xy,\ e^{x^2-y^2}\sin 2xy$

۱۱. $e^{\pi i/4},\ e^{5\pi i/4},\ e^{3\pi i/4},\ e^{-\pi i/4}$ ۱۳. $\sqrt{8}e^{-\pi i/4}$

۱۵. $\pm 2n\pi i\ (n=0,\ 1,\ \dots)$ ۱۷. $\ln 2\pm(2n+1)\pi i\ (n=0,\ 1,\ \dots)$

۱۹. همهٔ مقادیر z ۲۱. $\operatorname{Re} z>0$ ۲۳. $-e^{xy}\sin\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)$

۲۵. $e^z\to\infty$ وقتی که $\arg z=0$، e^{iy} حدی ندارد، $e^z\to 0$ وقتی که $\arg z=\pi$

بخش ۸.۱۲، صفحهٔ ۷۹۱

۷. $\sqrt{\cos^2 x+\sinh^2 y}$ ۹. $\sqrt{\dfrac{\sin^2 x+\sinh^2 y}{\cos^2 x+\sinh^2 y}}$

۱۱. $\sin x\cos x/(\sin^2 x+\sinh^2 y)$ ۱۳. $1.175i$

۱۵. $2.033-3.052i$ ۱۷. $1.960+3.166i$

۱۹. $\pm 2n\pi\pm 2.29i$ ۲۱. $\pm(2n+1)\pi i/2,\ n=0,\ 1,\ \dots$

۲۳. $\pm(\pi/3)i\pm 2n\pi i,\ n=0,\ 1,\ \dots$

بخش ۹.۱۲، صفحهٔ ۷۹۵

۵. $\pm 2n\pi i,\ n=0,\ 1,\ \dots$ ۷. $i\left(\frac{1}{2}\pi\pm 2n\pi\right),\ n=0,\ 1,\ \dots$

۹. $1+\left(\frac{1}{2}\pi\pm 2n\pi\right)i,\ n=0,\ 1,\ \dots$

۱۱. $(1\pm 2n\pi)i,\ n=0,\ 1,\ \dots$ ۱۳. $-i$

۱۵. $-e$ ۱۷. $0.693-1.571i$

۱۹. $1.946+3.142i$ ۲۱. $1+i$

۲۳. $\sqrt{2}e^{\pi/4}\left[\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{1}{4}\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right]$

۲۵. $27[\cos(\ln 3)-i\sin(\ln 3)]$ ۲۷. $3.350+1.189i$

۳۱. $\cosh w=\frac{1}{2}(e^w+e^{-w})=z,\ (e^w)^2-2ze^w+1=0,\ e^w=z+\sqrt{z^2-1}$

۳۵. نتیجهٔ $\sin(w\pm 2n\pi)=\sin w$ و $\sin(\pi-w)=\sin w$

بخش ۱۰.۱۳، صفحهٔ ۸۰۲

۱. $v=-u+2x-2,\ v=-u-2,\ -u,\ -u+2,\ -u+4$

۳. $|w-2i|\leqslant 2\sqrt{2}$

۵. $v=0$ و $u\leqslant 0$، $v=2\sqrt{1-u}$ و $u\leqslant 1$، و غیره.

۷. $u=x^2-y^2$ ، $v=2xy$. وقتی که $y=x+1$ داریم $u=-2x-1$ ، $v=2x(x+1)$ از این‌رو $x=-\frac{1}{2}(u+1)$ و $v=\frac{1}{2}\left(u^2-1\right)$.

۹. $u=-1$

۱۱. $|w|\leqslant 16$

۱۳. ناحیهٔ بین سهمی‌های $v^2=4(1-u)$ و $v^2=16(4-u)$

۱۵. $-\pi/2<\arg w<\pi$

۱۷. $u=-\frac{1}{2}$

۱۹. $v=-\frac{1}{4}$

۲۱. $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

۲۳. تصویر با دوایر $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ و $\left|w-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ کراندار است.

۲۷. $0\leqslant\arg w\leqslant\pi/4,\ \pi/2\leqslant\arg w\leqslant 3\pi/4,\ -\pi/2\leqslant\arg w\leqslant-\pi/4,$
$0\leqslant\arg w\leqslant\pi/2,\ \pi/2\leqslant\arg w\leqslant\pi,\ \pi\leqslant\arg w\leqslant 3\pi/2,$
$-\pi/2\leqslant\arg w\leqslant 0,\ 0\leqslant\arg w\leqslant 3\pi/4$

۲۹. $w=z+2+i$

بخش ۲.۱۳، صفحهٔ ۸۱۰

۳. خیر، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند، ولی جهت زاویه را عوض می‌کند

۵. $z(t)=t+i/t$

۷. $z(t)=\cosh t+i\sinh t$

۹. $z(t)=1+3\cos t-2i+3i\sin t$

۱۱. $z=(2n+1)\pi/2, n=0,\pm1,\pm2,\dots$

۱۳. $z=0$

۱۵. $z=-a/2$

بخش ۳.۱۳، صفحهٔ ۸۱۶

۱. $z=0$

۳. $z=0,\ 1$

۵. $z=0,\ \pm1$

۷. $z=\pm i$

۹. $z=\pm i$

۱۱. $w=-1/z$

۱۳. $w=(az+b)/(a-bz)$ ۱۵. کلیهٔ انتقالها

بخش ۴۰۱۳، صفحهٔ ۸۱۹

۱. $w_۱=iz,\ w_۲=w_۱+۴,\ w_۳=۱/w_۲,\ w_۴=۵iw_۳,\ w=w_۴-i$

۵. $w=-۲i\dfrac{۱}{z+i}+۱$ ۷. $w=(۴z-i)/(-iz-۴)$

۹. $w=۱/z$ ۱۱. $w=۱/(z+۱)$

۱۳. $w=(z-i)/(z+i)$ ۱۵. $w=(z+۱)/(z-i)$

۱۷. $w=(z+۳)/(۲z-۱)$ ۱۹. $w=az/(cz+d)$

۲۱. بجز موردی که عامل مشترک مختلط داشته باشند باید چهار ضریب حقیقی باشند.

۲۳. $w=-(z^۲+i)/(iz^۲+۱)$ ۲۵. $w=(z^۴-i)/(-iz^۴+۱)$

بخش ۵۰۱۳، صفحهٔ ۸۲۵

۱. $e^{-۱}<|w|<e,\ |\arg w|<\pi/۲$ ۳. $۱<|w|<e,\ ۰<\arg w<۱$

۵. $e^{-۲}\leqslant|w|\leqslant e^۲,\ -\pi\leqslant\arg w\leqslant-\pi/۲$

۷. $t=z^۲$ ناحیهٔ مورد نظر را برروی نوار $۰<\operatorname{Im} t<\pi$، و $w=e^t$ این نوار را برروی نیم‌صفحهٔ فوقانی می‌نگارد. جواب $w=e^{z^۲}$

۹. ناحیهٔ واقع در نیم‌صفحهٔ فوقانی که توسط بیضیهای

$$\frac{u^۲}{\cosh^۲ ۱}+\frac{v^۲}{\sinh^۲ ۱}=۱ \quad و \quad \frac{u^۲}{\cosh^۲ ۲}+\frac{v^۲}{\sinh^۲ ۲}=۱$$

محدود شده است.

۱۱. طوق بیضی شکلی که توسط بیضی‌های مذکور در مسئلهٔ ۹ محدود شده وتوسط ودر امتداد محور موهومی مثبت بریده شده‌است.

۱۳. $\cosh z=\cos(iz)=\sin\left(iz+\frac{۱}{۲}\pi\right)$

۱۵. $T=T_۰+\dfrac{۲}{\pi}(T_۱-T_۰)\arctan\dfrac{y}{x}=T_۰+\dfrac{۱}{\pi}(T_۱-T_۰)\arctan\dfrac{۲xy}{x^۲-y^۲}$

۱۷. $T=\dfrac{۱۰۰}{\pi/۴}\arctan\dfrac{y}{x}$ ۱۹. $T=\dfrac{۱}{\pi}\arctan\dfrac{۴xy}{(x^۲+y^۲)^۲-۱}$

بخش ۶.۱۳، صفحهٔ ۸۳۴

۱. w طول دایرهٔ یکهٔ $|w|=1$ را طی می‌کند.

۳. به‌ترتیب ورقه‌های ۴ و ۵، نقطهٔ شاخه‌ای در $z=0$

۵. داخل بیضی $\frac{u^2}{(5/2)^2}+\frac{v^2}{(3/2)^2}=1$. داخل همان بیضی در ورقهٔ دیگر، حلقهٔ محدود شده توسط بیضی فوق و بیضی

$$\frac{u^2}{(10/3)^2}+\frac{v^2}{(8/3)^2}=1$$

۹. ۲ ورقه، نقطهٔ شاخه‌ای در $z=0$

۱۱. سه‌ورقه، نقطهٔ شاخه‌ای مرتبهٔ دوم در $z=i$

۱۳. $\pm i$، ۲ ورقه

۱۵. a، b، ۲ روقه

۱۷. a، تعداد نامتناهی ورقه

۱۹. ندارد، ورقه، که همبند نیستند؛ در واقع، $\sqrt{e^z}$ دوتابع $e^{z/2}$، $-e^{z/2}$ را نمایش می‌دهد.

بخش ۱.۱۴، صفحهٔ ۸۴۲

۱. $z=(1+2i)t,\ 0\leqslant t\leqslant 1$

۳. $z=1+i+(2-5i)t,\ 0\leqslant t\leqslant 1$

۵. $z=-2+i+it,\ 0\leqslant t\leqslant 3$

۷. $z=1-2i+3e^{it},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۹. $z=3\cos t+i\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۱۱. $z=t+i/t,\ 1\leqslant t\leqslant 4$

۱۳. پارخط مستقیم از ۱ تا i — ۳

۱۵. قسمت فوقانی دایرهٔ $x^2+(y-3)^2=9$

۱۷. $y=3x^2$ از $(-1, 3)$ تا $(2, 12)$

۱۹. $-8i$

۲۱. $-115-46i$

۲۳. 0

۲۵. $1+2i$

۲۷. (الف) $2\pi i$، (ب) $-2\pi i$

۲۹. (الف) i، (ب) $2i$، (ج) $2i$

بخش ۲.۱۴، صفحهٔ ۸۴۹

۵. $۲b(۱+i)$ ۷. $\frac{۴}{۳}$ ۹. $-۱+ie$

۱۱. $i(\sinh ۲\pi-\sinh\pi)$ ۱۳. $۱-\cosh ۱$

۱۵. $i\sin ۱$ ۱۷. $۵e^{۳}$ ۱۹. ۵

بخش ۳.۱۴، صفحهٔ ۸۵۲

۳. هرگاه $z=۰$ واقع درخارج C باشد.

۵. ۰، بلی   ۷. $-\pi$، خیر   ۹. ۰، بلی

۱۱. ۰، خیر   ۱۵. (الف) $۲\pi i$، (ب) $۲\pi i$، خیر   ۱۷. $۲\pi i$، ۰

۱۹. $۲\pi i$، πi ۲۱. ۰   ۲۳. $-۲\pi i$، ۰

۲۵. ۰

بخش ۴.۱۴، صفحهٔ ۸۶۱

۱. $۲+۲i$ ۳. $(۱۰-۲i)/۳$ ۵. $-۲e$ ۷. $(e^{-۱}-۱)/۲$

۹. $i\sinh\pi$ ۱۱. $-\frac{۱}{۲}\sin\pi^{۲}$ ۱۳. $\left(\pi-\frac{۱}{۲}\sinh ۲\pi\right)i$

۱۵. $i\sin ۳$ ۱۷. $\cos ۲-۱$ ۱۹. ۰

بخش ۵.۱۴، صفحهٔ ۸۶۴

۱. π ۳. ۰   ۵. $\pi i/۲$ ۷. $\pi/۲$ ۹. $۲\pi i$

۱۱. $\pi i/۲$ ۱۳. ۰   ۱۵. $۲\pi i$ ۱۷. ۰   ۱۹. $۲\pi i$

بخش ۶.۱۴، صفحهٔ ۸۶۸

۱. $\pi i/۲$ ۳. $۳\pi/۸$ ۵. $\pi i/۸$ ۷. πi

۹. $\pi(\pi+۴i)(۱-i)/۳۲\sqrt{۲}$ ۱۱. $۲\pi i$

۱۳. $(-۱)^{n}۲\pi i/(۲n)!$ ۱۵. $۲\pi i$

بخش ۱.۱۵، صفحهٔ ۸۷۴

۱. $\frac{۱}{۴}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۶}, \frac{۴}{۷}, \ldots$ ۳. $i, -\frac{۱}{۸}, -i/۲۷, \frac{۱}{۶۴}, \ldots$

۵. $\frac{۱+i}{۲} = \frac{i}{۱+i}$ ، $\frac{-۸+۴i}{۵} = \frac{-۴}{۲+i}$ ، $\frac{-۹-۲۷i}{۱۰} = \frac{-۹i}{۳+i}$ ، ...

۷. ۱، $i/۲$ ، $-\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ، $-i/۸$ ، ...   ۹. کراندار، همگرا، حد ۰

۱۱. غیرکراندار، واگرا   ۱۳. کراندار، واگرا

بخش ۳.۱۵، صفحهٔ ۸۸۲

۱. خیر، خیر، موجود نیست   ۳. بلی، خیر، ۱، ۱−

۵. بلی، خیر، i ، ۱− ، $-i$ ، ۱   ۷. خیر، خیر، موجود نیست

۹. بلی، بلی (حد ۰)   ۱۱. بلی، بلی، (حد صفر)

۱۳. بلی، خیر، ۱ و ۲ و ۳   ۱۵. بلی، خیر، ۱، i ، ۱− ، $-i$

بخش ۴.۱۵، صفحهٔ ۸۸۷

۱. کراندار، همگرا، حد ۰ ، یکنوا   ۳. غیرکراندار، واگرا ، یکنوا

۵. کراندار، واگرا، غیریکنوا، ۱، ۲   ۷. کراندار، همگرا، حد صفر، غیریکنوا

۹. کراندار، همگرا، حد صفر، وقتی که $\frac{۱}{۲} \leqslant c \leqslant ۰$

۱۱. همگرا   ۱۳. واگرا (بنا به‌قضیهٔ ۳، بخش ۲.۱۵)

۱۵. ۶ جمله   ۱۷. ۵ جمله   ۱۹. ۲ جمله

بخش ۵.۱۵ ، صفحهٔ ۸۹۱

۱. واگرا   ۳. واگرا (با سری همساز مقایسه کنید)

۵. همگرا   ۷. واگرا   ۹. همگرا

۱۱. همگرا   ۱۳. واگرا   ۱۵. همگرا

۱۷. همگرا   ۱۹. ۴، ۸، ۶۶

بخش ۱.۱۶، صفحهٔ ۹۰۷

۳. ۱   ۵. ۳   ۷. ∞ ۹. ∞

۱۱. $\frac{۱}{۴}$ ۱۳. ∞ ۱۵. $\frac{۱}{۶}$ ۱۷. $\frac{۱}{۹}$

بخش ۲.۱۶، صفحهٔ ۹۱۷

۵. ۵   ۷. $\frac{۱}{۴}$ ۹. ۱

بخش ۴.۱۶، صفحهٔ ۹۲۸

۵. $1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-+\cdots,\ R=\infty$

۷. $1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+-\cdots,\ R=\infty$

۹. $-1-(z-\pi i)-\frac{1}{2!}(z-\pi i)^2-\frac{1}{3!}(z-\pi i)^3-\cdots,\ R=\infty$

۱۱. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right],\ R=\infty$

۱۳. $-1-(z+1)-(z+1)^2-(z+1)^3-\cdots,\ R=1$

۱۵. $\cos^2 z=\frac{1}{2}(1+\cos 2z)=\frac{1}{2}\left[2-\frac{2^2}{2!}z^2+\frac{2^4}{4!}z^4-+\cdots\right],\ R=\infty$

۱۷. $z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots,\ R=\frac{\pi}{2}$

۱۹. $1-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{45}z^4-\frac{2}{945}z^6-\cdots,\ R=\pi$

۳۱. $\frac{z}{2!1}-\frac{z^3}{4!3}+\frac{z^5}{6!5}-+\cdots,\ R=\infty$

۳۳. $z-\frac{z^3}{3!3}+\frac{z^5}{5!5}-\frac{z^7}{7!7}+-\cdots,\ R=\infty$

۳۵. $z-\frac{z^5}{2!5}+\frac{z^9}{4!9}-\frac{z^{13}}{6!13}+-\cdots,\ R=\infty$

بخش ۵.۱۶، صفحهٔ ۹۳۱

۱. $1-z^4+z^8-z^{12}+-\cdots,\ |z|<1$

۳. $1-z^3+z^6-+\cdots,\ |z|<1$

۵. $1-2z^2+3z^4-4z^6+-\cdots,\ |z|<1$

۷. $1-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-\frac{z^{12}}{6!}+-\cdots$

۹. $۱+z^۴+\frac{z^۸}{۲!}+\frac{z^{۱۲}}{۳!}+\cdots$

۱۱. $z^۲+z^۴+\frac{z^۶}{۳}+\cdots$

۱۳. $e\left[۱+z+\frac{۳}{۲}z^۲+\frac{۱۳}{۶}z^۳+\cdots\right],\ |z|<۱$

۱۵. $e\left[۱+z+z^۲+\frac{۵}{۶}z^۳+\cdots\right]$

۱۷. $\frac{۱}{۱-۳i}+\frac{۳}{(۱-۳i)^۲}[z-(۱+i)]+\frac{۳^۲}{(۱-۳i)^۳}[z-(۱+i)]^۲+\cdots,$

$|z-(۱+i)|<\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۰}$

۱۹. $\frac{i}{۲}\left(۱-(۱+i)(z+i)+\frac{۳}{۴}(۱+i)^۲(z+i)^۲-\frac{(۱+i)^۳}{۲}(z+i)^۳+\cdots\right),$

$|z+i|<\sqrt{۲}$

۲۱. $۱+۲\left(z-\frac{\pi}{۴}\right)+۲\left(z-\frac{\pi}{۴}\right)^۲+\frac{۸}{۳}\left(z-\frac{\pi}{۴}\right)^۳+\cdots,\ \left|z-\frac{\pi}{۴}\right|<\frac{\pi}{۴}$

بخش ۶.۱۶، صفحهٔ ۹۳۶

۱. این موضوع از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود.

۳. این موضوع از قضیهٔ ۱ به‌علت آنکه شعاع همگرایی ۴ است نتیجه می‌شود.

۵. $|\sin n|z||\leqslant ۱$، $\sum ۲^{-n}$ همگراست، قضیهٔ ۵ را به‌کار برید.

۷. $|\cos^n|z||\leqslant ۱$، و $\sum(۱/n^۲)$ همگرا است.

۱۱. همگرایی از قضیهٔ ۱، بخش ۵.۱۵ نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم $R_n(z)$ و R_n^* به ترتیب باقیمانده‌های (۱) و (۵) باشند. چون (۵) همگرا است، به‌ازای $\varepsilon>۰$ مفروض می‌توان $N(\varepsilon)$ی یافت به‌طوری که به‌ازای هر $n>N(z)$ داریم $R_n^*(\varepsilon)$. نظر به‌اینکه به‌ازای هر z واقع در G، $|f_n(z)|\leqslant M_n$، داریم $|R_n(z)|\leqslant R_n^*$ و بنابراین به‌ازای هر $n>N(\varepsilon)$ و هر z واقع در G، $|R_n(z)|<\varepsilon$. این موضوع ثابت می‌کند که همگرایی (۱) درناحیهٔ G یکنواخت است.

۱۳. $f_n=s_n-s_{n-۱}=x/(nx+۱)[(n-۱)x+۱]$

۱۷. مجموع $s=\lim s_n=\lim x^n$ در $x=1$ ناپیوسته است. از قضیهٔ ۲ استفاده کنید.

بخش ۱۶.۷، صفحهٔ ۹۴۶

۱. $\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6}+\frac{z}{24}-+\cdots,\ R=\infty$

۳. $\frac{1}{z^2}-2+\frac{2}{3}z^2-\frac{4}{45}z^4+-\cdots,\ R=\infty$

۵. $\frac{1}{z^2}+1+z^2+z^4+z^6+\cdots,\ R=1$

۷. $\frac{3}{z^2}+\frac{9}{2}+\frac{81}{40}z^2+\cdots,\ R=\infty$

۹. $\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+3-4z+-\cdots,\ R=1$

۱۱. خیر، زیرا $z=0$ یک نقطهٔ حدی نقاط $z_n=2/((2n+1)\pi)$ است که در آن نقطه $\tan(1/z)$ تحلیلی نیست.

۱۳. $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}(z-1)^n,\ |z-1|<1,\ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}\frac{1}{(z-1)^{n+4}},\ |z-1|>1$

۱۵. $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1},\ 0<|z-i|<2,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}}\ |z-i|>2$

۱۷. $(1-4z)\sum_{n=0}^{\infty}z^{4n},\ |z|<1,\ \left(\frac{4}{z^3}-\frac{1}{z^4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{4n}},\ |z|>1$

۱۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^{n-2},\ |z-1|>0$

بخش ۱۶.۸، صفحهٔ ۹۵۳

۱. خیر ۳. خیر ۵. خیر

۷. خیر، خیر ۹. خیر، خیر ۲۱. ± 1 (ساده)

۲۳. $-i$ (مرتبهٔ سوم) ۲۵. 0، ± 1، ± 2، ... (مرتبهٔ سوم)

۲۷. $(2n+1)\pi i/2$، $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (مرتبهٔ دوم)

۲۹. $\pm 2n\pi i$، $n=0, 1, \ldots$ (ساده)

۳۱. بنا به‌فرض، $f(z)=(z-a)^n g(z)$ که در آن $g(a)\neq 0$. درنتیجه، $f(z)^2=(z-a)^{2n}g(z)^2$، وغیره.

۳۳. a — (قطب مرتبهٔ سوم)

۳۵. 0، ∞ (تکینهای ویژه)

۳۷. 0 (قطب مرتبهٔ پنجم)، ∞ (تکین ویژه)

۳۹. 0 (تکین ویژه)

بخش ۱۷-۱، صفحهٔ ۹۶۳

۱. 1 ۳. 0

۵. $-\frac{1}{2}$ (در $z=-1$)، $\frac{1}{2}$ (در $z=1$)

۷. $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{4}$، $-\frac{1}{4}$، $-\frac{1}{4}$ (در $z=1, -1, i, -i$)

۹. -1 (در $z=\pm 2n\pi i$)

۱۱. 1 (در $z=\pm n\pi$)

۱۳. $-3/4$، $3i/4$، $3/4$، $-3i/4$ (در $z=1, i, -1, -i$)

۱۵. -2 (در $z=0$)   ۱۷. $1/17$ (در $z=-1$)

۱۹. $2\pi i$ ۲۱. $2\pi i$

۲۳. $2\pi i$ ۲۵. 0

۲۷. $-\pi i$ ۲۹. $-2\pi i$

بخش ۱۷-۲، صفحهٔ ۹۶۸

۱. $2\pi i$ ۳. 0 ۵. $3\pi i$ ۷. $2\pi i/3$

۹. $-\pi i$ ۱۱. 0 ۱۳. $2\pi i/9$ ۱۵. $-16\pi i/9$

۱۷. $-4i$ ۱۹. $-4i$ ۲۱. $-2\pi i/5$ ۲۳. 0

۲۵. $-۲\pi/۳$ ۲۷. $-\pi \sin\frac{۱}{۲}$ ۲۹. ۰

بخش ۳.۱۷، صفحهٔ ۹۷۱

۱. $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$ ۳. $\frac{\pi}{\sqrt{k^۲-۱}}$

۵. $\frac{\pi}{۲}$ ۷. ۰

۹. $\frac{۸\pi}{۳}$

۱۱. $\cos ۲\theta = \frac{۱}{۲}\left(z^۲ + \frac{۱}{z^۲}\right)$ و

$$\int_۰^{۲\pi} \frac{\cos^۲\theta}{۲۶-۱۰\cos ۲\theta} d\theta = -\frac{۱}{۲۰i}\int_c \frac{(z^۲+۱)^۲}{z\left(z^۲-\frac{۱}{۵}\right)(z^۲-۵)} dz = \frac{\pi}{۲۰}$$

۱۳. π ۱۵. $۲\pi/۳$

۱۷. $۳\pi/۸$ ۱۹. ۰

۲۱. $\pi/۱۲$ ۲۳. $\pi/۲$

۲۵. انتگرالها برای صفرهستند زیرا توابع انتگرالگیری فرد هستند.

بخش ۴.۱۷، صفحهٔ ۹۷۶

۳. π/e ۵. $\pi e^{-۳}/۲$

۷. $\pi e^{-۱/\sqrt{۲}}[\sin(۱/\sqrt{۲})+\cos(۱/\sqrt{۲})]/\sqrt{۲}$

بخش ۱.۱۸، صفحهٔ ۹۸۴

۱. $u(r) = ۱۰۰ \ln r/\ln ۵ = ۶۲٫۱۳ \ln r$

۳. $u(r) = ۱۰۰(\ln r + \ln ۵)/\ln ۱۰$

۵. $(x-۱/۲c)^۲ + y^۲ = ۱/۴c^۲$

۷. $u = c \operatorname{Re} \ln(z^۲ - a^۲) = c \ln|z^۲ - a^۲|$

۹. $z = x + iy = \cosh(u+iv) = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v$ ،

۱ $x^2/\cosh^2 u + y^2/\sinh^2 u =$ ؛ خطوط هم‌پتانسیل ثابت $= u$ بیضی‌های هم‌کانون هستند.

بخش ۲.۱۸، صفحهٔ ۹۸۸

۱. $V = V_1 = K$ ، ثابت $= Ky$ ، ثابت $= V$

۵. جریان موازی درجهت y منفی، $V = -i$

۷. جریان موازی درجهت $y = -x$ ، $V = 1 - i$

۹. $V = -6xy + 3i(y^2 - x^2)$ ، $V_2 = 0$ روی $y = x$ و $y = -x$

۱۳. $F(z) = -[\ln(z-a)]/2\pi$

۱۵. $F(z) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{z+a}{z-a}$. خطوط جریان دوایر هستند.

۱۹. $V = 1 - \bar{z}^{-2} = 0$ در $z = 1$ و $z = -1$

بخش ۳.۱۸، صفحهٔ ۹۹۷

۳. از یکنوا بودن $|e^z| = e^x$ در x استفاده کنید.

بخش ۴.۱۸، صفحهٔ ۱۰۰۱

۳. $u = r\sin\theta$

۵. $u = r^3 \sin 3\theta$

۷. $u = 3r\sin\theta - r^3\sin 3\theta$

۹. $u = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(r\sin\theta + \frac{r^3}{3}\sin 3\theta + \frac{r^5}{5}\sin 5\theta + \cdots\right)$

۱۱. $u = \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) r\sin\theta - \frac{r^2}{2}\sin 2\theta +$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi}\right) r^3 \sin 3\theta - \frac{r^4}{4}\sin 4\theta + - \cdots$$

بخش ۱.۱۹، صفحهٔ ۱۰۱۰

۱. 0.38181×10^{54}

۳. $|d^* - d| = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \leqslant \beta_1 + \beta_2 = \beta$ ، $a_1^* = 1.1$ ، $a_1 = 1$ ، $a_2 = 1$ ، $a_2^* = 0.9$ می‌دهد $|\varepsilon| = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$

۵. $\frac{a_1^*}{a_2^*} = \frac{a_1 + \varepsilon_1}{a_2 + \varepsilon_2} = \frac{a_1 + \varepsilon_1}{a_2}\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{a_2} + \frac{\varepsilon_2^2}{a_2^2} - + \cdots\right) \approx \frac{a_1}{a_2} + \frac{\varepsilon_1}{a_2} - \frac{\varepsilon_2}{a_2}\cdot\frac{a_1}{a_2}$ ،

$$\left(\frac{a_1^*}{a_2^*}-\frac{a_1}{a_2}\right)\Big/\frac{a_1}{a_2}\approx\frac{\varepsilon_1}{a_1}-\frac{\varepsilon_2}{a_2}$$

۷. $|\varepsilon_r(x_1)| = |\varepsilon_r(x_2)|$ بنا برمسئلهٔ ۵ چون $x_2 = 2/x_1$ و $|\varepsilon_r(x_1)| \leqslant 0.0005/39.95$ چون x_1 گردشده به $4S$ است. از این رو

$$|\varepsilon(x_2)| = |\varepsilon_r(x_2)\cdot x_2| = |\varepsilon_r(x_1)\cdot x_2| \leqslant (0.0005/39.95)\times 0.05006 < 0.000001$$

۱۱. گردکردن یك ۵ درمکان آخر می‌تواند موجب خطاهایی شود زیرا رقمهای دیگری داده نشده‌اند. این خطاها هرگاه جدول با پنج مکان مورد استفاده قرار گیرد بیشتر می‌شود.

۱۳. $2.76065 \leqslant s \leqslant 2.76175$

بخش ۲.۱۹، صفحهٔ ۱۰۱۶

۱. $x_1 = 1.9$ (درست ۱٫۹)

۳. مماس برمنحنی $f(x)$ در $x=1$ محور x را در $x = 1.9$ قطع می‌کند. به‌عنوان مثال x_0 را برابر ۱٫۲ انتخاب کنید.

۵. ۱٫۵۵۷

۷. ۱٫۳ —، ۱٫۴

۱۱. $x_1 = -0.2$، $x_2 = -0.20032$، $x_3 = -0.200323$، ...

۱۳. همگرا به‌ریشهٔ نزدیک به ۰٫۲ —

۱۵. خطاها ۰٫۲۳۶۰۶۸، ۰٫۰۱۳۹۳۲، ۰٫۰۰۰۰۴۳، ۰٫۰۰۰۰۰۰۰

۱۷. $x \geqslant \sqrt{2/(1+2\alpha)}$، $\alpha < 1$.

۱۹. $f(x) = x^k - c$، $x_{n+1} = (1-k^{-1})x_n + k^{-1}cx_n^{1-k}$

۲۱. ۱٫۲۶۰, ۰

۲۵. این موضوع ازقضیهٔ مقدار میانی حساب دیفرانسیل وانتگرال حاصل می‌شود.

بخش ۴.۱۹، صفحهٔ ۱۰۳۳

۳. ۰٫۲۵۷۵۳

۵. (الف) ۰٫۲۵۸۲۷، (ب) ۰٫۲۵۸۲۷

۹. $f(x) \approx 0.566106 + 0.496098x - 0.036022x^2$

۱۱. $8x^2 - 15x + 9$، ۳۶

۱۳. ۲٫۲۱۹۲۱، کمتر از مقدار واقعی (خطا ۱ واحد رقم آخر).

بخش ۵.۱۹ ، صفحهٔ ۱۰۴۱

۷. این موضوع از قضیهٔ ۱ حاصل می‌شود.

۹. $g(x)=-۴x^۳/\pi^۳+۳x/\pi$

بخش ۶.۱۹ ، صفحهٔ ۱۰۴۷

۱۱. ۰ر۲۴۵، $\varepsilon=-$ ۰ر۰۰۵

۱۳. (۰ر۶۹۳۱۵ مقدار واقعی $5D$)۰ر۶۹۳۲۵≈ $\ln ۲$، $M_۴^*=$ ۰ر۷۵، $M_۴=۲۴$،
۰ر۰۰۰۰۱۶ $<\varepsilon_۵<$ ۰ر۰۰۰۰۵۳ یا ۰ر۶۹۲۷۲ $<\ln ۲<$ ۰ر۶۹۳۲۴

۱۵. ۰ر۹۴۶۶(۰ر۹۴۶۱ مقدار واقعی $۴D$)

۱۷. ۰ر۹۴۵۸

۱۹. $\alpha=\beta=\frac{۱}{۲}$، قاعدهٔ ذوزنقه

۲۳. ۰ر۰۸۰، ۰ر۳۲۰، ۰ر۱۷۶، ۰ر۲۵۶. مقدارواقعی: $f'($۰ر۴$)=$ ۰ر۲۵۶

۲۵. ۰ر۵۲، ۰ر۰۸۰، ۰ر۳۰۴، ۰ر۲۵۶ (مقدار واقعی: ۰ر۲۵۶)

بخش ۷.۱۹ ، صفحهٔ ۱۰۵۸

۳. ۰ر۱، ۰ر۲۰۲، ۰ر۳۱۰۰۸، ۰ر۴۲۸۶۹ وغیره. جواب واقع $y=e^{x^۲}\int_۰^x e^{-t^۲}dt$

۱۱. $y=\tan x$

بخش ۹.۱۹، صفحهٔ ۱۰۷۶

۱. $y=۲$ ، $x=۱$

۳. $x=-۲$ ، $y=۳$

۵. $z=۲x$ ، $y=۳x$

۷. $z=۱$ ، $x=y+۱$

۹. $z=۰$ ، $x=۳y+۲$

۱۱. $z=۳y+۱$ ، $x=۲y$ ، $w=۰$

بخش ۱۰.۱۹، صفحهٔ ۱۰۸۲

۳.

۰	۰ر۲۵	۰ر۲۵	۰
۰	۰ر۰۶۲۵	۰ر۰۶۲۵	۰ر۲۵
۰	۰ر۰۶۲۵	۰ر۰۶۲۵	۰ر۲۵
۰	۰ر۰۳۱۲۵	۰ر۰۳۱۲۵	۰ر۱۲۵

۵. مقدار واقعی ۲، ۳، ۲

۷. مقدار واقعی ۲، ۲، ۲

۹. $C=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$، $\lambda_۱=-۱$، $\lambda_۲=\lambda_۳=۰$،

$$I-A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ \end{pmatrix}$$

$\lambda^۳+\lambda/۳+\frac{۲}{۳}=۰$، $\lambda_۱\approx(-۰ر۷۴۸)$ (بنابه‌روش نیوتن)، ازاین‌رو

$|\lambda_۲|=|\lambda_۳|=\sqrt{\frac{۲}{۳}/۰ر۷۴۸}=۰ر۹۴$ زیرا جملهٔ ثابت $\frac{۲}{۳}$ برابر ۱− ضرب در هرسه مقدار ویژه است، و $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ مزدوج هستند:

۱۱. $X_{(۱)}=\begin{pmatrix} ۰ر۴۹ & -۰ر۱ & ۰ر۵۱ \\ ۰ & ۰ر۲ & ۰ \\ -۰ر۵۱ & ۰ر۳ & -۱ر۴۷ \end{pmatrix}$،

$$A^{-۱}=\begin{pmatrix} ۰ر۵ & -۰ر۱ & ۰ر۵ \\ ۰ & ۰ر۲ & ۰ \\ -۰ر۵ & ۰ر۳ & -۱ر۵ \end{pmatrix}$$

بخش ۱۱.۱۹، صفحهٔ ۱۰۸۸

۱. $-۰ر۰۰۰۲$

۵. $AB=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۰ر۱ & ۱ \end{pmatrix}$، $BA=\begin{pmatrix} ۱۱ & ۱۰ \\ -۱۰ & -۹ \end{pmatrix}$

بخش ۱۲.۱۹، صفحهٔ ۱۰۹۲

۱. $y=-۱۰ر۸+۰ر۸۴x$

۳. $y=-۸ر۰۵+۱۲ر۱x$

۵. $y=۲ر۴۴+۰ر۷۷x$

۷. $y=۰ر۱۲۷+۸ر۸۲۲t$. سرعت ۸ر۸۲۲ [متر بر ثانیه]

۹. $n = 5$، $\sum x_i = 13$، $\sum x_i^2 = 57$، $\sum x_i^3 = 289$، $\sum x_i^4 = 1569$، $\sum y_i = 9$، $\sum x_i y_i = 29$، $\sum x_i^2 y_i = 161$،

$$y = 2.825159 - 2.049040x + 0.377398x^2$$

۱۳. $\mathbf{C} = (c_{jk}),\ c_{jk} = x_j^k,\ \mathbf{b}^\top = (b_0 \cdots b_m)$

۱۵. $y^* = a^* + bx$، که درآن $y^* = \ln y$ و $a^* = \ln b_0$

بخش ۱۳.۱۹، صفحهٔ ۱۰۹۷

۱. ۳، ۳—، شعاعها ۴، ۴

۳. $1/\sqrt{2}$، $-1/\sqrt{2}$، شعاعها $1/\sqrt{2}$، $1/\sqrt{2}$

۵. ۹—، ۹—، ۹—، شعاعها ۱ و ۲ و ۱

۷. $\sqrt{50}$

۹. $\sqrt{112}$

۱۱. $\sqrt{247}$

۱۵. $4 \leqslant \lambda \leqslant 6$، $\lambda = 5$

۱۷. قوسهای مستدیر

بخش ۱۴.۱۹، صفحهٔ ۱۱۰۳

۱. $m_0 = 1304$، $m_1 = 6412$، $m_2 = 31736$، $q = 4.9172$،

$$|\varepsilon| \leqslant \sqrt{24.3374 - 24.1788} \approx 0.398$$

۳. $q = 3$، $|\varepsilon| \leqslant \sqrt{5}$

۷. $q = \frac{5}{4}$، $|\varepsilon| \leqslant \frac{\sqrt{11}}{4} \approx 0.83$؛ $q = \frac{14}{9}$، $|\varepsilon| \leqslant \frac{\sqrt{101}}{9} \approx 1.12$

۹. A دارای مقدار ویژه ۱ یا ۱ — (یا هردو) است.

۱۵. $q = m_1/m_0 = -43.787/10.43 = -4.198$، که نتیجه می‌دهد (مقدار واقعی $\lambda_3 = 0$) $\lambda_3 \approx -4.2 + 4.9 = 0.7$. «درحالت کلی» معنی می‌دهدمشروط برآنکه ما شانسی x_0 عمود بریك بردارویژه (مجهول) متناظر با λ_n انتخاب نکنیم.

بخش ۱۵.۱۹، صفحهٔ ۱۱۰۷

۱. (۱) را به‌کار برید.

۳.

$$\mathrm{ci}(x) \sim \sin x\left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} + - \cdots\right) + \cos x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - + \cdots\right)$$

۵. $c(x) \sim -A(x)\sin x^2 + B(x)\cos x^2$ که درآن

$$A(x)=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1\times 3}{4x^5}+\frac{1\times 3\times 5\times 7}{16x^9}-+\cdots\Big),$$

$$B(x)=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2x^3}-\frac{1\times 3\times 5}{8x^7}+-\cdots\Big).$$

۷. $$Q(\alpha, x)\sim x^{\alpha}e^{-x}\Big[\frac{1}{x}-\frac{1-\alpha}{x^2}+-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{x^n}+\cdots\Big]$$

۹. $C(x)\sim \pi^{1/2}2^{-3/2}+A(x)\sin x^2-B(x)\cos x^2$ با A و B مذکور در مسئلهٔ ۵.

۱۳. $y'=x^{-1}(1-\alpha+x)y-1$ و غیره

بخش ۳.۲۰، صفحهٔ ۱۱۲۹

۱. $\bar{x}=3{,}47$ ، $s^2=2{,}98$ ۳. $\bar{x}=3$ ، $s^2=3{,}3$ ۵. $0{,}02$

۷. ۳۵۰، ۳۸۰، ۳۰ ۹. ۱۰۰۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰

۱۵. $\bar{x}=99{,}2$ ، $s^2=234{,}7$ ؛ گروه‌بندی شده: $\bar{x}=99{,}4$ ، $s^2=254{,}7$

بخش ۴.۲۰، صفحهٔ ۱۱۳۴

۳. فضای تمام سه تاییهای مرتب اعداد صحیح نامنفی.

۵. $A\cup B$ فقط‌وفقط وقتی روی می‌دهد که $A\cap B$ یا $A\cap B^C$ یا $A^C\cap B$ روی دهد. این سه پیش‌آمد دوبدو ناسازگارند. فرض می‌کنیم n_1، n_2، n_3، فراوانیهای مطلق‌مربوط به‌نمونه باشند. آنگاه $f(A)=(n_1+n_2)/n$، $f(B)=(n_1+n_3)/n$، $f(A\cap B)=n_1/n$ ، $f(A\cup B)=(n_1+n_2+n_3)/n$. باتوجه به این، (۱) حاصل می‌شود.

بخش ۵.۲۰، صفحهٔ ۱۱۴۰

۱. $\frac{31}{32}$

۳. (الف) $0{,}9^3=72{,}9\%$. (ب) $\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}\times\frac{88}{98}=72{,}65\%$

۵. (الف) ۲۴٫۷۵٪، (ب) ۵۰٫۵٪ (ج) ۲۴٫۷۵٪، (د) ۶٫۰۶٪

۷. ۱۰٫۷٪

۹. $P(E_B|(E_A)=P(E_A\cap E_B)/P(E_A)=۰ر۰۲/۰ر۱۰=۲۰\%$

۱۱. $۰ر۰۴/۰ر۰۹=۰ر۴۴$

۱۵. $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=B\cup(A\cap B^C)$ و اصل موضوع ۳ نتیجه می‌دهد
$P(A)=P(B)+P(A\cap B^C)\geqslant P(B)$ زیرا $P(A\cap B^C)\geqslant ۰$

بخش ۶.۲۰، صفحهٔ ۱۱۴۶

۳. $\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$ ۵. $\binom{۱۰۰}{۳}=۱۶۱۷۰۰$ ۷. ۱۵، ۱۵

۹. روش اثبات مثل قضیهٔ ۱ است، ولی به‌جای پر کردن n مکان هم‌اکنون ما باید k مکان را پر کنیم. هرگاه تکرار مجاز باشد، n عضو برای پر کردن هریك از k مکان داریم.

۱۱. ۲۳ر۵، ۰ر۵، ۲٪، ۳۹۹۰۲، ۴۰۰، ۱٪

۱۵. b^r دارای ضریب $\binom{p+q}{r}$ در طرف راست و $\sum\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ در طرف چپ است.

بخش ۷.۲۰، صفحهٔ ۱۱۵۲

۵. $k=۱/۴۰۰۰$،

$$F(x)=\begin{cases}۰ & x<۲۰۰۰\\ x/۴۰۰۰-۰ر۵ & ۲۰۰۰\leqslant x<۶۰۰۰\\ ۱ & x\geqslant ۶۰۰۰\end{cases}$$

۷. $f(۳)=\frac{۱}{۲۱۶}$، $f(۴)=\frac{۳}{۲۱۶}$، و غیره.

۱۱. $P(x>۱۲۰۰)=\int_{۱٫۲}^{۲}۶[۰ر۲۵-(x-۱ر۵)^۲]dx=۰ر۸۹۶$،
جواب $۰ر۸۹۶^۳=۷۲\%$

۱۳. $X>b$، $X\geqslant b$، $X<c$، $X\leqslant c$، $X<b$ یا $X>c$، $X\leqslant b$ یا $X>c$.

بخش ۸.۲۰، صفحهٔ ۱۱۵۹

۱. $\mu=\int_{-\infty}^{c}tf(t)\,dt+\int_{c}^{\infty}tf(t)\,dt$

$$= -\int_{\infty}^{\circ} (c-x) f(c-x)\, dx + \int_{\circ}^{\infty} (c+x) f(c+x)\, dx$$
$$= ۲c \int_{\circ}^{\infty} f(c+x)\, dx = c$$

برای یك توزیع گسسته اثبات به‌همین نحو است.

۵. $(x-۴/۳)/\sqrt{۲/۹}$

۷. در (۵) و (۶) قراردهید $c_۱ = ۱/\sigma$ و $c_۲ = -\mu/\sigma$

۹. $k = ۷۵۰$ ، $\mu = ۱$ ، $\sigma^۲ = ۰٫۰۰۲$

۱۱. $\mu = ۱/۲$ ، $\sigma^۲ = ۱/۲۰$

۱۵. $E(X-\mu) = E(X) - \mu E(۱) = \mu - \mu = ۰$

۱۷. $E(X^k) = ۲/(k+۲)$ ، $\sigma^۲ = ۱/۱۸$

۲۱. $E(X^k) = ۱/(k+۱)$

۲۳. با انتگرالگیری به‌روش جزء بجزء $\sigma^۲ = ۲$ ، $\gamma = ۴/۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲}$

بخش ۹.۲۰ ، صفحهٔ ۱۱۶۶

۱. $f(x) = \binom{n}{x} ۰٫۵^n,\ \mu = ۰٫۵n,\ \sigma^۲ = ۰٫۲۵n$

۳. $\frac{۵}{۲۵۶}$ ، یعنی ، درحدود ۲٪ **۵.** $۰٫۹۹^{۱۰} \approx ۹۰٫۴\%$

۷. $۱ - e^{-۰/۲} = ۱ - ۰٫۸۱۸۷ = ۰٫۱۸۱۳$

(واقعی $p = ۰٫۰۰۲$ ، $۱ - ۰٫۹۹۸^{۱۰۰} = ۱ - ۰٫۸۱۸۶ = ۰٫۱۸۱۴$)

۹. $f(x) = ۰٫۵^x e^{-۰/۵}/x!$ ، $f(۰) + f(۱) = e^{-۰/۵}(۱٫۰ + ۰٫۵) = ۰٫۹۱$
جواب ۹٪

۱۱. ۰٫۲۶۵ (ر. ك. جدول A۷ ضمیمهٔ ۴)

۱۳. هرگاه یك بسته از $N = ۱۰۰$ کالا درست شامل $M = ۱۰$ کالای معیوب باشد، آنگاه احتمال آنکه ۱۰ کالای کشیده شده که بدون جایگذاری انتخاب می‌شوند دارای هیچ‌یك ازکالاهای معیوب نباشد عبارت است

$$f(۰)=\binom{۱۰}{۰}\binom{۹۰}{۱۰}\quad\binom{۱۰۰}{۱۰}=\frac{۹۰\times ۸۹\times\cdots\times ۸۱}{۱۰۰\times ۹۹\times\cdots\times ۹۱}=۳۳\%$$

جواب ٪۶۷، بنابراین این روش نامناسب است.

۱۵. فرض می‌کنیم X تعداد پیچهای معیوب دریك نمونهٔ n تایی باشد. هرگاه $X\geqslant ۱$ آنگاه فرآیند متوقف می‌شود، کارخانه‌دار می‌خواهد n طوری باشد که به ازای $p=۰٫۱$، $P(X\geqslant ۱)\approx ۰٫۹۵$، بنابراین $P(X=۰)=q^n=۰٫۹^n\approx ۰٫۰۵$، و $n\ln ۰٫۹\approx \ln ۰٫۰۵$، $n=۲۸٫۴$.
جواب $n=۲۸$ یا $n=۲۹$.

۱۷. $$f(x_۱,x_۲)=\frac{۲۰!}{x_۱!x_۲!(۲۰-x_۱-x_۲)!}\times ۰٫۰۳^{x_۱}۰٫۰۵^{x_۲}\times ۰٫۹۲^{۲۰-x_۱-x_۲}$$

۱۹. (الف) ۰، (ب) ۱/۲، (ج) ۳/۴، (د) ۳/۸، (ه) ۵/۸

۲۳. $G(۰)=۱$، $G'(t)=e^{-\mu}\exp[\mu e^t]=\mu e^t G(t)$، $G''(t)=\mu e^t[G(t)+G'(t)]$، $E(X^۲)=G''(۰)=\mu+\mu^۲$، $\sigma^۲=E(X^۲)-\mu^۲=\mu$

۲۵. از $x\binom{M}{x}=M\binom{M-۱}{x-۱}$ و (۱۴) بخش ۶.۲۰ با $p=M-۱$، $k=x-۱$، $q=N-M$، $r-k=n-x$ استفاده کنید.

بخش ۱۰.۲۰، صفحهٔ ۱۱۷۳

۳. ۰٫۱۵۸۷، ۰٫۵، ۰٫۶۹۱۵، ۰٫۶۲۴۷

۵. $\Phi\left(\frac{۰٫۰۳}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-۰٫۰۳}{\sigma}\right)=۹۹\%$، $۰٫۰۳/\sigma=۲٫۵۷۶$، $\sigma=۰٫۰۱۲$

۷. درحدود ۱۶۰

۹. $$\Phi\left(\frac{۴۰۴۰-۲۰۲۰+۰٫۵}{\sqrt{۱۰۱۰}}\right)-\Phi\left(\frac{۲۰۴۸-۲۰۲۰-۰٫۵}{\sqrt{۱۰۱۰}}\right)=۱۹٫۳\%$$

۱۱. ۸۷۶ کیلوگرم

۱۳. ۱۳٫۱٪

۱۵. $$P=\sum_{x=۰}^{۱۰}\binom{۱۰۰۰}{x}۰٫۰۱^x\times ۰٫۹۹^{۱۰۰۰-x}$$

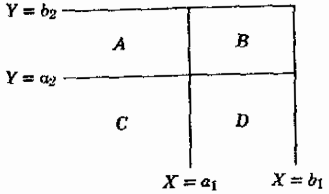
$$\approx \Phi\left(\frac{10-10+0.5}{\sqrt{9.9}}\right)-\Phi\left(\frac{0-10-0.5}{\sqrt{9.9}}\right)=0.564$$
(واقعی ۰٫۵۸۳)

۱۷. $$\Phi^2(\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}e^{-v^2/2}du\,dv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}r\,dr\,d\theta=1$$
$$(u=r\cos\theta,\ v=r\sin\theta,\ du\,dv=r\,dr\,d\theta)$$

۱۹. قراردهید $x^*=c_1x+c_2$، آنگاه $(x-\mu)/\sigma=(x^*-\mu^*)/\sigma^*$ و، به‌ازای $c_1>0$،
$$F(x^*)=P(x^*\leqslant x^*)=P(X\leqslant x)=\Phi((x-\mu)/\sigma)=\Phi((x^*-\mu^*)/\sigma^*).$$
برای واردکردن مورد $c_1<0$، توجه کنید که $X^*=-X$ نرمال با میانگین $-\mu$ و واریانس σ^2 است چون
$$F(x^*)=P(X^*\leqslant x^*)=P(X\geqslant -x^*)=1-\Phi\left(\frac{-x^*-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x^*+\mu}{\sigma}\right)$$

بخش ۱۱۰۲۰، صفحهٔ ۱۱۸۲

۱. (X, Y) مقداری را در A، B، C یا D (ر. ك. به شکل) با احتمال $F(b_1, b_2)$، مقداری را در A یا C با احتمال $F(a_1$ و $b_2)$، مقداری را در c یا D با احتمال $F(b_1, a_2)$، مقداری را در R با احتمال $F(a_1, a_2)$ اختیار می‌کند، از این‌رو مقداری در B دارای احتمالی برابرطرف راست (۲) است



مسئلهٔ ۱

۵. ۲۰٫۲۰۰، درحدود ۰٫۰۰۷ **۷.** ۵۰٪

۹. (الف) مستقل، (ب) $f_1(x)=0.1e^{-0.1x}$ هرگاه $x>0$ و $f_2(y)=0.1e^{-0.1y}$ هرگاه $y>0$، (ج) ۳۶٫۸٪

۱۱. توزیع درمسئلهٔ ۱۰ و درآزمایش قبل از (۶)

۱۳. $k=۱/\pi$، $f_۱(x)=\frac{۲}{\pi}\sqrt{۱-x^۲}$ ، $f_۲(y)=\frac{۲}{\pi}\sqrt{۱-y^۲}$، ۲۵%

بخش ۱۲.۲۰، صفحهٔ ۱۱۹۲

۱. کالاهای ۳۸، ۶۹، ۰۲، ۴۹، ۲۳، ۵۲، ۷۳، ۲۹، ۰۹، ۰۵

۵. نمائیدهٔ فراوانیها ۱، ۵، ۷، ۶، ۱

بخش ۱۳.۲۰، صفحهٔ ۱۱۹۴

۳. $\hat{\theta}=n/\sum x_j=۱/\bar{x}$

۵. $l=p^k(۱-p)^{n-k}$، k برابر تعداد موفقیتها دریك نمونهٔ nتایی و $\partial \ln l/\partial p=۰$ نتیجه می‌دهد $p=k/n$

بخش ۱۴.۲۰، صفحهٔ ۱۲۰۰

۱. $\mathrm{CONF}\{۱۷٫۸۴\leqslant\mu\leqslant۱۸٫۹۶\}$ ۳. $\mathrm{CONF}\{۱۲٫۲\leqslant\mu\leqslant۱۶٫۶\}$

۵. $\mathrm{CONF}\{۴٫۲۵\leqslant\mu\leqslant۴٫۴۹\}$ ۷. $\mathrm{CONF}\{۰٫۷۲۶\leqslant\mu\leqslant۰٫۷۵۱\}$

۹. $\mathrm{CONF}\{۰٫۱۰۵\leqslant\mu\leqslant۰٫۱۰۷\}$؛ خطا به‌طور تقریب عبارت است از ۰٫۰۰۱ (مقدار واقعی ۰٫۰۰۰۸)

۱۱. $\mathrm{CONF}\{۰٫۰۵\leqslant\sigma^۲\leqslant۱۰\}$

۱۳. $c_۱=(\sqrt{۲۵۳}-۲٫۵۸)^۲/۲=۸۸٫۸$ ، $c_۲=۱۷۰٫۹$،
$\mathrm{CONF}\{۱٫۴۲\leqslant\sigma^۲\leqslant۲٫۷۵$

۱۵. توزیعهای نرمال بامیانگینهای ۱۲ −، ۲۴، ۴۷ و واریانسهای ۲۵ و ۱۰۰ و ۴۰۰

۱۷. $Z=X+Y$ نرمال با میانگین ۱۰۵ و واریانس ۱٫۲۵ است. جواب
$P(۱۰۴\leqslant Z\leqslant۱۰۶)=۶۳\%$

۱۹. $-D_۲$ نرمال با میانگین $-\mu_۲$ و واریانس $\sigma_۲^۲$ است، ر. ك. به قضیهٔ ۱، بخش ۱۰.۲۰ . از این‌رو $D=D_۱-D_۲$ نرمال بامیانگین $\mu=\mu_۱-\mu_۲=۰٫۰۱$ و واریانس $\sigma=\sigma_۱^۲+a_۲^۲=۰٫۰۰۰۲$. یك درپوش یك سوراخ را می‌پوشاند اگرو فقط اگر D دارای مقدارمثبت باشد. جواب

$$P(D>۰)=P(۰<D<\infty)=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{۰-۰٫۰۱}{\sqrt{۰٫۰۰۰۲}}\right)\approx ۷۶\%$$

بخش ۱۵.۲۰، صفحهٔ ۱۲۱۲

۱. $(\alpha=۵\%)$ $t=\sqrt{۷}(۰٫۲۸۶-۰)/۴٫۳۱=۰٫۱۸<c=۱٫۹۴$، فرض رد نمی‌شود.

۳. هرگاه فرض $p=۰٫۵$ درست باشد، $X=$ تعداد شیرها در ۴۰۴۰ آزمایش تقریباً توزیع نرمال؛ $\mu=۲۰۲۰$، $\sigma^{۲}=۱۰۱۰$ (بخش ۱۰.۲۰).
$P(X\leqslant c)=\Phi([c-۲۰۲۰]/\sqrt{۱۰۱۰})=۰٫۹۵$، $c=۲۰۷۲>۲۰۴۸$، فرض رد نمی‌شود.

۵. مقابل $\mu\neq ۵۰۰$، $t=\sqrt{۱۰}(۴۹۶-۵۰۰)/۵=-۲٫۵۲<c=-۲٫۲۶$ (ر. ك. به‌جدول A۱۱، ۹ درجهٔ آزادی). فرض $\mu=۵۰۰$ گرم رد نمی‌شود.

۹. $\bar{x}=۳۷۶٫۳$ ، $\bar{y}=۳۳۵٫۳$ ، $s_{۱}^{۲}=۱۰۰۹٫۳$ ، $s_{۲}^{۲}=۸۶۹٫۳$ ، $t_{۰}=۱٫۶۴<c=۲٫۱۳$ $(\alpha=۵\%$، ۴ درجهٔ آزادی)، فرض رد نمی‌شود.

۱۳. فرض $H_{۰}$: بهتر نیست. مقابل $H_{۱}$: بهتر. تحت $H_{۰}$ متغیر تصادفی $X=$ تعداد موارد ناجور در ۲۰۰ مورد به طور تقریب نرمال با $\mu=np=۱۴۰$، $\sigma^{۲}=npq=۴۲$ است، ومقدار $\alpha=۵\%$ می‌دهد $(c-۱۴۰)/\sqrt{۴۲}=۱٫۶۴۵$، $c=۱۵۰٫۶۵>۱۴۸$، $H_{۰}$ رد نمی‌شود.

۱۵. $v_{۰}=۶۷۹/۲۵۴=۲٫۶۷$. انتخاب می‌کنیم $\alpha=۵\%$. جدول $A_{۱۲}$ ضمیمهٔ ۴ شامل مقداری متناظر با (۵ , ۱۱) درجهٔ آزادی نیست، بلکه مقادیر نزدیك به جدول نشان می‌دهد که آن باید بزرگتر از $v_{۰}$ باشد، از این‌رو فرض رد نمی‌شود.

بخش ۱۶.۲۰، صفحهٔ ۱۲۲۶

۱. $\text{LCL}=۱-۲٫۵۸\times ۰٫۰۲/۲=۰٫۹۷۴$، $\text{UCL}=۱٫۰۲۶$

۳. $۲٫۵۸\sqrt{۰٫۰۲۴}/\sqrt{۲}=۰٫۲۸۳$، $\text{UCL}=۲۷٫۷۸۳$، $\text{LCL}=۲۷٫۲۱۷$

۷. LCL و UCL باسطح معنی‌دار α، که درحالت کل، مساوی ۱٪ نیست، متناظراست.

۹. $\text{CL}=np=۰٫۷$، $\text{UCL}=np+۳\sqrt{np(۱-p)}=۰٫۷+۲٫۴۲\approx ۳$، $\text{LCL}=np-۳\sqrt{np(۱-p)}$

بخش ۱۷.۲۰، صفحهٔ ۱۲۳۲

۱. $(۱-\theta)^{۲}$

۳. ۰٫۹۹۵۳، ۰٫۹۸۲۵، ۰٫۹۳۸۴، و غیره

۵. ۰٫۰۲۸ (در $\theta=۰٫۰۵۴$)

۷. $P(A;\theta)=\binom{N-N\theta}{5}\Big/\binom{N}{5}\approx\theta^{0}(1-\theta)^{5-0}=(1-\theta)^{5}$،

$$\mathrm{AOQ}(\theta)\approx\theta(1-\theta)^{5}$$

۹. $\theta_0\approx 0{,}01$ ،$\theta_1\approx 0{,}37$

۱۱. $\alpha=5\%$ ، $\beta=44\%$ ، که به‌طور غیر رضایت بخشی بزرگ است.

۱۳. ۹ ۱۵. ۰٫۰۳

بخش ۱۸.۲۰، صفحهٔ ۱۲۳۹

۱. $k=2$ ،$n=355+123=478$ ،$e_1=478\times\frac{3}{4}=358{,}5$ ،

$$e_2=478\times\frac{1}{4}=119{,}5$$

$$X_0^{\,2}=\frac{(355{,}0-358{,}5)^2}{358{,}5}+\frac{(123{,}0-119{,}5)^2}{119{,}5}=0{,}137$$

انتخاب می‌کنیم $\alpha=5\%$. آنگاه $c=3{,}84$ (۱ درجهٔ آزادی). ازاین‌رو $X_0^{\,2}<c$، یعنی، اظهارمی‌کنیم که انحراف نسبت درنمونه از نسبت به طورنظری ۱:۳ برحسب نوسان متغیر تصادفی است.

۳. H_0 : تعدادمهره‌های معیوب برای ۳ ماشین یکی هستند. تخمین می‌زنیم $P=15/600=2{,}5\%$. آنگاه

$$X_0^{\,2}=\frac{1}{5}(2^2+3^2+1^2)=2{,}8<3{,}84$$

($\alpha=5\%$ ، ۱ درجهٔ آزادی). جواب - خیر

۵. $a=32$ زیرا وقتی که $a\geqslant 32$ (یا $a\leqslant 18$)

$$X_0^{\,2}=\frac{1}{25}[(a-25)^2+(50-a-25)^2]>c=3{,}84$$

۷. $\bar{x}=99{,}4$ ، $\tilde{\sigma}=15{,}8$ ،
(نقاط انتهایی $-\infty$، ۸۵، ۹۵، ۱۰۵، ۱۱۵، ∞)، $K=5$ ،
$X_0^{\,2}=0{,}7<c=5{,}99(\alpha=5\%)$. فرض رد می‌شود.

۹. با درنظرگرفتن سه سطر آخر با هم، داریم $K-r-1=9$ ، که درآن $r=1$ چون میانگین تخمین زده شده بود. $X_0^{\,2}=12{,}8<c=16{,}92(\alpha=5\%)$. فرض رد نمی‌شود

بخش ۱۹.۲۰، صفحهٔ ۱۲۴۴

۱. $P(X\leqslant ۲)=۰٫۵^{۶}(۱+۶+۱۵)=۳۴\%$. فرض $\mu=۰$ رد نمی‌شود.

۳. $\alpha=۵\%$، $P(X\geqslant ۱۰)=\sum_{x=۱۰}^{۱۳}\binom{۱۳}{x}۰٫۵^{۱۳}=۴٫۶\%<\alpha$. فرض رد می‌شود.

۵. فرض $\mu=۰$. مقابل $\mu>۰$، $\bar{x}=۱٫۵۸$،
$t=\sqrt{۱۰}\times ۱٫۵۸/۱٫۲۳=۴٫۰۶>c=۱٫۸۳(\alpha=۵\%)$. فرض رد می‌شود

۹. ۲ تقدم وتأخر، $n=۸$، $P(T\leqslant ۲)=۰٫۱\%$. فرض را رد می کنیم واظهار می کنیم که تمایل منفی موجود است.

بخش ۲۰.۲۰، صفحهٔ ۱۲۴۸

۱. درحدود ۱۲۰ پا

۳. $y=x-۰٫۱$

۵. $y-۳۸٫۴=۴۵٫۷(x-۰٫۷۰)$

۷. $y-۴۸٫۸۹=-۱٫۳۲(x-۲۰٫۳۳)$

۹. $۲s_{۱}^{۲}=۲$، $۲s_{xy}=۲$، $b=۱$، $۲s_{۲}^{۲}=۲+۲p^{۲}/۳$، $q_{۰}=۲p^{۲}/۳$، $k=۱۲٫۷p/\sqrt{۳}=۷٫۳p(\gamma=۹۵\%)$، $\mathrm{CONF}\{۱-۷٫۳p\leqslant\beta\leqslant ۱+۷٫۳p\}$

ضمیمهٔ ۳: فرمولهایی درمورد توابع خاص

برای جدولهای مقادیرعددی ضمیمهٔ ۴ را ببینید.

تابع نمایی e^x (شکل ۳۹۷)

$$e = ۲٫۷۱۸۲۸\ ۱۸۲۸۴\ ۵۹۰۴۵\ ۲۳۵۳۶\ ۰۲۸۷۴\ ۷۱۳۵۳$$

$$(۱) \qquad e^x e^y = e^{x+y}, \qquad e^x / e^y = e^{x-y}, \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

لگاریتم طبیعی (شکل ۳۹۸)

$$(۲) \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y,\ \ln(x/y) = \ln x - \ln y,\ \ln(x^a) = a \ln x$$

$\ln x$ معکوس e^x است، و $e^{\ln x} = x$، $e^{-\ln x} = e^{\ln(۱/x)} = \frac{۱}{x}$

لگاریتم با پایهٔ ده $\log_{۱۰} x$ یا به‌صورت ساده $\log x$

$$(۳)\ \log x = M \ln x,\ M = \log e = ۰٫۴۳۴۲۹\ ۴۴۸۱۹\ ۰۳۲۵۱\ ۸۲۷۶۵\ ۱۱۲۸۹\ ۱۸۹۱۷$$

$$(۴)\ \ln x = \frac{۱}{M} \log x,$$

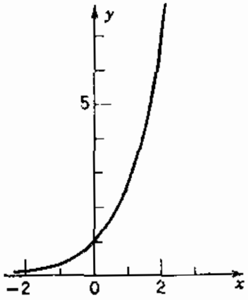
$$\frac{۱}{M} = ۲٫۳۰۲۵۸\ ۵۰۹۲۹\ ۹۴۰۴۵\ ۶۸۴۰۱\ ۷۹۹۱۴\ ۵۴۶۸۴$$

$\log x$ معکوس ۱۰^x است، و $۱۰^{\log x} = x$ و $۱۰^{-\log x} = \frac{۱}{x}$

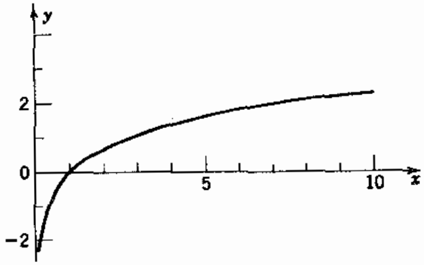
توابع سینوسی وکسینوسی (شکلهای ۳۹۹، ۴۰۰). درحساب دیفرانسیل وانتگرال، زوایا با رادیان اندازه گرفته می‌شوند، به‌طوری که $\sin x$ و $\cos x$ با دورهٔ ۲π هستند.

$\sin x$ فرد است، $\sin(-x)=-\sin x$، و $\cos x$ زوج است، $\cos(-x)=\cos x$

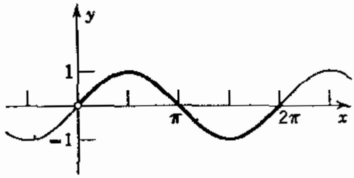
1° = ۰٫۰۱۷۴۵ ۳۲۹۲۵ ۱۹۹۴۳ رادیان



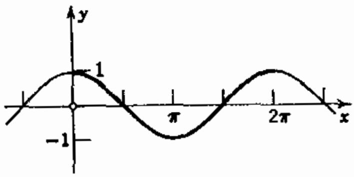
شکل ۳۹۷. تابع نمایی e^x



شکل ۳۹۸. لگاریتم طبیعی $\ln x$



شکل ۳۹۹. $\sin x$



شکل ۴۰۰. $\cos x$

۱ رادیان = ۵۷° ۱۷′ ۴۴٫۸۰۶۲۵″

= ۵۷٫۲۹۵۷۷ ۹۵۱۳۱°

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{۵}$$

$$\begin{cases}\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y\\ \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\\ \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y\end{cases} \tag{۶}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\qquad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x \tag{۷}$$

$$\begin{cases}\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ \cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\end{cases} \tag{۸}$$

$$(۹)\qquad \sin(\pi-x)=\sin x,\qquad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

$$(۱۰)\qquad \cos^۲ x=\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲x),\qquad \sin^۲ x=\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲x)$$

$$(۱۱)\qquad \begin{cases} \sin x\sin y=\frac{۱}{۲}[-\cos(x+y)+\cos(x-y)] \\ \cos x\cos y=\frac{۱}{۲}[\cos(x+y)+\cos(x-y)] \\ \sin x\cos y=\frac{۱}{۲}[\sin(x+y)+\sin(x-y)] \end{cases}$$

$$(۱۲)\qquad \begin{cases} \sin u+\sin v=۲\sin\frac{u+v}{۲}\cos\frac{u-v}{۲} \\ \cos u+\cos v=۲\cos\frac{u+v}{۲}\cos\frac{u-v}{۲} \\ \cos v-\cos u=۲\sin\frac{u+v}{۲}\sin\frac{u-v}{۲} \end{cases}$$

$$(۱۳)\qquad A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^۲+B^۲}\cos(x\pm\delta),\quad \tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\mp\frac{B}{A}$$

$$(۱۴)\qquad A\cos x+B\,\mathrm{ins}\,x=\sqrt{A^۲+B^۲}\sin(x\pm\delta),$$

$$,\ \tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\pm\frac{A}{B}$$

تانژانت، کوتانژانت، سکانت، کسکانت (شکلهای ۴۰۱ و ۴۰۲)

$$(۱۵)\qquad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x=\frac{۱}{\cos x},\quad \csc x=\frac{۱}{\sin x}$$

$$(۱۶)\qquad \tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y},\quad \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{۱+\tan x\tan y}$$

توابع هذلولی (سینوس هذلولی وغیره ؛ (شکلهای ۴۰۳، ۴۰۴)

$$(۱۷)\qquad \sinh x=\frac{۱}{۲}(e^x-e^{-x}),\qquad \cosh x=\frac{۱}{۲}(e^x+e^{-x})$$

(۱۸) $$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x} ، \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(۱۹) $$\cosh x-\sinh x=e^{-x}, \cosh x+\sinh x=e^{x}$$

(۲۰) $$\cosh^{۲} x-\sinh^{۲} x=۱$$

(۲۱) $$\cosh^{۲} x=\frac{۱}{۲}(\cosh ۲x+۱) ، \sinh^{۲} x=\frac{۱}{۲}(\cosh ۲x-۱)$$

(۲۲) $$\begin{cases}\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y\\ \cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y\end{cases}$$

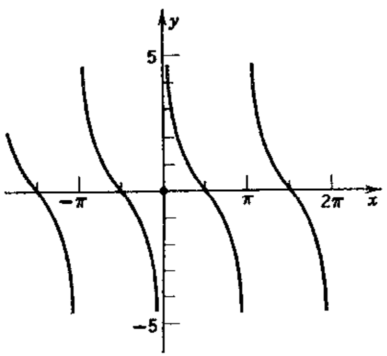
(۲۳) $$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{۱\pm\tanh x\tanh y}$$

تابع گاما (ر. ک. شکل ۴۰۵ وجدول A۳ ضمیمهٔ ۴). تابع گاما $\Gamma(\alpha)$ بافرمول

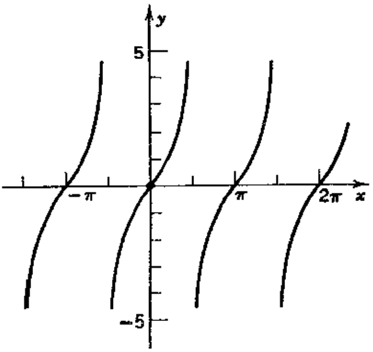
$$\Gamma(\alpha)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-۱}dt \qquad (\alpha>\circ)$$

تعریف می‌شود، ووقتی دارای معنی است که $\alpha>\circ$، یا اگر α را مختلط در نظر بگیریم، αهایی مورد نظرما است که‌قسمت حقیقی‌شان مثبت‌است. انتگرالگیری به روش جزء‌به‌جزء رابطهٔ تابعی مهم تابع‌گاما را به‌صورت زیرنتیجه می‌دهد.

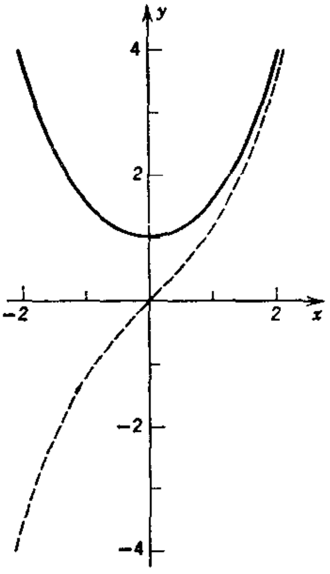
(۲۵) $$\Gamma(\alpha+۱)=\alpha\Gamma(\alpha)$$



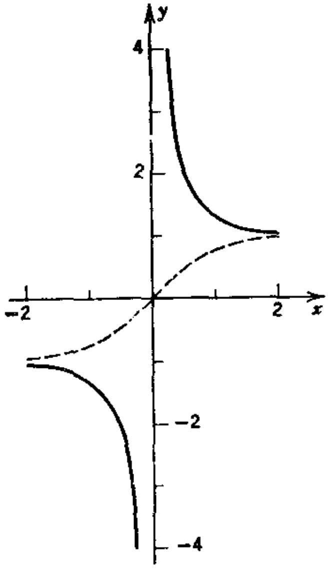
شکل ۴۰۲ $\cot x$



شکل ۴۰۱ $\tan x$



شکل ۴۰۳. $\sinh x$ (خط چین) و $\cosh x$



شکل ۴۰۴ $\tanh x$ (خطچین) و $\coth x$

بنا به (۲۴) به سادگی نتیجه می‌شود $\Gamma(1) = 1$؛ ازاین‌رو هرگاه α عدد صحیح مثبتی، مثل k، باشد، آنگاه باتکرار رابطهٔ (۲۵) به‌دست می‌آوریم

$$\Gamma(k+1)=k! \qquad (K=0,\ 1,\ \cdots) \tag{۲۶}$$

این موضوع نشان می‌دهد که تابع گاما را می‌توان به صورت تعمیمی از تابع فاکتوریل مقدماتی تصویر نمود. [بعضی‌اوقات نماد $(\alpha-1)!$ را برای $\Gamma(\alpha)$، حتی برای مقادیر غیرصحیح α. مورداستفاده قرارمی‌دهند، وتابع Γ را **تابع فاکتوریل** نیز می‌نامند.]

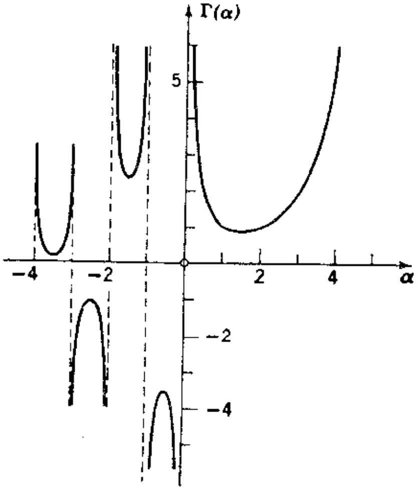
باکاربرد مکرر (۲۵) به‌دست می‌آوریم

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}=\cdots=\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)},$$

وما می‌توانیم از رابطهٔ

$$(۲۷) \qquad \Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k+۱)}{\alpha(\alpha+۱)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha\neq ۰,\ -۱,\ -۲,\ \cdots)$$

برای تعریف تابع گاما به‌ازای αی منفی $(\ldots ,۲- ,۱- \neq)$ باانتخاب k به عنوان کوچکترین عدد صحیحی که نامساوی $\alpha+k+۱>۰$ برقرار باشد، مورداستفاده قرار دهیم. این موضوع به علاوه (۱)، تعریفی برای $\Gamma(\alpha)$ به‌ازای همهٔ مقادیر αی غیرصفر یا غیرمنفی می‌باشد (شکل ۴۰۵).



شکل ۴۰۵ تابع گاما

می‌توان نشان داد که تابع گاما را می‌توان به صورت حد یك حاصلضرب نوشت، یعنی، با فرمول زیرنمایش داد

$$(۲۸) \qquad \Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+۱)(\alpha+۲)\cdots(\alpha+n)} \quad (\alpha\neq ۰,\ -۱,\ \cdots)$$

باتوجه به (۲۷) یا (۲۸) مشاهده می‌کنیم که، به‌ازای عدد مختلط α، تابع $\Gamma(\alpha)$ یك تابع هلوریخت است که دارای قطبهای ساده در $\alpha=۰,\ -۱,\ -۲,\ \ldots$ است. یك تابع تقریب برای تابع گاما به‌ازای αهای مثبت و بزرگ ازروی فرمول استرلینگ به‌دست می‌آید

$$(۲۹) \qquad \Gamma(\alpha+۱)\approx\sqrt{۲\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}$$

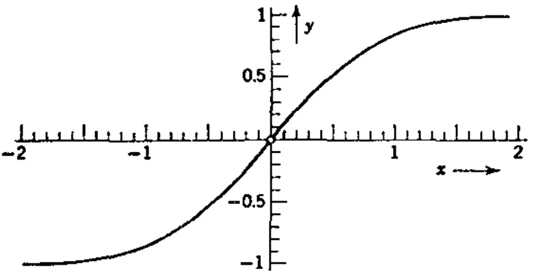
که درآن e پایهٔ لگاریتم طبیعی است. در پایان مقدار خاص زیررا متذکر می‌شویم

(۳۰)
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

توابع گامای غیرکامل

(۳۱)
$$Q(\alpha,\ x)=\int_{x}^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt,\quad P(\alpha,\ x)=\int_{0}^{x} e^{-t}t^{\alpha-1}dt,\quad (\alpha>0)$$

(۳۲)
$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,\ x)+Q(\alpha,\ x)$$



شکل ۴۰۶ تابع خطا

تابع بتا

(۳۳)
$$B(x,\ y)=\int_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (x)>0,\ y>0).$$

نمایش برحسب توابع گاما

(۳۴)
$$B(x,\ y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

تابع خطا (ر. ك. به‌شکل ۴۰۶ وجدول A۵ ضمیمهٔ ۴)

(۳۵)
$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}dt$$

(۳۶)
$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!\times 3}+\frac{x^5}{2!\times 5}-\frac{x^7}{3!\times 7}+-\cdots\right)$$

$\operatorname{erf}(\infty)=1$، تابع خطای مکمل

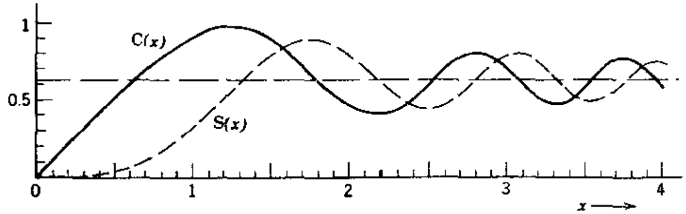
(۳۷)
$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

انتگرالهای فرنل[1] (شکل ۴۰۷)

---

۱. اوگوستن فرنل (Augustin Fresnel)، ۱۸۲۷-۱۷۸۸، فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی
برای جدولها مراجع [A۶]، [A۸] را ببینید؛ همچنین ر.ك. به
Acta mathematica, Vol 85, (1951) , P. 180, Vol 89, (1953), P. 130

$$C(x)=\int_{\circ}^{x}\cos(t^{۲})dt\ ,\qquad S(x)=\int_{\circ}^{x}\sin(t^{۲})dt \tag{۳۸}$$



شکل ۴۰۷ انتگرالهای فرنل

$C(\infty)=\sqrt{\pi/۸}$، $S(\infty)=\sqrt{\pi/۸}$، توابع مکمل

$$c(x)=\sqrt{\frac{\pi}{۸}}-C(x)=\int_{x}^{\infty}\cos(t^{۲})dt$$
$$s(x)=\sqrt{\frac{\pi}{۸}}-S(x)=\int_{x}^{\infty}\sin(t^{۲})dt \tag{۳۹}$$

انتگرال سینوسی (ر. ك. شکل ۴۵۸ و جدول A۵ ضمیمهٔ ۴)

$$\mathrm{si}(x)=\int_{\infty}^{x}\frac{\sin t}{t}dt \tag{۴۰}$$

$\mathrm{si}(\infty)=\pi/۲$، تابع مکمل

$$\mathrm{si}(x)=\frac{\pi}{۲}-\mathrm{si}(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt \tag{۴۱}$$

انتگرال کسینوسی (ر. ك. جدول A۵ ضمیمهٔ ۴)

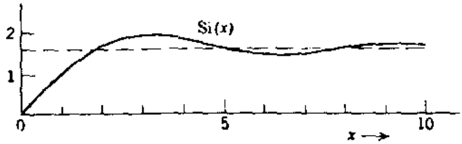
$$\mathrm{ci}(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt \qquad (x>\circ) \tag{۴۲}$$

انتگرال نمایی (ر. ك. بخش ۱۵.۱۹)

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \qquad (x>\circ) \tag{۴۳}$$

انتگرال لگاریتمی

$$\mathrm{Li}\,(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{\ln t} \qquad (۴۴)$$



شکل ۴۰۸. انتگرال سینوسی

ضمیمهٔ ۴ جدولها

جدولهای تبدیل لاپلاس دربخش ۸.۵ آمده‌اند.

جدول A1

برخی توابع مقدماتی

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x	$\sinh x$	$\cosh x$
0.0	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
0.1	0.09983	0.99500	0.10033	1.10517	0.10017	1.00500
0.2	0.19867	0.98007	0.20271	1.22140	0.20134	1.02007
0.3	0.29552	0.95534	0.30934	1.34986	0.30452	1.04534
0.4	0.38942	0.92106	0.42279	1.49182	0.41075	1.08107
0.5	0.47943	0.87758	0.54630	1.64872	0.52110	1.12763
0.6	0.56464	0.82534	0.68414	1.82212	0.63665	1.18547
0.7	0.64422	0.76484	0.84229	2.01375	0.75858	1.25517
0.8	0.71736	0.69671	1.02964	2.22554	0.88811	1.33743
0.9	0.78333	0.62161	1.26016	2.45960	1.02652	1.43309
1.0	0.84147	0.54030	1.55741	2.71828	1.17520	1.54308
1.1	0.89121	0.45360	1.96476	3.00417	1.33565	1.66852
1.2	0.93204	0.36236	2.57215	3.32012	1.50946	1.81066
1.3	0.96356	0.26750	3.60210	3.66930	1.69838	1.97091
1.4	0.98545	0.16997	5.79788	4.05520	1.90430	2.15090
1.5	0.99749	0.07074	14.10142	4.48169	2.12928	2.35241
1.6	0.99957	−0.02920	−34.23253	4.95303	2.37557	2.57746
1.7	0.99166	−0.12884	−7.69660	5.47395	2.64563	2.82832
1.8	0.97385	−0.22720	−4.28626	6.04965	2.94217	3.10747
1.9	0.94630	−0.32329	−2.92710	6.68589	3.26816	3.41773
2.0	0.90930	−0.41615	−2.18504	7.38906	3.62686	3.76220

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
1.0	0.00000	2.0	0.69315	3.0	1.09861	5	1.60944
1.1	0.09531	2.1	0.74194	3.1	1.13140	7	1.94591
1.2	0.18232	2.2	0.78846	3.2	1.16315	11	2.39790
1.3	0.26236	2.3	0.83291	3.3	1.19392	13	2.56495
1.4	0.33647	2.4	0.87547	3.4	1.22378	17	2.83321
1.5	0.40547	2.5	0.91629	3.5	1.25276	19	2.94444
1.6	0.47000	2.6	0.95551	3.6	1.28093	23	3.13549
1.7	0.53063	2.7	0.99325	3.7	1.30833	29	3.36730
1.8	0.58779	2.8	1.02962	3.8	1.33500	31	3.43399
1.9	0.64185	2.9	1.06471	3.9	1.36098	37	3.61092

جدول A۱ (ادامه)

$\frac{y}{x}$	$\arctan\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\arctan\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\arctan\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\arctan\frac{y}{x}$
0.0	0.00000	1.0	0.78540	2.0	1.10715	4.0	1.32582
0.1	0.09967	1.1	0.83298	2.2	1.14417	4.5	1.35213
0.2	0.19740	1.2	0.87606	2.4	1.17601	5.0	1.37340
0.3	0.29146	1.3	0.91510	2.6	1.20362	5.5	1.39094
0.4	0.38051	1.4	0.95055	2.8	1.22777	6.0	1.40565
0.5	0.46365	1.5	0.98279	3.0	1.24905	7.0	1.42890
0.6	0.54042	1.6	1.01220	3.2	1.26791	8.0	1.44644
0.7	0.61073	1.7	1.03907	3.4	1.28474	9.0	1.46014
0.8	0.67474	1.8	1.06370	3.6	1.29985	10.0	1.47113
0.9	0.73282	1.9	1.08632	3.8	1.31347	11.0	1.48014

جدول A۲
توابع بسل

برای جدولهای بزرگتر مرجع [A۸] ضمیمهٔ ۱ را ببینید.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	3.0	−0.2601	0.3391	6.0	0.1506	−0.2767
0.1	0.9975	0.0499	3.1	−0.2921	0.3009	6.1	0.1773	−0.2559
0.2	0.9900	0.0995	3.2	−0.3202	0.2613	6.2	0.2017	−0.2329
0.3	0.9776	0.1483	3.3	−0.3443	0.2207	6.3	0.2238	−0.2081
0.4	0.9604	0.1960	3.4	−0.3643	0.1792	6.4	0.2433	−0.1816
0.5	0.9385	0.2423	3.5	−0.3801	0.1374	6.5	0.2601	−0.1538
0.6	0.9120	0.2867	3.6	−0.3918	0.0955	6.6	0.2740	−0.1250
0.7	0.8812	0.3290	3.7	−0.3992	0.0538	6.7	0.2851	−0.0953
0.8	0.8463	0.3688	3.8	−0.4026	0.0128	6.8	0.2931	−0.0652
0.9	0.8075	0.4059	3.9	−0.4018	−0.0272	6.9	0.2981	−0.0349
1.0	0.7652	0.4401	4.0	−0.3971	−0.0660	7.0	0.3001	−0.0047
1.1	0.7196	0.4709	4.1	−0.3887	−0.1033	7.1	0.2991	0.0252
1.2	0.6711	0.4983	4.2	−0.3766	−0.1386	7.2	0.2951	0.0543
1.3	0.6201	0.5220	4.3	−0.3610	−0.1719	7.3	0.2882	0.0826
1.4	0.5669	0.5419	4.4	−0.3423	−0.2028	7.4	0.2786	0.1096
1.5	0.5118	0.5579	4.5	−0.3205	−0.2311	7.5	0.2663	0.1352
1.6	0.4554	0.5699	4.6	−0.2961	−0.2566	7.6	0.2516	0.1592
1.7	0.3980	0.5778	4.7	−0.2693	−0.2791	7.7	0.2346	0.1813
1.8	0.3400	0.5815	4.8	−0.2404	−0.2985	7.8	0.2154	0.2014
1.9	0.2818	0.5812	4.9	−0.2097	−0.3147	7.9	0.1944	0.2192
2.0	0.2239	0.5767	5.0	−0.1776	−0.3276	8.0	0.1717	0.2346
2.1	0.1666	0.5683	5.1	−0.1443	−0.3371	8.1	0.1475	0.2476
2.2	0.1104	0.5560	5.2	−0.1103	−0.3432	8.2	0.1222	0.2580
2.3	0.0555	0.5399	5.3	−0.0758	−0.3460	8.3	0.0960	0.2657
2.4	0.0025	0.5202	5.4	−0.0412	−0.3453	8.4	0.0692	0.2708
2.5	−0.0484	0.4971	5.5	−0.0068	−0.3414	8.5	0.0419	0.2731
2.6	−0.0968	0.4708	5.6	0.0270	−0.3343	8.6	0.0146	0.2728
2.7	−0.1424	0.4416	5.7	0.0599	−0.3241	8.7	−0.0125	0.2697
2.8	−0.1850	0.4097	5.8	0.0917	−0.3110	8.8	−0.0392	0.2641
2.9	−0.2243	0.3754	5.9	0.1220	−0.2951	8.9	−0.0653	0.2559

$J_0(x) = 0$ for $x \approx 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, \cdots$

$J_1(x) = 0$ for $x \approx 0, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \cdots$

جدول A۲ (ادامه)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5.0	−0.309	0.148
0.5	−0.445	−1.471	3.0	0.377	0.325	5.5	−0.339	−0.024
1.0	0.088	−0.781	3.5	0.189	0.410	6.0	−0.288	−0.175
1.5	0.382	−0.412	4.0	−0.017	0.398	6.5	−0.173	−0.274
2.0	0.510	−0.107	4.5	−0.195	0 301	7.0	−0.026	−0.303

جدول A۳
تابع گاما (ر. ک. (۲۴) ضمیمهٔ ۳)

α	Γ(α)	α	Γ(α)	α	Γ(α)	α	Γ(α)	α	Γ(α)
1.00	1.000 000	1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384
1.02	0.988 844	1.22	0.913 106	1.42	0.886 356	1.62	0.895 924	1.82	0.936 845
1.04	0.978 438	1.24	0.908 521	1.44	0.885 805	1.64	0.898 642	1.84	0.942 612
1.06	0.968 744	1.26	0.904 397	1.46	0.885 604	1.66	0.901 668	1.86	0.948 687
1.08	0.959 725	1.28	0.900 718	1.48	0.885 747	1.68	0.905 001	1.88	0.955 071
1.10	0.951 351	1.30	0.897 471	1.50	0.886 227	1.70	0.908 639	1.90	0.961 766
1.12	0.943 590	1.32	0.894 640	1.52	0.887 039	1.72	0.912 581	1.92	0.968 774
1.14	0.936 416	1.34	0.892 216	1.54	0.888 178	1.74	0.916 826	1.94	0.976 099
1.16	0.929 803	1.36	0.890 185	1.56	0.889 639	1.76	0.921 375	1.96	0.983 743
1.18	0.923 728	1.38	0.888 537	1.58	0.891 420	1.78	0.926 227	1.98	0.991 708
1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384	2.00	1.000 000

جدول A۴
تابع فاکتوریل

n	n!	log (n!)	n	n!	log (n!)	n	n!	log (n!)
1	1	0.000 000	6	720	2.857 332	11	39 916 800	7.601 156
2	2	0.301 030	7	5 040	3.702 431	12	479 001 600	8.680 337
3	6	0.778 151	8	40 320	4.605 521	13	6 227 020 800	9.794 280
4	24	1.380 211	9	362 880	5.559 763	14	87 178 291 200	10.940 408
5	120	2.079 181	10	3 628 800	6.559 763	15	1 307 674 368 000	12.116 500

جدول A۵
تابع خطا، انتگرالهای سینوسی و کسینوسی (ر. ک. (۳۵)، (۴۰)، (۴۲) ضمیمهٔ ۳)

x	erf x	Si(x)	ci(x)	x	erf x	Si(x)	ci(x)
0.0	0.0000	0.0000	∞	2.0	0.9953	1.6054	−0.4230
0.2	0.2227	0.1996	1.0422	2.2	0.9981	1.6876	−0.3751
0.4	0.4284	0.3965	0.3788	2.4	0.9993	1.7525	−0.3173
0.6	0.6039	0.5881	0.0223	2.6	0.9998	1.8004	−0.2533
0.8	0.7421	0.7721	−0.1983	2.8	0.9999	1.8321	−0.1865
1.0	0.8427	0.9461	−0.3374	3.0	1.0000	1.8487	−0.1196
1.2	0.9103	1.1080	−0.4205	3.2	1.0000	1.8514	−0.0553
1.4	0.9523	1.2562	−0.4620	3.4	1.0000	1.8419	0.0045
1.6	0.9763	1.3892	−0.4717	3.6	1.0000	1.8219	0.0580
1.8	0.9891	1.5058	−0.4568	3.8	1.0000	1.7934	0.1038
2.0	0.9953	1.6054	−0.4230	4.0	1.0000	1.7582	0.1410

جدول A۶
توزیع دوجمله‌ای
تابع احتمال $f(x)$ (ر. ک. (۲) بخش ۹.۲۰) و تابع توزیع $F(x)$

n	x	$p=0.1$ $f(x)$	$F(x)$	$p=0.2$ $f(x)$	$F(x)$	$p=0.3$ $f(x)$	$F(x)$	$p=0.4$ $f(x)$	$F(x)$	$p=0.5$ $f(x)$	$F(x)$
		0.		0.		0.		0.		0.	
1	0	9000	0.9000	8000	0.8000	7000	0.7000	6000	0.6000	5000	0.5000
	1	1000	1.0000	2000	1.0000	3000	1.0000	4000	1.0000	5000	1.0000
2	0	8100	0.8100	6400	0.6400	4900	0.4900	3600	0.3600	2500	0.2500
	1	1800	0.9900	3200	0.9600	4200	0.9100	4800	0.8400	5000	0.7500
	2	0100	1.0000	0400	1.0000	0900	1.0000	1600	1.0000	2500	1.0000
3	0	7290	0.7290	5120	0.5120	3430	0.3430	2160	0.2160	1250	0.1250
	1	2430	0.9720	3840	0.8960	4410	0.7840	4320	0.6480	3750	0.5000
	2	0270	0.9990	0960	0.9920	1890	0.9730	2880	0.9360	3750	0.8750
	3	0010	1.0000	0080	1.0000	0270	1.0000	0640	1.0000	1250	1.0000
4	0	6561	0.6561	4096	0.4096	2401	0.2401	1296	0.1296	0625	0.0625
	1	2916	0.9477	4096	0.8192	4116	0.6517	3456	0.4752	2500	0.3125
	2	0486	0.9963	1536	0.9728	2646	0.9163	3456	0.8208	3750	0.6875
	3	0036	0.9999	0256	0.9984	0756	0.9919	1536	0.9744	2500	0.9375
	4	0001	1.0000	0016	1.0000	0081	1.0000	0256	1.0000	0625	1.0000
5	0	5905	0.5905	3277	0.3277	1681	0.1681	0778	0.0778	0313	0.0313
	1	3281	0.9185	4096	0.7373	3602	0.5282	2592	0.3370	1563	0.1875
	2	0729	0.9914	2048	0.9421	3087	0.8369	3456	0.6826	3125	0.5000
	3	0081	0.9995	0512	0.9933	1323	0.9692	2304	0.9130	3125	0.8125
	4	0005	1.0000	0064	0.9997	0284	0.9976	0768	0.9898	1563	0.9688
	5	0000	1.0000	0003	1.0000	0024	1.0000	0102	1.0000	0313	1.0000
6	0	5314	0.5314	2621	0.2621	1176	0.1176	0467	0.0467	0156	0.0156
	1	3543	0.8857	3932	0.6554	3025	0.4202	1866	0.2333	0938	0.1094
	2	0984	0.9841	2458	0.9011	3241	0.7443	3110	0.5443	2344	0.3438
	3	0146	0.9987	0819	0.9830	1852	0.9295	2765	0.8208	3125	0.6563
	4	0012	0.9999	0154	0.9984	0595	0.9891	1382	0.9590	2344	0.8906
	5	0001	1.0000	0015	0.9999	0102	0.9993	0369	0.9959	0938	0.9844
	6	0000	1.0000	0001	1.0000	0007	1.0000	0041	1.0000	0156	1.0000
7	0	4783	0.4783	2097	0.2097	0824	0.0824	0280	0.0280	0078	0.0078
	1	3720	0.8503	3670	0.5767	2471	0.3294	1306	0.1586	0547	0.0625
	2	1240	0.9743	2753	0.8520	3177	0.6471	2613	0.4199	1641	0.2266
	3	0230	0.9973	1147	0.9667	2269	0.8740	2903	0.7102	2734	0.5000
	4	0026	0.9998	0287	0.9953	0972	0.9712	1935	0.9037	2734	0.7734
	5	0002	1.0000	0043	0.9996	0250	0.9962	0774	0.9812	1641	0.9375
	6	0000	1.0000	0004	1.0000	0036	0.9998	0172	0.9984	0547	0.9922
	7	0000	1.0000	0000	1.0000	0002	1.0000	0016	1.0000	0078	1.0000
8	0	4305	0.4305	1678	0.1678	0576	0.0576	0168	0.0168	0039	0.0039
	1	3826	0.8131	3355	0.5033	1977	0.2553	0896	0.1064	0313	0.0352
	2	1488	0.9619	2936	0.7969	2965	0.5518	2090	0.3154	1094	0.1445
	3	0331	0.9950	1468	0.9437	2541	0.8059	2787	0.5941	2188	0.3633
	4	0046	0.9996	0459	0.9896	1361	0.9420	2322	0.8263	2734	0.6367
	5	0004	1.0000	0092	0.9988	0467	0.9887	1239	0.9502	2188	0.8555
	6	0000	1.0000	0011	0.9999	0100	0.9987	0413	0.9915	1094	0.9648
	7	0000	1.0000	0001	1.0000	0012	0.9999	0079	0.9993	0313	0.9961
	8	0000	1.0000	0000	1.0000	0001	1.0000	0007	1.0000	0039	1.0000

جدول A۷
توزیع پواسن
تابع احتمال $f(x)$ (ر.ك. (۵) بخش ۹.۲۰) و تابع توزیع $F(x)$

x	$\mu = 0.1$		$\mu = 0.2$		$\mu = 0.3$		$\mu = 0.4$		$\mu = 0.5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	9048	0.9048	8187	0.8187	7408	0.7408	6703	0.6703	6065	0.6065
1	0905	0.9953	1637	0.9825	2222	0.9631	2681	0.9384	3033	0.9098
2	0045	0.9998	0164	0.9989	0333	0.9964	0536	0.9921	0758	0.9856
3	0002	1.0000	0011	0.9999	0033	0.9997	0072	0.9992	0126	0.9982
4	0000	1.0000	0001	1.0000	0003	1.0000	0007	0.9999	0016	0.9998
5							0001	1.0000	0002	1.0000

x	$\mu = 0.6$		$\mu = 0.7$		$\mu = 0.8$		$\mu = 0.9$		$\mu = 1$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	5488	0.5488	4966	0.4966	4493	0.4493	4066	0.4066	3679	0.3679
1	3293	0.8781	3476	0.8442	3595	0.8088	3659	0.7725	3679	0.7358
2	0988	0.9769	1217	0.9659	1438	0.9526	1647	0.9371	1839	0.9197
3	0198	0.9966	0284	0.9942	0383	0.9909	0494	0.9865	0613	0.9810
4	0030	0.9996	0050	0.9992	0077	0.9986	0111	0.9977	0153	0.9963
5	0004	1.0000	0007	0.9999	0012	0.9998	0020	0.9997	0031	0.9994
6			0001	1.0000	0002	1.0000	0003	1.0000	0005	0.9999
7									0001	1.0000

x	$\mu = 1.5$		$\mu = 2$		$\mu = 3$		$\mu = 4$		$\mu = 5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	2231	0.2231	1353	0.1353	0498	0.0498	0183	0.0183	0067	0.0067
1	3347	0.5578	2707	0.4060	1494	0.1991	0733	0.0916	0337	0.0404
2	2510	0.8088	2707	0.6767	2240	0.4232	1465	0.2381	0842	0.1247
3	1255	0.9344	1804	0.8571	2240	0.6472	1954	0.4335	1404	0.2650
4	0471	0.9814	0902	0.9473	1680	0.8153	1954	0.6288	1755	0.4405
5	0141	0.9955	0361	0.9834	1008	0.9161	1563	0.7851	1755	0.6160
6	0035	0.9991	0120	0.9955	0504	0.9665	1042	0.8893	1462	0.7622
7	0008	0.9998	0034	0.9989	0216	0.9881	0595	0.9489	1044	0.8666
8	0001	1.0000	0009	0.9998	0081	0.9962	0298	0.9786	0653	0.9319
9			0002	1.0000	0027	0.9989	0132	0.9919	0363	0.9682
10					0008	0.9997	0053	0.9972	0181	0.9863
11					0002	0.9999	0019	0.9991	0082	0.9945
12					0001	1.0000	0006	0.9997	0034	0.9980
13							0002	0.9999	0013	0.9993
14							0001	1.0000	0005	0.9998
15									0002	0.9999
16									0000	1.0000

جدول A۸
توزیع نرمال

مقادیر تابع توزیع $\Phi(z)$ (ر. ك. (۴) بخش۱۰.۲۰)

$\Phi(۰)=۰٫۵۰۰۰$ ، $\Phi(-z)=۱-\Phi(z)$

z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)
	0.		0.		0.		0.		0.		0.
0.01	5040	0.51	6950	1.01	8438	1.51	9345	2.01	9778	2.51	9940
0.02	5080	0.52	6985	1.02	8461	1.52	9357	2.02	9783	2.52	9941
0.03	5120	0.53	7019	1.03	8485	1.53	9370	2.03	9788	2.53	9943
0.04	5160	0.54	7054	1.04	8508	1.54	9382	2.04	9793	2.54	9945
0.05	5199	0.55	7088	1.05	8531	1.55	9394	2.05	9798	2.55	9946
0.06	5239	0.56	7123	1.06	8554	1.56	9406	2.06	9803	2.56	9948
0.07	5279	0.57	7157	1.07	8577	1.57	9418	2.07	9808	2.57	9949
0.08	5319	0.58	7190	1.08	8599	1.58	9429	2.08	9812	2.58	9951
0.09	5359	0.59	7224	1.09	8621	1.59	9441	2.09	9817	2.59	9952
0.10	5398	0.60	7257	1.10	8643	1.60	9452	2.10	9821	2.60	9953
0.11	5438	0.61	7291	1.11	8665	1.61	9463	2.11	9826	2.61	9955
0.12	5478	0.62	7324	1.12	8686	1.62	9474	2.12	9830	2.62	9956
0.13	5517	0.63	7357	1.13	8708	1.63	9484	2.13	9834	2.63	9957
0.14	5557	0.64	7389	1.14	8729	1.64	9495	2.14	9838	2.64	9959
0.15	5596	0.65	7422	1.15	8749	1.65	9505	2.15	9842	2.65	9960
0.16	5636	0.66	7454	1.16	8770	1.66	9515	2.16	9846	2.66	9961
0.17	5675	0.67	7486	1.17	8790	1.67	9525	2.17	9850	2.67	9962
0.18	5714	0.68	7517	1.18	8810	1.68	9535	2.18	9854	2.68	9963
0.19	5753	0.69	7549	1.19	8830	1.69	9545	2.19	9857	2.69	9964
0.20	5793	0.70	7580	1.20	8849	1.70	9554	2.20	9861	2.70	9965
0.21	5832	0.71	7611	1.21	8869	1.71	9564	2.21	9864	2.71	9966
0.22	5871	0.72	7642	1.22	8888	1.72	9573	2.22	9868	2.72	9967
0.23	5910	0.73	7673	1.23	8907	1.73	9582	2.23	9871	2.73	9968
0.24	5948	0.74	7704	1.24	8925	1.74	9591	2.24	9875	2.74	9969
0.25	5987	0.75	7734	1.25	8944	1.75	9599	2.25	9878	2.75	9970
0.26	6026	0.76	7764	1.26	8962	1.76	9608	2.26	9881	2.76	9971
0.27	6064	0.77	7794	1.27	8980	1.77	9616	2.27	9884	2.77	9972
0.28	6103	0.78	7823	1.28	8997	1.78	9625	2.28	9887	2.78	9973
0.29	6141	0.79	7852	1.29	9015	1.79	9633	2.29	9890	2.79	9974
0.30	6179	0.80	7881	1.30	9032	1.80	9641	2.30	9893	2.80	9974
0.31	6217	0.81	7910	1.31	9049	1.81	9649	2.31	9896	2.81	9975
0.32	6255	0.82	7939	1.32	9066	1.82	9656	2.32	9898	2.82	9976
0.33	6293	0.83	7967	1.33	9082	1.83	9664	2.33	9901	2.83	9977
0.34	6331	0.84	7995	1.34	9099	1.84	9671	2.34	9904	2.84	9977
0.35	6368	0.85	8023	1.35	9115	1.85	9678	2.35	9906	2.85	9978
0.36	6406	0.86	8051	1.36	9131	1.86	9686	2.36	9909	2.86	9979
0.37	6443	0.87	8078	1.37	9147	1.87	9693	2.37	9911	2.87	9979
0.38	6480	0.88	8106	1.38	9162	1.88	9699	2.38	9913	2.88	9980
0.39	6517	0.89	8133	1.39	9177	1.89	9706	2.39	9916	2.89	9981
0.40	6554	0.90	8159	1.40	9192	1.90	9713	2.40	9918	2.90	9981
0.41	6591	0.91	8186	1.41	9207	1.91	9719	2.41	9920	2.91	9982
0.42	6628	0.92	8212	1.42	9222	1.92	9726	2.42	9922	2.92	9982
0.43	6664	0.93	8238	1.43	9236	1.93	9732	2.43	9925	2.93	9983
0.44	6700	0.94	8264	1.44	9251	1.94	9738	2.44	9927	2.94	9984
0.45	6736	0.95	8289	1.45	9265	1.95	9744	2.45	9929	2.95	9984
0.46	6772	0.96	8315	1.46	9279	1.96	9750	2.46	9931	2.96	9985
0.47	6808	0.97	8340	1.47	9292	1.97	9756	2.47	9932	2.97	9985
0.48	6844	0.98	8365	1.48	9306	1.98	9761	2.48	9934	2.98	9986
0.49	6879	0.99	8389	1.49	9319	1.99	9767	2.49	9936	2.99	9986
0.50	6915	1.00	8413	1.50	9332	2.00	9772	2.50	9938	3.00	9987

جدول A۹
توزیع نرمال

مقادیر z به‌ازای مقادیر $\Phi(z)$ (ر.ك. (۴) بخش ۱۰.۲۰) و $D(z)=\Phi(z)-\Phi(-z)$

مثال: وقتی که $\Phi(z)=۶۱\%$ ، $z=۰٫۲۷۹$ و وقتی که $D(z)=۶۱\%$ ؛ $z=۰٫۸۶۰$

%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
1	−2.326	0.013	41	−0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	−2.054	0.025	42	−0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	−1.881	0.038	43	−0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	−1.751	0.050	44	−0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	−1.645	0.063	45	−0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	−1.555	0.075	46	−0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	−1.476	0.088	47	−0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	−1.405	0.100	48	−0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	−1.341	0.113	49	−0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	−1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	−1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	−1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	−1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	−1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	−1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	−0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	−0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	−0.915	0.228	58	0.202	0.806	98	2.054	2.326
19	−0.878	0.240	59	0.228	0.824	99	2.326	2.576
20	−0.842	0.253	60	0.253	0.842			
21	−0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	−0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	−0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	−0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	−0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	−0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	−0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	−0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	−0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	−0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	−0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	−0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	−0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	−0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	−0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	−0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	−0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	−0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	−0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	−0.253	0.524	80	0.842	1.282			

جدول A۱۰
اعداد تصادفی

تعداد سطرها	تعداد ستونها 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	87331	82442	28104	26432	83640	17323	68764	84728	37995	96106
1	33628	17364	01409	87803	65641	33433	48944	64299	79066	31777
2	54680	13427	72496	16967	16195	96593	55040	53729	62035	66717
3	51199	49794	49407	10774	98140	83891	37195	24066	61140	65144
4	78702	98067	61313	91661	59861	54437	77739	19892	54817	88645
5	55672	16014	24892	13089	00410	81458	76156	28189	40595	21500
6	18880	58497	03862	32368	59320	24807	63392	79793	63043	09425
7	10242	62548	62330	05703	33535	49128	66298	16193	55301	01306
8	54993	17182	94618	23228	83895	73251	68199	64639	83178	70521
9	22686	50885	16006	04041	08077	33065	35237	02502	94755	72062
10	42349	03145	15770	70665	53291	32288	41568	66079	98705	31029
11	18093	09553	39428	75464	71329	86344	80729	40916	18860	51780
12	11535	03924	84252	74795	40193	84597	42497	21918	91384	84721
13	35066	73848	65351	53270	67341	70177	92373	17604	42204	60476
14	57477	22809	73558	96182	96779	01604	25748	59553	64876	94611
15	48647	33850	52956	45410	88212	05120	99391	32276	55961	41775
16	86857	81154	22223	74950	53296	67767	55866	49061	66937	81818
17	20182	36907	94644	99122	09774	29189	27212	79000	50217	71077
18	83687	31231	01133	41432	54542	60204	81618	09586	34481	87683
19	81315	12390	46074	47810	90171	36313	95440	77583	28506	38808
20	87026	52826	58341	76549	04105	66191	12914	55348	07907	06978
21	34301	76733	07251	90524	21931	83695	41340	53581	64582	60210
22	70734	24337	32674	49508	49751	90489	63202	24380	77943	09942
23	94710	31527	73445	32839	68176	53580	85250	53243	03350	00128
24	76462	16987	07775	43162	11777	16810	75158	13894	88945	15539
25	14348	28403	79245	69023	34196	46398	05964	64715	11330	17515
26	74618	89317	30146	25606	94507	98104	04239	44973	37636	88866
27	99442	19200	85406	45358	86253	60638	38858	44964	54103	57287
28	26869	44399	89452	06652	31271	00647	46551	83050	92058	83814
29	80988	08149	50499	98584	28385	63680	44638	91864	96002	87802
30	07511	79047	89289	17774	67194	37362	85684	55505	97809	67056
31	49779	12138	05048	03535	27502	63308	10218	53296	48687	61340
32	47938	55945	24003	19635	17471	65997	85906	98694	56420	78357
33	15604	06626	14360	79542	13512	87595	08542	03800	35443	52823
34	12307	27726	21864	00045	16075	03770	86978	52718	02693	09096
35	02450	28053	66134	99445	91316	25727	89399	85272	67148	78358
36	57623	54382	35236	89244	27245	90500	75430	96762	71968	65838
37	91762	78849	93105	40481	99431	03304	21079	86459	21287	76566
38	87373	31137	31128	67050	34309	44914	80711	61738	61498	24288
39	67094	41485	54149	86088	10192	21174	39948	67268	29938	32476
40	94456	66747	76922	87627	71834	57688	04878	78348	68970	60048
41	68359	75292	27710	86889	81678	79798	58360	39175	75667	65782
42	52393	31404	32584	06837	79762	13168	76055	54833	22841	98889
43	59565	91254	11847	20672	37625	41454	86861	55824	79793	74575
44	48185	11066	20162	38230	16043	48409	47421	21195	98008	57305
45	19230	12187	86659	12971	52204	76546	63272	19312	81662	96557
46	84327	21942	81727	68735	89190	58491	55329	96875	19465	89687
47	77430	71210	00591	50124	12030	50280	12358	76174	48353	09682
48	12462	19108	70512	53926	25595	97085	03833	59806	12351	64253
49	11684	06644	57816	10078	45021	47751	38285	73520	08434	65627

جدول A۱۰ (ادامه)

تعداد ستونها	تعداد سطرها									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	12896	36576	68686	08462	65652	76571	70891	09007	04581	01684
51	59090	05111	27587	90349	30789	50304	70650	06646	70126	15284
52	42486	67483	65282	19037	80588	73076	41820	46651	40442	40718
53	88662	03928	03249	85910	97533	88643	29829	21557	47328	36724
54	69403	03626	92678	53460	15465	83516	54012	80509	55976	46115
55	56434	70543	38696	98502	32092	95505	62091	39549	30117	98209
56	58227	62694	42837	29183	11393	68463	25150	86338	95620	39836
57	41272	94927	15413	40505	33123	63218	72940	98349	57249	40170
58	36819	01162	30425	15546	16065	68459	35776	64276	92868	07372
59	31700	66711	26115	55755	33584	18091	38709	57276	74660	90392
60	69855	63699	36839	90531	97125	87875	62824	03889	12538	24740
61	44322	17569	45439	41455	34324	90902	07978	26268	04279	76816
62	62226	36661	87011	66267	78777	78044	40819	49496	39814	73867
63	27284	19737	98741	72531	52741	26699	98755	19657	08665	16818
64	88341	21652	94743	77268	79525	44769	66583	30621	90534	62050
65	53266	18783	51903	56711	38060	69513	61963	80470	88018	86510
66	50527	49330	24839	42529	03944	95219	88724	37247	84166	23023
67	15655	07852	77206	35944	71446	30573	19405	57824	23576	23301
68	62057	22206	03314	83465	57466	10465	19891	32308	01900	67484
69	41769	56091	19892	96253	92808	45785	52774	49674	68103	65032
70	25993	72416	44473	41299	93095	17338	69802	98548	02429	85238
71	22842	57871	04470	37373	34516	04042	04078	35336	34393	97573
72	55704	31982	05234	22664	22181	40358	28089	15790	33340	18852
73	94258	18706	09437	96041	90052	80862	20420	24323	11635	91677
74	74145	20453	29657	98868	56695	53483	87449	35060	98942	62697
75	88881	12673	73961	89884	73247	97670	69570	88888	58560	72580
76	01508	56780	52223	35632	73347	71317	46541	88023	36656	76332
77	92069	43000	23233	06058	82527	25250	27555	20426	60361	63525
78	53366	35249	02117	68620	39388	69795	73215	01846	16983	78560
79	88057	54097	49511	74867	32192	90071	04147	46094	63519	07199
80	85492	82238	02668	91854	86149	28590	77853	81035	45561	16032
81	39453	62123	69611	53017	34964	09786	24614	49514	01056	18700
82	82627	98111	93870	56969	69566	62662	07353	84838	14570	14508
83	61142	51743	38209	31474	96095	15163	54380	77849	20465	03142
84	12031	32528	61311	53730	89032	16124	58844	35386	45521	59368
85	31313	59838	29147	76882	74328	09955	63673	96651	53264	29871
86	50767	41056	97409	44376	62219	35439	70102	99248	71179	26052
87	30522	95699	84966	26554	24768	72247	84993	85375	92518	16334
88	74176	19870	89874	64799	03792	57006	57225	36677	46825	14087
89	17114	93248	37065	91346	04657	93763	92210	43676	44944	75798
90	53005	11825	64608	87587	05742	31914	55044	41818	29667	77424
91	31985	81539	79942	49471	46200	27639	94099	42085	79231	03932
92	63499	60508	77522	15624	15088	78519	52279	79214	43623	69166
93	30506	42444	99047	66010	91657	37160	37408	85714	21420	80996
94	78248	16841	92357	10130	68990	38307	61022	56806	81016	38511
95	64996	84789	50185	32200	64382	29752	11876	00664	54547	62597
96	11963	13157	09136	01769	30117	71486	80111	09161	08371	71749
97	44335	91450	43456	90449	18338	19787	31339	60473	06606	89788
98	42277	11868	44520	01113	11341	11743	97949	49718	99176	42006
99	77562	18863	58515	90166	78508	14864	19111	57183	85808	59385

جدول A۱۱

توزیع t

مقادیر z به‌ازای مقادیر مفروض تابع توزیع $F(z)$ (ر. ك. صفحهٔ ۹۰۲)

مثال : برای ۹ درجهٔ آزادی وقتی‌که $F(z) =$ ۹۵ر۰ ، $z =$ ۸۳ر۱

$F(z)$	تعداد درجهٔ آزادی 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.33	0.29	0.28	0.27	0.27	0.27	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.73	0.62	0.58	0.57	0.56	0.55	0.55	0.55	0.54	0.54
0.8	1.38	1.06	0.98	0.94	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.88
0.9	3.08	1.89	1.64	1.53	1.48	1.44	1.42	1.40	1.38	1.37
0.95	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.90	1.86	1.83	1.81
0.975	12.7	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.23
0.99	31.8	6.97	4.54	3.75	3.37	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76
0.995	63.7	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17
0.999	318.3	22.3	10.2	7.17	5.89	5.21	4.79	4.50	4.30	4.14

$F(z)$	تعداد درجهٔ آزادی 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.53	0.53
0.8	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.86	0.86	0.86	0.86
0.9	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.33	1.33
0.95	1.80	1.78	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.73
0.975	2.20	2.18	2.16	2.15	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09
0.99	2.72	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57	2.55	2.54	2.53
0.995	3.11	3.06	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.85
0.999	4.03	3.93	3.85	3.79	3.73	3.69	3.65	3.61	3.58	3.55

$F(z)$	تعداد درجه آزادی 22	24	26	28	30	40	50	100	200	∞
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25
0.7	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52
0.8	0.86	0.86	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85	0.85	0.84	0.84
0.9	1.32	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28
0.95	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.68	1.68	1.66	1.65	1.65
0.975	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.97	1.96
0.99	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33
0.995	2.82	2.80	2.78	2.76	2.75	2.70	2.68	2.63	2.60	2.58
0.999	3.51	3.47	3.44	3.41	3.39	3.31	3.26	3.17	3.13	3.09

جدول A۱۲

توزیع مربع‌کی

مقادیر z به‌ازای مقادیر تابع توزیع $F(z)$ (ر. ک. صفحهٔ ۹۰۴)

مثال: برای ۳ درجه آزادی وقتی‌که $F(z)=$ ۰٫۹۹ ، $z=$ ۱۱٫۳۴

	تعداد درجهٔ آزادی									
$F(z)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19

	تعداد درجهٔ آزادی									
$F(z)$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00

	تعداد درجهٔ آزادی									
$F(z)$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	8.0	8.6	9.3	9.9	10.5	11.2	11.8	12.5	13.1	13.8
0.01	8.9	9.5	10.2	10.9	11.5	12.2	12.9	13.6	14.3	15.0
0.025	10.3	11.0	11.7	12.4	13.1	13.8	14.6	15.3	16.0	16.8
0.05	11.6	12.3	13.1	13.8	14.6	15.4	16.2	16.9	17.7	18.5
0.95	32.7	33.9	35.2	36.4	37.7	38.9	40.1	41.3	42.6	43.8
0.975	35.5	36.8	38.1	39.4	40.6	41.9	43.2	44.5	45.7	47.0
0.99	38.9	40.3	41.6	43.0	44.3	45.6	47.0	48.3	49.6	50.9
0.995	41.4	42.8	44.2	45.6	46.9	48.3	49.6	51.0	52.3	53.7

	تعداد درجهٔ آزادی							
$F(z)$	40	50	60	70	80	90	100	> 100 (Approximation)
0.005	20.7	28.0	35.5	43.3	51.2	59.2	67.3	$\frac{1}{2}(h-2.58)^2$
0.01	22.2	29.7	37.5	45.4	53.5	61.8	70.1	$\frac{1}{2}(h-2.33)^2$
0.025	24.4	32.4	40.5	48.8	57.2	65.6	74.2	$\frac{1}{2}(h-1.96)^2$
0.05	26.5	34.8	43.2	51.7	60.4	69.1	77.9	$\frac{1}{2}(h-1.64)^2$
0.95	55.8	67.5	79.1	90.5	101.9	113.1	124.3	$\frac{1}{2}(h+1.64)^2$
0.975	59.3	71.4	83.3	95.0	106.6	118.1	129.6	$\frac{1}{2}(h+1.96)^2$
0.99	63.7	76.2	88.4	100.4	112.3	124.1	135.8	$\frac{1}{2}(h+2.33)^2$
0.995	66.8	79.5	92.0	104.2	116.3	128.3	140.2	$\frac{1}{2}(h+2.58)^2$

درستون آخر، $h=\sqrt{2m-1}$ که درآن m تعداد درجات آزادی است.

جدول A۱۳
توزیع F با (m, n) درجهٔ آزادی

مقادیر z که به‌ازای آنها تابع توزیع $F(z)$ (ر. ك. (۱۳)، بخش ۱۵.۲۰) دارای مقدار ۰ر۹۵ است.

مثال: به‌ازای (۷, ۴) درجهٔ آزادی وقتی که $F(z) = ۰ر۹۵$ ، $z = ۶ر۰۹$

n	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

جدول A۱۳
توزیع F با (m, n) درجهٔ آزادی (ادامهٔ)

مقادیر z که به‌ازای آنها تـابع توزیع $F(z)$ (ر.ك. (۱۳) بخش ۱۵.۲۰) دارای مقدار ۹۵ر۰ است.

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	242	246	248	250	251	252	253	254
2	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.40
12	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
15	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.01
17	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.96
18	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.84
22	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.78
24	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
26	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
28	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.65
30	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.62
32	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67	1.59
34	2.12	1.97	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65	1.57
36	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62	1.55
38	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61	1.53
40	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
50	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
60	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.39
70	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.35
80	1.95	1.79	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.32
90	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.30
100	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.28
150	1.89	1.73	1.64	1.53	1.48	1.44	1.34	1.22
200	1.88	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.19
1000	1.84	1.68	1.58	1.47	1.41	1.36	1.26	1.08
∞	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.00

جدول A۱۳
توزیع F با (m, n) درجهٔ آزادی (ادامهٔ)

مقادیر z که به‌ازای آنها تـابع توزیع $F(z)$ (ر.ك. (۱۳) بخش ۱۵.۲۰) دارای مقدار ۹۹ر۰ است.

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.54	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
150	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

توزیع F با (m, n) درجهٔ آزادی (ادامه)

مقادیر z که به‌ازای آنها تـابع توزیع $F(z)$ (ر.ك. (۱۳) بخش ۱۵.۲۰) دارای مقدار ۹۹ر۰ است.

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	6056	6157	6209	6261	6287	6300	6330	6366
2	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	27.2	26.9	26.7	26.5	26.4	26.4	26.2	26.1
4	14.5	14.2	14.0	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	10.1	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
6	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
7	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.65
8	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.96	4.86
9	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.42	4.31
10	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
11	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.60
12	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.36
13	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.17
14	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.00
15	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.87
16	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.75
17	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.65
18	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.57
19	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.49
20	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.42
22	3.26	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.31
24	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
26	3.09	2.82	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.13
28	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.06
30	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.01
32	2.93	2.66	2.50	2.34	2.25	2.20	2.08	1.96
34	2.89	2.62	2.46	2.30	2.21	2.16	2.04	1.91
36	2.86	2.58	2.43	2.26	2.17	2.12	2.00	1.87
38	2.83	2.55	2.40	2.23	2.14	2.09	1.97	1.84
40	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.80
50	2.70	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.82	1.68
60	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.60
70	2.59	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.54
80	2.55	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.66	1.49
90	2.52	2.24	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.46
100	2.50	2.22	2.07	1.89	1.80	1.73	1.60	1.43
150	2.44	2.16	2.00	1.83	1.73	1.66	1.52	1.33
200	2.41	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.28
1000	2.34	2.06	1.90	1.72	1.61	1.54	1.38	1.11
∞	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.00

جدول A۱۴

تابع توزیع $F(x)=P(T\leqslant x)$ متغیر تصادفی T بخش ۱۹.۲۰

وقتی که $n=$ ۳ ، $F(۲)=۱-۰٫۱۶۷=۰٫۸۳۳$

وقتی که $n=$ ۴ ، $F(۳)=۱-۰٫۳۷۵=۰٫۶۲۵$ ، $F(۴)=۱-۰٫۱۶۷=۰٫۸۳۳$

و غیره.

x	n=3
	0.
0	167
1	500

x	n=4
	0.
0	042
1	167
2	375

x	n=5
	0.
0	008
1	042
2	117
3	242
4	408

x	n=6
	0.
0	001
1	008
2	028
3	068
4	136
5	235
6	360
7	500

x	n=7
	0.
1	001
2	005
3	015
4	035
5	068
6	119
7	191
8	281
9	386
10	500

x	n=8
	0.
2	001
3	003
4	007
5	016
6	031
7	054
8	089
9	138
10	199
11	274
12	360
13	452

x	n=9
	0.
4	001
5	003
6	006
7	012
8	022
9	038
10	060
11	090
12	130
13	179
14	238
15	306
16	381
17	460

x	n=10
	0.
6	001
7	002
8	005
9	008
10	014
11	023
12	036
13	054
14	078
15	108
16	146
17	190
18	242
19	300
20	364
21	431
22	500

x	n=11
	0.
8	001
9	002
10	003
11	005
12	008
13	013
14	020
15	030
16	043
17	060
18	082
19	109
20	141
21	179
22	223
23	271
24	324
25	381
26	440
27	500

x	n=20
	0.
50	001
51	002
52	002
53	003
54	004
55	005
56	006
57	007
58	008
59	010
60	012
61	014
62	017
63	020
64	023
65	027
66	032
67	037
68	043
69	049
70	056
71	064
72	073
73	082
74	093
75	104
76	117
77	130
78	144
79	159
80	176
81	193
82	211
83	230
84	250
85	271
86	293
87	315
88	339
89	362
90	387
91	411
92	436
93	462
94	487

x	n=19
	0.
43	001
44	002
45	002
46	003
47	003
48	004
49	005
50	006
51	008
52	010
53	012
54	014
55	017
56	021
57	025
58	029
59	034
60	040
61	047
62	054
63	062
64	072
65	082
66	093
67	105
68	119
69	133
70	149
71	166
72	184
73	203
74	223
75	245
76	267
77	290
78	314
79	339
80	365
81	391
82	418
83	445
84	473
85	500

x	n=18
	0.
38	001
39	002
40	003
41	003
42	004
43	005
44	007
45	009
46	011
47	013
48	016
49	020
50	024
51	029
52	034
53	041
54	048
55	056
56	066
57	076
58	088
59	100
60	115
61	130
62	147
63	165
64	184
65	205
66	227
67	250
68	275
69	300
70	327
71	354
72	383
73	411
74	441
75	470
76	500

x	n=17
	0.
32	001
33	002
34	002
35	003
36	004
37	005
38	007
39	009
40	011
41	014
42	017
43	021
44	026
45	032
46	038
47	046
48	054
49	064
50	076
51	088
52	102
53	118
54	135
55	154
56	174
57	196
58	220
59	245
60	271
61	299
62	328
63	358
64	388
65	420
66	452
67	484

x	n=16
	0.
27	001
28	002
29	002
30	003
31	004
32	006
33	008
34	010
35	013
36	016
37	021
38	026
39	032
40	039
41	048
42	058
43	070
44	083
45	097
46	114
47	133
48	153
49	175
50	199
51	225
52	253
53	282
54	313
55	345
56	378
57	412
58	447
59	482

x	n=15
	0.
23	001
24	002
25	003
26	004
27	006
28	008
29	010
30	014
31	018
32	023
33	029
34	037
35	046
36	057
37	070
38	084
39	101
40	120
41	141
42	164
43	190
44	218
45	248
46	279
47	313
48	349
49	385
50	423
51	461
52	500

x	n=14
	0.
18	001
19	002
20	002
21	003
22	005
23	007
24	010
25	013
26	018
27	024
28	031
29	040
30	051
31	063
32	079
33	096
34	117
35	140
36	165
37	194
38	225
39	259
40	295
41	334
42	374
43	415
44	457
45	500

x	n=13
	0.
14	001
15	001
16	002
17	003
18	005
19	007
20	011
21	015
22	021
23	029
24	038
25	050
26	064
27	082
28	102
29	126
30	153
31	184
32	218
33	255
34	295
35	338
36	383
37	429
38	476

x	n=12
	0.
11	001
12	002
13	003
14	004
15	007
16	010
17	016
18	022
19	031
20	043
21	058
22	076
23	098
24	125
25	155
26	190
27	230
28	273
29	319
30	369
31	420
32	473

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

absolute	مطلق
– frequency	فراوانی مطلق
– value	قدر مطلق
abstract concept	مفهوم مجرد
acceleration	شتاب
accumulation point	نقطهٔ انباشتگی
addition	جمع
algebra	جبر
alternating current	جریان متناوب
alternative hypothesis	فرض مقابل
amplitude	دامنه
analytic	تحلیلی
– continuation	ادامهٔ تحلیلی
– function	تابع تحلیلی
– line integrals	انتگرالهای روی خط تحلیلی
– mapping	نگاشت تحلیلی
– residue	ماندهٔ تحلیلی
angle	زاویه
annulus	طوق

approximate solution	جواب تقریبی
approximation	تقریب
arc	قوس
Archimedes' principle	اصل ارشمیدس
area	مساحت
Argand diagram	نمودار آرگان
augmented matrix	ماتریس افزوده
autonomous	خودگردان
auxiliary equation	معادلهٔ کمکی
average	متوسط
back ward differences	تفاضلهای پس‌رونده
bar chart	نمودار میله‌ای
basis	پایه
beam	میله
bijective mapping	نگاشت دوسویی
bilinear form	صورت دوخطی
binomial	دوجمله‌ای
bounded	کراندار
– sequence	دنبالهٔ کراندار
capacitance	ظرفیت
capacitor	خازن
cardioid	دلوار
cartesian coordinates	مختصات دکارتی
Cauchy	کشی
– integral formula	فرمول انتگرال کشی
Cayley transformation	تبدیل کیلی

centrifugal force	نیروی مرکزگرا
chain rule	قاعدهٔ زنجیری
characteristic polynomial	چند جمله‌ای مشخصه
chemical reaction	واکنش شیمیایی
circle	دایره
circuit	مدار
circulation	گردش
class frequency	فراوانی رده‌ای
coefficient	ضریب
cofactor	همسازه
coin	سکه
collinear	هم خط
commutative	جابه‌جایی
commutativity	جابه‌جایی بودن
comparison test	آزمون مقایسه
complement	مکمل
complementation rule	قاعدهٔ مکمل گیری
complex	مختلط
– function	تابع مختلط
– plane	صفحهٔ مختلط
component	مؤلفهٔ
compressible fluid	سیال تراکم پذیر
conditional probability	احتمال شرطی
conformal mapping	نگاشت همدیسی
connected set	مجموعهٔ همبند
continuation	ادامه
continuity	پیوستگی

continuous	پیوسته
convergence	همگرایی
– test	آزمون همگرایی
convolution	پیچش
coplanar	هم‌صفحه
correlation	همبستگی
covariance	کوواریانس
Cramer's rule	قاعدهٔ کرامر
critical	بحرانی
– damping	میرایی بحرانی
cross product	ضرب خارجی
cubic spline	اسپلاین مکعبی
curvature	انحنا
curve	منحنی
cylinderical coordinates	مختصات استوانه‌ای
damped oscillation	نوسان میرا
decreasing sequence	دنبالهٔ نزولی
density	چگالی
derivative	مشتق
desk calculation	محاسبات دستی
determinant	دترمینان
diagonal matrix	ماتریس قطری
diffrentiable	مشتقپذیر
differential	دیفرانسیل
– equation	معادلهٔ دیفرانسیل
– operator	عملگر دیفرانسیل

differentiation	مشتقگیری
dimension	بعد
directed line segment	پاره خط جهت‌دار
discrete random variable	متغیر تصادفی گسسته
disjoint events	پیشامدهای جدا از هم
distribution	توزیع
divergence	دیورژانس
divergent	واگرا
domain	دامنه
driving force	نیروی محرك
echlelon form	صورت پلکانی
eigenvalue	مقدار ویژه
eigenvector	بردار ویژه
electrical network	شبکهٔ الکتریکی
electric circuit	مدار الکتریکی
electromotive force	نیروی محرکه الکتریکی
elementary function	تابع مقدماتی
elimination method	روش حذفی
ellipsoid	بیضی‌وار
elliptic	بیضی گون
empty event	پیشامد تهی
entire function	تابع تام
equation	معادله
equipotential	هم پتانسیل
error	خطا
essential singularity	تکین ضروری
estimate	برآورد

euclidean norm	نرم اقلیدسی
evaporation	تبخیر
even function	تابع زوج
event	پیشامد
existence theorem	قضیهٔ وجود
experiment	آزمایش
explicit solution	جواب ضمنی
exponential growth	رشد نمایی
factorial function	تابع فاکتوریل
field	میدان
finite	متناهی
floating point	نقطهٔ شناور
flux	شار
flywheel	چرخ طیار
forced motion	حرکت واداشته
forced oscillations	نوسانات واداشته
fortran	فرترن
forward differences	تفاضلهای پیش رونده
four-cusped hypocycloid	درونچرخزاد چهار گوش
four-terminal network	شبکهٔ چهارسر
frequency	فراوانی
friction	اصطکاك
full wave rectification	یکسو شدهٔ تمام
function	تابع
fundamental	بنیادی
general solution	جواب عمومی

geometric series	سری هندسی
half-life time	نیم عمر
half-range fourier series	سری فوریهٔ نیم دامنه
half-wave rectifier	یکسو کنندهٔ نیم موجی
harmonic	همساز
helix	مارپیچ
histogram	بافت نگار
holomorphic	هلوریخت
homogeneous	همگن
hyperbolic	هذلولی‌گون
hyperboloid	هذلولی‌وار
hypergeomertrc	فوق هندسی
hypocycloid	درونچرخزاد
idempotent matrix	ماتریس خود توان
identity	اتحاد، همانی
ill-conditioned	بد طرح
image	نقش
imaginary	موهومی
impedance	امپدانس
implicit solution	جواب ضمنی
impossible event	پیشامد غیرممکن
improper integral	انتگرال ناسره
increasing sequence	دنبالهٔ صعودی
independence	استقلال
indicial equation	معادلهٔ شاخصی
inductive time constant	ثابت زمانی القایی

inductor	القاءکننده
inequality	نامساوی
inertia	لختی
infinite sequence	دنباله نامتناهی
infinity	بینهایت
initial condition	شرط اولیه
injective mapping	نگاشت یك‌به‌یك
inner product	ضرب داخلی
input	ورودی
instantaneous current	شدت جریان لحظه‌ای
integral equations	معادلات انتگرالی
integrating factor	عامل انتگرالساز
integration	انتگرالگیری
interpolation	درونیابی
interquartile range	برد میان چارکی
intersection	اشتراك
interval	فاصله
invariance	ناوردایی
inverse	معکوس
inversion	انعکاس
involute	گسترنده
irrotational	غیردورانی
isocline	همشیب
isogonal trajectories	مسیرهای همزاویه
isolated singularity	تکینی تنها
iteration	تکرار

latent root	ریشهٔ راکد
LC - circuit	مدار LC
least squares	حداقل مربعات
left - hand derivative	مشتق چپ
level	تراز
likelihood function	تابع درست نمایی
limit	حد
linearity principle	اصل خطی‌بودن
line integral	انتگرال روی خط
logarithm	لگاریتم
logistic law	قانون لوژستیکی
machine language program	برنامه به‌زبان دستگاه
mapping	نگاشت
marginal distribution	توزیع حاشیه‌ای
mass action	اثر جرم
mathematical expectation	امید ریاضی
matrix	ماتریس
mean value theorem	قضیهٔ مقدار میانگین
median	میانه
membrance	غشاء
memory	حافظه
meromorphic function	تابع برخه‌ریخت
middle quartile	چارك میانی
minor	کهاد
mixed triple product	ضرب سه گانهٔ مختلط
mode	مد

modeling	مدلسازی
modular surface	سطح پیمانه‌ای
modulus	مدول
moment	گشتاور
monotone	یکنوا
M - test	آزمون M
multinomial distribution	توزیع چند جمله‌ای
multiple point	نقطهٔ چند جمله‌ای
multiplication	ضرب
multiplicity	چند بارگی
multiply connected	همبند چندگانه
mutual inductance	القای متقابل
mutually exclusive events	پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار
neighbourhood	همسایگی
network	شبکه
node	گره
nonorientable surface	سطح جهت‌ناپذیر
nonparametric test	آزمون ناپارامتری
norm	نرم
normal	نرمال [= قائم]
null	پوچ [= صفر]
nullity	پوچی
number sphere	کرهٔ عددی
observation	مشاهده
OC curve	منحنی OC [= منحنی مشخصه عمل‌کننده]
odd function	تابع فرد

one - sided test	آزمون یك‌طرفه
one - to - one mapping	نگاشت یك‌به‌یك
operator	عملگر
order	مرتبه
ordinary differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل معمولی
orientable surface	سطح جهت‌پذیر
orthogonal	متعامد
— trajectories	مسیرهای متعامد
— triad	سه‌تایی متعامد
orthonormal	متعامدیکه
oscillation	ارتعاش [= نوسان]
osculating plane	صفحهٔ بوسان
outcome	برآمد
output	خروجی
overdamping	میرایی شدید
paired comparison	مقایسه زوجی
paraboloid	سهمی‌وار
parallelepiped	متوازی السطوح
parallelogram	متوازی الاضلاع
parametric representation	نمایش پارامتری
particular solution	جواب خصوصی
pendulum	آونگ
percentile	صدك
permutation	جایگشت
phase	فاز
piecewise continuous	پیوستهٔ تکه‌ای
pilot program	برنامه راهنما

planimeter	مساحت سنج
polar	قطبی
pole	قطب
polynomial	چند جمله‌ای
position vector	بردار مکان
postmultiplication	پیش ضرب کردن
potential	پتانسیل
power	توان
predictor	پیشگو
premultiplication	پس‌ضرب کردن
primitive period	دورهٔ اولیه
probability	احتمال
product	حاصلضرب [= ضرب]
projection	تصویر
proper node	گره سره
punch card	کارت منگنه شده
pure imaginary number	عدد موهومی محض
quadratic	درجهٔ دوم
quality control	کنترل کیفیت
quartile	چارك
quotient	خارج قسمت
radiation	تشعشع
random	تصادفی
– variable	متغیر تصادفی
range	برد
rank	مرتبه

ratio test	آزمون نسبت
RC - circuit	مدار آر سی
reactance	راکتانس
real	حقیقی
rectifiable curve	منحنی راستی‌پذیر
rectifier	یکسوکننده
recurrence relation	رابطهٔ بازگشتی
region	ناحیه
regression	رگرسیون
regular	منظم
relative	نسبی
relaxation	واهلش
remainder	باقیمانده
removable singularity	تکینی برداشتنی
representation	نمایش
residual	پس مانده
residue	مانده
resistance (→ resistor)	مقاومت
resistor (→ resistance)	مقاومت
resonance	تشدید
response	پاسخ
root	ریشه
rotation	دوران
row	سطر
rule	قاعده
saddle point	نقطهٔ زینی
sample	نمونه

scalling	مقیاس گذاری
semicubical parabola	سهمی نیم مکعبی
sequence	دنباله
series	سری
shifting theorems	قضایای انتقال
sign test	آزمون علامت
similarity transformation	تبدیل تشابه
simply connected	همبند ساده
simultaneous	همزمان
single sampling plane	طرح نمونه گیری تك
singular	تکین
singularity	تکینی
skew - hermition	ضد هرمیتی
skewness	چاولگی
skew - symmetric matrix	ماتریس ضد متقارن
sliding vector	بردارلغزان
sparse system	دستگاه تنك
spectral radius	شعاع طیفی
spectrum	طیف
speed	تندی
sphere	کره
spiral point	نقطهٔ حلزونی
spline	اسپلاین
stability	پایداری
stagnation point	نقطهٔ رکود
staircase function	تابع پلکانی
standard deviation	خطای معیار

standardized variable	متغیر استاندارد شده
statistics	آمار
steady state	حالت مانا
step - by - step method	روش گام‌به‌گام
step function	تابع پله‌ای
stereographic projection	افکنش کنجنگاری
stochastic variable	متغیر استوکاستیک
stream function	تابع جریان
subevent	زیرپیش‌آمد
submatrix	زیر ماتریس
subsidiary equation	معادلهٔ کمکی
successive	متوالی
superposition principle	اصل برهم نهی
surface	سطح
– integral	انتگرال روی سطح
surjective	پوششی
symmetric	متقارن
tally chart	جدول نمودار خط نشانی
tangent	مماس، تانژانت
termwise integration	انتگرالگیری جمله‌به‌جمله
test	آزمون
tetrahedron	چهاروجهی
thermal conductivity	ضریب هدایت حرارتی
three - eight's rule	قاعدهٔ سه ـ هشت
three - sigma limits	حدود سه ـ سیگما
throwback	عقب‌گرد

torus	چنبره
trace	اثر
tractrix	کشاننده
trajectory	مسیر
transformation	تبدیل
transient state	حالت گذرا
translation	انتقال
trapezoidal rule	قاعدهٔ ذوزنقه‌ای
trend	انحراف [= گرایش]
triad	سه‌تایی
triangle inequality	نابرابری مثلثی
triangular matrix	ماتریس مثلثی
trihedron	سه‌وجهی
triple integral	انتگرال سه گانه
trivial solution	جواب بدیهی
torsion	تاب
truncation error	خطای قطع
tuning	تنظیم
twisted curve	منحنی تابدار
unacceptable lot	تودهٔ ناپذیرفتنی
undamped system	دستگاه غیرمیرا
underdamping	میرایی خفیف
undetermined coefficients	ضرایب نامعین
uniform	یکنواخت
uniqueness	یکتایی
unit	یکه

uuitary	یکانی
unstable	ناپایدار
upper quartile	چارك بالایی
variable	متغیر
variate	واریت
vector	بردار
velocity	سرعت
voltage drop	افت ولتاژ
volume	حجم
vortex point	نقطهٔ گردابی
vortcity	چرخش
wave equation	معادلهٔ موج
well - conditioned	خوش طرح
zero	صفر

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

experiment	آزمایش
test	آزمون
M - test	— M
sign test	— علامت
comparison test	— مقایسه
nonparametric test	— ناپارامتری
ratio test	— نسبت
convergence test	— همگرایی
one - sided test	— یک‌طرفه
statistics	آمار
pendulum	آونگ
identity	اتحاد (← همانی)
trace	اثر
mass action	— جرم
probability	احتمال
conditional probability	— شرطی
continuation	ادامه
analytic continuation	— تحلیلی
oscillation	ارتعاش [← نوسان]

اسپلاین	spline
ـ مکعبی	cubic spline
استقلال	independence
اشتراك	intersection
اصطکاك	friction
اصل	principle
ـ ارشمیدس	Archimedes' principle
ـ برهم نهی	superposition principle
ـ خطی بودن	linearity principle
افت ولتاژ	voltage drop
افکنش کنجنگاری	stereographic projection
القاء کننده	inductor
القای متقابل	mutual inductance
امپدانس	impedance
امید ریاضی	mathematical expectation
انتقال	translation
انتگرال	integral
ـ روی خط	line integral
ـ روی سطح	surface integral
ـ سه گانه	triple integral
ـ ناسره	improper integral
انتگرالگیری	integration
ـ جمله‌به‌جمله	termwise integration
انتگرالهای روی خط تحلیلی	analytic line integrals
انحراف [← گرایش]	trend
انحراف معیار	standard deviation
انحنا	currature

انعکاس	inversion
بافت نگار	histogram
باقیمانده	remainder
بحرانی	critical
بد طرح	ill - conditioned
برآمد	outcome
برآورد	estimate
برد	range
ـ میان چارکی	interquartile range
بردار	vector
ـ لغزان	sliding vector
ـ مکان	position vector
ـ ویژه	eigenvector
برنامه	program
ـ به‌زبان دستگاه	machine language program
ـ راهنما	pilot program
بعد	dimension
بنیادی	fundamental
بیضی گون	elliptic
بیضی‌وار	ellipsoid
بینهایت	infinity
پاره خط جهت‌دار	directed line segment
پاسخ	response
پایداری	stability
پایه	basis
پتانسیل	potential

پرتاب سکه	coin tossing
پس‌ضرب کردن	premultiplication
پس مانده	residual
پوچ [→ صفر]	null
پوچی	nullity
پوششی	surjective
پیچش	convolution
پیشامد	event
ــ تهی	empty event
ــ غیرممکن	impossible event
ــ های جدا از هم	disjoint events
ــ های دوبه‌دو ناسازگار	mutually exclusive events
پیش ضرب کردن	post multiplication
پیشگو	predictor
پیوستگی	continuity
پیوسته	continuous
ــ تکه‌ای	piecewise continuous
تاب	torsion
تابع	function
ــ برخه‌ریخت	meromorphic function
ــ پلکانی	staircase function
ــ پله‌ای	step function
ــ تام	entire function
ــ تحلیلی	analytic function
ــ جریان	stream function
ــ درست نمایی	likelihood function
ــ زوج	even function

factorial function	ـ فاکتوریل
odd function	ـ فرد
complex function	ـ مختلط
elementary function	ـ مقدماتی
tangent	تانژانت[← مماس]
evaporation	تبخیر
transformation	تبدیل
similarity transformation	ـ تشابه
Cayley transformation	ـ کیلی
analytic	تحلیلی
level	تراز
resonance	تشدید
radiation	تشعشع
random	تصادفی
projection	تصویر
backward differences	تفاضلهای پس‌رونده
forward differences	تفاضلهای پیش رونده
approximation	تقریب
iteration	تکرار
singular	تکین
singularity	تکینی
removable singularity	ـ برداشتنی
isolated singularity	ـ تنها
essential singularity	ـ ضروری
speed	تندی
tuning	تنظیم
power	توان

unacceptable lot	تودهٔ ناپذیرفتنی
distribution	توزیع
multinomial distribution	ـ چند جمله‌ای
marginal distribution	ـ حاشیه‌ای
inductive time constant	ثابت زمانی القایی
commutative	جابه‌جایی
commutativity	جابه‌جایی بودن
permutation	جایگشت
algebra	جبر
tally chart	جدول نمودار خط نشانی
alternating current	جریان متناوب
addition	جمع
solution	جواب
trivial solution	ـ بدیهی
approximate solution	ـ تقریبی
particular solution	ـ خصوصی
implicit solution	ـ ضمنی
general solution	ـ عمومی
quartile	چارك
upper quartile	ـ بالایی
middle quartile	ـ میانی
skewness	چاولگی
vortcity	چرخش
flywheel	چرخ طیار
density	چگالی

torus	چنبره
multiplicity	چند بارگی
polynomial	چند جمله‌ای
characteristic polynomial	ـ مشخصه
tetrahedron	چهاروجهی
product	حاصلضرب [← ضرب]
memory	حافظه
state	حالت
transient state	ـ گذرا
steady state	ـ مانا
volume	حجم
limit	حد
least squares	حداقل مربعات
three - sigma limits	حدود سه ـ سیگما
forced motion	حرکت واداشته
real	حقیقی
quotient	خارج قسمت
capacitor	خازن
output	خروجی
error	خطا
truncation error	ـ ی قطع
autonomous	خودگردان
well - conditioned	خوش طرح
domain, amplitude	دامنه
circle	دایره

determinant	دترمینان
quadratic	درجهٔ دوم
hypocycloid	درونچرخزاد
four-cusped hypocycloid	ـ چهارگوش
interpolation	درونیابی
system	دستگاه
sparse system	ـ تنك
undamped system	ـ غیرمیرا
cardioid	دلوار
sequence	دنباله
increasing sequence	ـ صعودی
bounded sequence	ـ کراندار
infinite sequence	ـ نامتناهی
decreasing sequence	ـ نزولی
binomial	دوجمله‌ای
rotation	دوران
primitive period	دورهٔ اولیه
divergence	دیورژانس
recurrence relation	رابطهٔ بازگشتی
reactance	راکتانس
exponential growth	رشد نمایی
regression	رگرسیون
elimination method	روش حذفی
step - by - step method	روش گام‌به‌گام
root	ریشه
latent root	ـ راکد

زاویه	angle
زیرپیش‌آمد	subevent
زیر ماتریس	submatrix
سرعت	velocity
سری	series
ـ فوریهٔ نیم دامنه	half-range fourier series
ـ هندسی	geometric series
سطح	surface
ـ پیمانه‌ای	modular surface
ـ جهت‌پذیر	orientable surface
ـ جهت‌ناپذیر	nonorientable surface
سطر	row
سه‌تایی	triad
ـ متعامد	orthogonal triad
سهمی نیم مکعبی	semicubical parabola
سهمی‌وار	paraboloid
سه‌وجهی	trihedron
سیال تراکم پذیر	compressible fluid
شار	flux
شبکه	network
ـ الکتریکی	electrical network
ـ چهارسر	four-terminal network
شتاب	acceleration
شدت جریان لحظه‌ای	instantaneous current
شرط اولیه	initial condition
شعاع طیفی	spectral radius

percentile	صدك
zero	صفر
null	صفر (← پوچ)
plane	صفحه
osculating plane	ـ بوسان
complex plane	ـ مختلط
echelon form	صورت پلکانی
bilinear form	صورت دوخطی
skew - hermitian	ضد هرمیتی
undetermined coefficients	ضرایب نامعین
multiplication, product	ضرب(← حاصلضرب)
cross product	ـ خارجی
inner product	ـ داخلی
mixed triple product	ـ سه‌گانهٔ مختلط
coefficient	ضریب
thermal conductivity	ـ هدایت حرارتی
single sampling plan	طرح نمونه‌گیری تك
annulus	طوق
spectrum	طیف
capacitance	ظرفیت
integrating factor	عامل انتگرالساز
pure imaginary number	عدد موهومی محض
throwback	عقب‌گرد
operator	عملگر

ـ دیفرانسیل	differential operator
غشاء	membrance
غیردورانی	irrotational
فاز	phase
فاصله	interval
فراوانی	frequency
ـ رده‌ای	class frequency
ـ مطلق	absolute frequency
فرترن	fortran
فرض مقابل	alternative hypothesis
فرمول انتگرال کشی	Cauchy integral formula
فوق هندسی	hypergeomertic
قائم (← نرمال)	normal
قاعده	rule
ـ ذوزنقه‌ای	trapezoidal rule
ـ زنجیری	chain rule
ـ سه ـ هشت	three - eight's rule
ـ کرامر	Cramer's rule
ـ مکمل گیری	complementation rule
قانون لوژستیکی	logistic law
قدر مطلق	absolute value
قضایای انتقال	shifting theorems
قضیهٔ	theorem
ـ وجود	existence theorem
قطب	pole

قطبی	polar
قوس	arc
کارت منگنه شده	punch card
کراندار	bounded
کره	sphere
ـ عددی	number sphere
کشاننده	tractrix
کشی	Cauchy
کنترل کیفیت	quality control
کوواریانس	covariance
کهاد	minor
گرایش(← انحراف)	trend
گردابی	vortex
گردش	circulation
گره	node
ـ سره	proper node
گسترنده	involute
گشتاور	moment
لختی	inertia
لگاریتم	logarithm
ماتریس	matrix
ـ افزوده	augmented matrix
ـ خود توان	idempotent matrix
ـ ضد متقارن	skew - symmetric matrix

ـ قطری	diagonal matrix
ـ مثلثی	triangular matrix
مارپیچ	helix
مانده	residue
ـ تحلیلی	analytic residue
متعامد	orthogonal
ـ یکه	orthonormal
متغیر	variable
ـ استاندارد شده	standardized variable
ـ استوکاستیک	stochastic variable
ـ تصادفی	random variable
ـ تصادفی گسسته	discrete random variable
متقارن	symmetric
متناهی	finite
متوازی الاضلاع	parallelogram
متوازی السطوح	parallelepiped
متوالی	successive
متوسط	average
مجموعهٔ همبند	connected set
محاسبات دستی	desk calculation
مختصات	coordinates
ـ استوانه‌ای	cylinderical coordinates
ـ دکارتی	cartesian coordinates
مختلط	complex
مد	mode
مدار	circuit
ـ آر سی	RC - circuit

LC –	LC - circuit
– الکتریکی	electric circuit
مدلسازی	modeling
مدول	modulus
مرتبه	order, rank
مساحت	area
مساحت سنج	planimeter
مسیر	trajectory
– های متعامد	orthogonal trajectories
– های همزاویه	isogonal trajectories
مشاهده	observation
مشتق	derivative
– چپ	left - hand derivative
مشتقپذیر	diffrentiable
مشتقگیری	differentiation
مطلق	absolute
معادلات انتگرالی	integral equations
معادله	equation
– دیفرانسیل	differentiai equation
– دیفرانسیل معمولی	ordinary differential equation
– شاخصی	indicial equation
– کمکی	auxiliary equation, subsidiary equation
– موج	wave equation
معکوس	inverse
مفهوم مجرد	abstract concept
مقاومت	resistance [= resistor]
مقایسه زوجی	paired comparison

مقدار ویژه	eigenvalue
مقیاس گذاری	scalling
مکمل	complement
مماس (← تانژانت)	tangent
منحنی	curve
ـ تابدار	twisted curve
ـ راستی‌پذیر	*rectifiable curve*
منحنی OC [← منحنی مشخصه عمل کننده]	OC curve
منحنی مشخصه عمل کننده (← منحنی OC)	OC curv
منظم	regular
مؤلفهٔ	component
موهومی	imaginary
میانه	median
میدان	field
میرایی	damping
ـ بحرانی	critical damping
ـ خفیف	underdamping
ـ شدید	overdamping
میله	beam
نابرابری مثلثی	triangle inequality
ناپایدار	unstable
ناحیه	region
نامساوی	inequality
ناوردایی	invarience
نرم	norm
ـ اقلیدسی	euclidean norm

normal	نرمال [← قائم]
relative	نسبی
image	نقش
point	نقطهٔ
accumulation point	ـ انباشتگی
multiple point	ـ چندگانه
spiral point	ـ حلزونی
stagnation point	ـ رکود
saddle point	ـ زینی
floating point	ـ شناور
mapping	نگاشت
analytic mapping	ـ تحلیلی
bijective mapping	ـ دوسویی
conformal mapping	ـ همدیسی
injective mapping [=one - to - one mapping]	ـ یك‌به‌یك
representation	نمایش
parametric representation	ـ پارامتری
Argand diagram	نمودار آرگان
bar chart	نمودار میله‌ای
sample	نمونه
oscillation	نوسان (← ارتعاش)
damped oscillation	ـ میرا
forced oscillations	نوسانات واداشته
force	نیرو
driving force	ـ ی محرك
electromotive force	ـ ی محرکه الکتریکی
centrifugal force	ـ ی مرکزگرا

half-life time	نیم عمر
variate	واریت
chemical reaction	واکنش شیمیایی
divergent	واگرا
relaxation	واهلش
input	ورودی
hyperbolic	هذلولی‌گون
hyperboloid	هذلولی‌وار
holomorphic	هلوریخت
identity	همانی (← اتحاد)
correlation	همبستگی
connected	همبند
multiply connected	ـ چندگانه
simply connected	ـ ساده
equipotential	هم پتانسیل
collinear	هم خط
simultaneous	همزمان
harmonic	همساز
cofactor	همسازه
neighbourhood	همسایگی
isocline	همشیب
coplanar	هم‌صفحه
convergence	همگرایی
homogeneous	همگن
unitary	یکانی

uniqueness	یکتایی
full wave rectification	یکسو شدهٔ تمام
rectifier	یکسو کننده
half - wave rectifier	– نیم موجی
monotone	یکنوا
uniform	یکنواخت
unit	یکه

فهرست راهنما

آدرس ۱۰۱۳
آرگومان ۷۶۳
آزاد توزیع ۱۲۴۴
آزمایش تصادفی ۱۱۳۴
آزمون
ــ M وایرشتراس ۹۴۴
ــ دوطرفه ۱۲۱۵
ــ ریشه ۸۹۵، ۸۹۸
ــ علامت ۱۲۴۵
ــ فرض ۱۲۱۲
ــ لایبنیتس ۸۸۹
ــ مربعی کی ۱۲۴۰
ــ مقایسه ۸۹۱
ــ ناپارامتری ۱۲۴۴
ــ نسبت ۸۹۳، ۸۹۷
ــ همگرایی ۸۸۹، ۸۹۱
ــ یك‌طرفه ۱۲۱۵
آلگون ۱۰۱۴
آمار ۱۱۱۹
آمپر ۵۶
آوند ۷۶۳
آونگ ۱۱۷، ۱۹۳

اتحاد لاگرانژ ۳۷۴
اثر جرم ۳۳
اثر ماتریس ۴۷۹
اجتماع پیشامدها ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸
احتمال ۱۱۴۰
ــ شرطی ۱۱۴۳
ادامهٔ تحلیلی ۹۲۸
ادامهٔ دوره‌ای ۶۵۴
ارقام محافظ ۱۰۱۲
اسپلاین ۱۰۴۱
ــ مکعبی ۱۰۴۲
استرات ۱۱۰۳
استقلال از مسیر ۶۱۷، ۸۵۷
استقلال خطی ۹۳، ۱۳۳، ۳۴۹، ۴۱۸
استنباط آماری ۱۱۲۱

اسکالر ۲۳۶، ۲۴۷

اسلگ ۱۱۰

اشتباه ۱۰۱۳

اشتراك پیشامدها ۱۱۳۶، ۱۱۳۸

اصطکاك ۳۲

اصل

ـ ارشمیدس ۱۱۸

ـ برهم نهی ۸۶

ـ کانتور ـ ددکیند ۸۸۸

ـ ماکزیمم ۱۰۰۰

ـ همگرایی ۸۸۵، ۸۸۶

ـ ـ کوشی ۸۸۵، ۸۸۶

اصول موضوعهٔ احتمال ۱۱۴۱

اعداد

ـ اویلر ۹۳۵

ـ برنولی ۹۳۵

ـ تصادفی ۱۱۹۳

ـ مختلط مزدوج ۷۶۰

اعمال مقدماتی ۴۱۰

افت ولتاژ ۵۶

افکنش کنجنگاری ۹۵۵

القای متقابل ۳۲۹

الگوریتم گاوس ۴۰۵، ۱۰۷۷

امپدانس مختلط ۱۶۶

امید ریاضی ۱۱۶۰، ۱۱۶۳، ۱۱۸۸

انتقال ۲۳۶، ۸۱۷

انتگرال

ـ دوگانه ۵۶۱، ۵۶۹

ـ روی خط ۵۵۱، ۵۶۹، ۶۱۰، ۸۴۳

ـ ـ تابع تحلیلی ۸۴۲

ـ ـ مختلط ۸۴۱

ـ روی سطح ۵۹۰

ـ روی مرز ۸۵۹

ـ روی‌منحنی ۵۵۰

ـ سه گانه ۵۹۶

ـ سینوسی ۶۷۷؛ ۹۳۱

ـ ـ مکمل ۱۳۳۹

ـ فرنل ۹۳۱

ـ فوریه ۶۷۷، ۷۱۳، ۹۷۶

ـ کسینوس ۱۱۱۷

ـ ـ مختلط ۶۸۳

ـ لگاریتمی ۱۳۴۰

ـ مختلط ۸۴۱

ـ ـ معین ۸۴۲

ـ ناسره ۹۷۲

ـ نامعین ۸۴۲

ـ نمایی ۱۱۱۶، ۱۳۳۹

انتگرالگیری

ـ از سری ۹۱۹، ۹۴۲

ـ تبدیلات لاپلاس ۲۷۹، ۲۹۶

ـ توابع مختلط ۸۴۲

ـ جمله‌به‌جمله ۹۱۹، ۹۴۳

ـ سری توانی ۹۱۹

ـ سریهای مجانبی ۱۱۱۳

– عددی ۱۰۴۷
– نامعین ۸۶۱
انتگرالهای لاپلاس ۶۸۱
انجمنی ۳۴۴
انحراف معیار یك توزیع ۱۱۶۰
انحراف معیار یك نمونه ۱۱۳۰
انحنا ۵۱۱
اندازهٔ بردار ۳۳۷
اندازهٔ نمونه ۱۱۳۰
انعکاس ۸۰۷
اهم ۵۶

بافت نگار ۱۱۲۵
باقیماندهٔ سری ۲۰۴، ۸۸۱
بحرانی میرایی ۱۱۶
بخش اصلی ۹۵۷
بخشپذیری ۳۴۷
بدطرح ۱۰۲۲، ۱۰۸۸
برآمدن ۱۱۳۴
برآورد
– پارامترها ۱۱۹۴
– فاصله‌ای ۱۱۹۵، ۱۲۰۰
– نقطه‌ای ۱۱۹۴
برآیند نیروها ۳۴۲
برازاندن منحنی ۱۰۹۲
برد
– تابع ۷۷۰
– میان چارکی ۱۱۳۳
– نمونه ۱۱۳۳
بردار
– پوچ ۳۴۰
– سرعت ۳۶۹، ۵۱۴
– صفر ۳۴۰
– قائم ۳۵۶، ۳۵۷
– – اصلی یکه ۵۱۱
– – دوم یکه ۵۱۱
– – یکه ۵۱۱، ۵۷۷
– گشتاور ۳۶۸
– لغزان ۳۳۸
– مقید ۳۳۸
– مکان ۳۴۰
– مماس ۵۱۰
– – یکه ۵۱۰
– ویژه ۴۶۷، ۱۰۹۷
– های سه‌تایی چپگرد ۳۴۶
– های متعامد ۳۴۵، ۳۵۳، ۳۶۱
برنامه به‌زبان دستگاه ۱۰۱۴
برنامهٔ راهنمایی ۱۰۱۵
بسامد طبیعی ۱۵۱
بسط
– تابع ویژه‌ای ۲۵۶
– حول مراکز مختلف ۹۲۷
– مجانبی ۱۱۰۷
– نیم دامنه‌ای ۶۵۵

بعد ۳۴۹
بوردا، ژ. س. ۲۲
بوفون ۱۱۴۰
بویل، ر. ۲۹
بیضی ۵۰۳
بیضی گون سهمی‌وار ۵۸۰
بیضی‌وار ۵۸۰

پادامتر ۱۱۹۴
پاره خط جهت‌دار ۳۳۷
پاسخ ۴۹، ۱۴۹
پایداری ۴۸۷
ــ آماری ۱۱۴۰
ــ فراوانیها ۱۱۴۰
پایه ۹۴، ۱۳۴، ۳۴۹
پتانسیل
ــ حقیقی ۵۳۰، ۷۳۸
ــ سرعت ۹۹۱
ــ مختلط ۸۳۲، ۹۸۶، ۹۹۲
نظریه ــ ۷۳۸
پدیدهٔ گیبز ۶۷۸، ۶۷۹
پرتاب سکه ۱۱۴۰
پرش ۶۵۹
پرش کننده با چتر بسته ۲۵
پس ضرب کردن ۳۹۷
پس‌مانده ۱۰۲۳، ۱۰۸۵
پل ویتستون ۴۱۳
پوچی ۴۲۲
پوششی ۳۹۹
پوند ۱۱۰
پیچش ۲۹۹
پیشامد ۱۱۳۵
ــ تهی ۱۱۳۶
ــ غیرممکن ۱۱۳۶
ــ مستقل ۱۱۴۴
ــ های دوبدوناسازگار ۱۱۳۸
ــ های مجزا ۱۱۳۸
پیش‌ضرب کردن ۳۹۷
پیش‌فضای هیلبرت ۳۶۰
پیشگو ۱۰۶۲
پیکار، ا. ۷۲
پیوستگی
ــ تابع برداری ۴۹۸
ــ یك تابع دومتغیره ۵۲۰
ــ یك تابع مختلط ۷۷۱
پیوسته ۴۹۸
ــ تکه‌ای ۲۷۲
ــ مشتق‌پذیر ۵۰۷

تابع
ــ احتمال ۱۱۵۴، ۱۱۸۳
ــ اسکالر ۴۹۴
ــ بتا ۱۳۳۸
ــ بتای اویلر ۱۳۳۸

ـ برخه ریخت ۹۵۲
ـ برداری ۴۹۴
ـ پلکانی ۲۹۳، ۳۲۱
ـ پله‌ای ۲۸۵
ـ ـ واحد ۲۸۵
ـ تحلیلی ۲۰۹
ـ توان ۱۲۱۷
ـ توزیع ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۵۴، ۱۱۸۳
ـ ـ تجمعی ۱۱۵۵
ـ جریان ۹۹۲
ـ حقیقی‌نمایی ، ۱۳۳۲
ـ خطا ۷۱۵، ۹۳۱، ۱۱۰۹
ـ ـ ی مکمل ۱۳۳۸
ـ درست نمایی ۱۱۹۶
ـ دوره‌ای ۳۱۷
ـ زوج ۶۴۷
ـ فاکتوریل ۱۱۴۹
ـ فراوانی تجمعی نمونه ۱۱۲۵
ـ فرد ۶۴۷
ـ کراندار ۷۷
ـ گاما ۲۳۵
ـ گویا ۷۸۴
ـ لژاندار ۲۱۱، ۲۱۶
ـ لگاریتم ۷۹۵، ۸۲۶، ۹۳۰
ـ متعامد ۲۴۷، ۲۵۱
ـ ـ یکه ۲۴۸، ۲۵۱
ـ مثلثاتی ۷۹۱، ۸۲۷، ۹۲۹
ـ ـ معکوس ۷۹۹
ـ مختلط ۷۶۸
ـ ـ مشتقپذیر ۷۷۲
ـ نمایی ۷۸۸، ۸۲۵، ۹۲۸
ـ مشخصه ۲۵۳، ۶۹۱، ۷۲۳
ـ مقدماتی ۲۷۱
ـ مولد ۲۱۶
ـ نمایی ۷۸۸، ۸۲۵، ۹۲۸
ـ ـ مختلط ۷۸۸، ۸۲۶، ۹۲۸
ـ نمونه ۱۱۲۴
ـ نویمان ۲۴۳، ۲۴۴
ـ وزن ۲۵۱
ـ ویژه‌ای مسئلهٔ استودم ـ لیوویل ۲۵۳
ـ هانکل ۲۴۵
ـ همساز ۶۰۹، ۷۳۶، ۷۸۱، ۸۱۴، ۹۹۷
ـ ـ مزدوج ۷۸۱
تاب یك منحنی ۵۱۱
تأخیر فاز ۱۵۵
تاس سالم ۱۱۴۲
تاو ۵۴۵، ۶۱۰، ۶۲۳
تبخیر ۳۱
تبدیل
ـ انتگرال ۵۶۹، ۵۹۷، ۶۱۰
ـ با تابع مختلط ۸۰۲
ـ تشابه ۴۷۹
ـ خطی ۳۹۹، ۴۲۴
ـ فوریه ۶۸۳

ـ کسری خطی ۸۱۹
ـ کیلی ۸۲۲
ـ لاپلاس ۲۶۷، ۷۴۷
ـ ـ معکوس ۲۶۸
ـ متعامد ۴۷۶
ـ مختصات ۵۴۰
ـ ـ دکارتی ۵۳۸
ـ معکوس ۴۲۲
ـ موبیوس ۸۱۶
ـ همانی ۸۰۳
تبرید ۲۱
تپه مستطیلی ۶۴۹
تحلیل همبستگی ۱۲۴۸
تحلیلی در بینهایت ۹۵۴
تخلیهٔ یك چشمه ۹۹۵
تراز
ـ اطمینان ۱۲۰۱
ـ کیفیت‌پذیرفتنی ۱۲۳۵
ـ معنی‌دار بودن ۱۲۱۵
تراکم‌ناپذیر ۵۴۴
ترانهادماتریس ۳۸۵
ترانهش ماتریس ۳۸۵
ترجمهٔ خودکار ۱۰۱۴
ترکیب خطی ۱۳۳، ۳۴۸
تساوی
ـ اعداد مختلط ۷۵۶
ـ بردارها ۳۳۷، ۳۴۰
ـ ماتریسها ۳۸۲
ـ متوازی‌الاضلاعی ۳۵۴، ۳۶۱
تشدید ۱۵۲، ۳۰۱، ۳۱۳
تشعشع رادیوم ۷، ۳۰
تصادفی
آزمایش ـ ۱۱۳۴
ارقام ـ ۱۱۹۳
اعداد ـ ۱۱۹۳
متغیر ـ ۱۱۵۲
مشاهده ـ ۱۱۳۴
نمونه‌گیری ـ ۱۱۹۲
تصحیحات ۱۰۱۰
ـ متوالی ۱۰۸۵
ـ همزمان ۱۰۸۵
تصفیهٔ توده ۱۲۳۶
تصمیم ۱۲۱۲
تصویر ۳۵۵
تعامد توابع بسل ۲۶۰
تعداد مجاز معیوبها ۱۲۳۳
تعریف تابع تحلیلی ۲۰۹
تعریف دترمینان ۴۳۱، ۴۳۸
تعویض سطرها یا ستونها ۴۴۲
تعیین محل برحسب اندازه ۱۰۷۹
تغییر پارامترها ۵۳، ۱۶۸
تغییرشکل مسیر ۸۵۸
تفاضل ماتریسها ۳۸۴
تفاضلهای

— اصلاح شده ۱۰۳۷
— اولین ۱۰۲۶
— پس‌رونده ۱۰۲۸
— پیش‌رونده ۱۰۲۸
— تقسیم شده ۱۰۳۷
— دوم ۱۰۲۶
— متناهی ۱۰۲۶
— مرکزی ۱۰۲۷
تفریق اعداد مختلط ۷۵۸
تفریق سریها ۹۰۰
تفکیك متغیرها ۱۷
تقاضا ۶۱۴
تقریب
— با چند جمله‌ای ۱۰۲۹
— حداقل مربعات ۱۰۹۲
— مثلثاتی ۶۷۱
تقسیم اعداد مختلط ۷۵۷
تقلیل مرتبه ۱۳۹
تکرار
— پیکار ۷۲
— ژاکوبی ۱۰۸۵
— گاوس ـ سیدل ۱۰۸۳
— نیوتن ۱۰۲۰
— نیوتن ـ رفسون ۱۰۲۰
تکه‌ای
پیوسته ـــ ←
تکین در بینهایت ۹۵۴
تکینی ۹۵۷، ۹۲۷
— برداشتی
— تابع تحلیلی ۹۵۷، ۹۲۷
— تنها ۹۵۶
— ضروری ۹۵۸
تندی ۵۱۵
— زاویه‌ای ۵۱۹، ۳۶۹
تنظیم ۱۶۲
توابع
— حقیقی هذلولی‌گون ۱۳۴۱، ۱۳۳۴
— فوق هندسی ۲۳۲
— گامای غیرکامل ۱۳۳۸
— لژاندر ۲۱۷، ۲۱۱
— متعامد ۲۵۸، ۲۴۸
— مثلثاتی حقیقی ۱۳۴۱، ۱۳۳۲
— مثلثاتی مختلط ۹۲۹، ۸۲۷، ۷۹۱
— مثلثاتی معکوس ۷۹۹
— هذلولی‌گون ۸۲۸، ۷۹۳
— — مختلط ۸۲۸، ۷۹۳
— معکوس ۷۹۹
— وابستهٔ لژاندار ۲۱۷
توابع بسل
— پیراسته ۲۴۷
— نوع اول ۲۶۰، ۲۳۶
— نوع دوم ۲۴۴، ۲۴۳
— نویمان ۲۴۴، ۲۴۳
— هانکل ۲۴۵

توان عمومی ۷۹۸
تودهٔ ناپذیرفتنی ۱۲۳۵
توزیع
ـ احتمال ۱۱۵۴
ـ اف فیشر ۱۲۲۴
ـ برنولی ۱۱۶۷، ۱۱۸۰
ـ پواسن ۱۱۶۸
ـ پیوسته ۱۱۵۳، ۱۱۸۴
ـ t ی استودنت ۱۲۰۳
ـ چند جمله‌ای ۱۱۷۲
ـ حاشیه‌ای ۱۱۸۵
ـ دوبعدی ۱۱۸۲
ـ دو جمله‌ای ۱۱۶۷، ۱۱۸۰
ـ فراوانی ۱۱۲۴
ـ فوق هندسی ۱۱۶۹
ـ فیشر ـ اف ۱۲۲۴
ـ گاوس ۱۱۷۳
ـ متقارن ۱۱۶۰
ـ مربعی کی ۱۲۰۵
ـ مستطیلی ۱۱۶۱
ـ نرمال ۱۱۷۳، ۱۱۹۶، ۱۲۰۲
ـ یکنواخت ۱۱۶۱، ۱۱۸۴
تیلور
سری ـ ۹۲۴
فرمول ـ ۹۲۴

ثابت
ـ اویلر ۲۴۳
ـ خازنی ۶۱
ـ زمانی ۵۸، ۶۱
ـ زمانی القایی ۵۸
ـ فوریه ۲۵۰
ـ میرایی ۱۱۳

جا به‌جایی ۳۹۶
جا به‌جایی بودن ۳۴۴
جاذب ۱۸۷
جامعه ۱۱۲۰
ـ نامتناهی ۱۱۷۰
جایگشت ۱۱۴۶
جبر ۴۰۳
ـ انجمنی ۴۰۳
ـ خطی ۳۳۵
جدول تبدیلات لاپلاس ۳۳۱
جدول نمودار خط نشانی ۱۱۲۲
جدولهای
ـ توابع ۱۳۴۱، ۱۳۵۶
ـ توابع بسل ۱۳۴۲
ـ کنترل ۱۰۳۰
جریان سیالی ۷۱، ۹۸۸
جریان گرما ۶۰۳، ۷۰۹
جریان موازی ۹۹۴
جزء خطی ۱۴
جمع

ـ اعداد مختلط ۷۵۶
ـ بردارها ۳۴۲، ۳۴۷
ـ سریها ۹۰۰
ـ ماتریسها ۳۸۳
ـ میانگینها ۱۱۸۹
ـ واریانسها ۱۱۹۰
جواب
ـ بدیهی ۴۲۲
ـ حالت مانا ۶۰
ـ خصوصی ۵، ۹۲، ۱۳۴
ـ دستگاه معادلات ۴۰۴
ـ ضمنی ۳
ـ عمومی ۵، ۹۲، ۱۳۳
ـ معادلهٔ دیفرانسیل ۲، ۸۵، ۱۳۲
ـ منفرد ۵
جواب تقریبی
ـ انتگرالگیری ۱۵
ـ مسائل با مقدار ویژه ۱۰۹۷
ـ معادلات ۱۰۱۶
ـ ـ دیفرانسیل ۱۴
جهت یك بردار ۳۳۷
جهت یك منحنی ۵۰۷، ۸۱۱

چارك
ـ تحتانی ۱۱۳۳
ـ فوقانی ۱۱۳۳
ـ میانی ۱۱۳۳

چاولگی ۱۱۶۵
چاهك ۶۰۳، ۹۹۱
چپگرد ۳۶۴
چرخش ۹۹۰
چرخ طیار ۳۰
چشمه ۶۰۴
ـ نقطه‌ای ۹۹۵
چگالی احتمال ۱۱۵۷
چلسکی ۱۰۷۹
چنبره ۵۸۵
چند بارگی ۴۷۲
چند جمله‌ای
ـ چبیشف ۲۶۴
ـ لاگر ۲۶۳، ۲۹۸
ـ لژاندر ۲۱۱، ۲۵۸
ـ مثلثاتی ۶۷۱
ـ هرمیت ۲۶۲
چند ضلعی فراوانی ۱۱۲۵
چهار وجهی ۳۷۳

حاصلضرب
ـ اعداد مختلط ۷۵۹
ـ برداری ۳۶۲
ـ سری مجانبی ۱۱۱۱
ـ کشی ۹۱۴
حافظه ۱۰۱۳
حالت بحرانی ۱۰۲
حالت گذرا ۶۰، ۱۵۳

حالت مانا ۵۹، ۱۵۳
حجم ۵۶۳
- نمونه ۱۱۲۱
حد
- اطمینان ۱۲۰۱
- بالای کنترل ۱۲۲۷
- پایین کنترل ۱۲۲۷
- تابع برداری ۴۹۹
- تابع مختلط ۷۷۱
- چپ ۶۳۹
- دنباله ۴۹۸
- راست ۶۳۹
- کیفیت خروجی متوسط ۱۲۳۷
حدود سه - سیگما ۱۱۷۶
حدود کنترل ۱۲۲۷
حذف گاوس - چلسکی ۱۰۷۹
حذف مشتق اول ۲۴۰
حرکت آزاد ۱۴۹
حرکت سقوطی ۱۱
حرکت واداشته ۱۴۹
حل
- معادلات ۱۰۱۶
- معادلهٔ درجهٔ دوم ۱۰۱۲
- معادلهٔ دیفرانسیل به کمك سری ۱۹۷
حلقهٔ مستدیر ۷۶۷

خارج قسمت اعداد مختلط ۷۵۹
خارج قسمت رایلی ۱۱۰۳
خازن ۵۷
خالی شدن یك خازن ۶۲
خانوادهٔ منحنیها ۶۴
خروجی ۴۹، ۱۴۹، ۱۰۱۴
خط
- جریان ۹۸۹
- رگرسیون ۱۲۵۰
- گرهی ۷۲۳
- مستقیم ۳۵۶
خطای
- آزمایشی ۱۰۱۰
- بلدینگ - آپ ۱۰۷۳
- قطع ۱۰۱۰
- گرد کردن ۱۰۱۱
- مربعی کل ۶۷۱
- مطلق ۱۰۱۰
- نسبی ۱۰۱۰
- نوع I و II ۱۲۱۶
خطوط نیرو ۹۸۵
خطوط هم پتانسیل ۹۸۵، ۹۹۲
خودگردان ۱۸۱
خوش طرح ۱۰۸۸

دالامبر، ژ. ل. ۷۰۱
دامنه ۱۵۱، ۵۲۱
دایره‌ای ۷۶۷

دایرهٔ همگرایی ۹۱۰
دایرهٔ یکه ۷۶۸
دترمینان
— با مرتبهٔ دلخواه ۴۳۸
— دستگاه معادلات ۴۵۳
— حاصلضرب ۴۴۴
— مشخصه ۴۷۰
— یك ماتریس ۴۴۴
ددکیند، ر. ۸۸۸
درجات آزادی ۱۲۰۳، ۱۲۰۵، ۱۲۲۳
درصد اغماض معیوب توده ۱۲۳۵
درونچرخزاد ۵۰۹
— چهارگوش ۵۰۹
درونیابی ۱۰۳۳
— خطی ۱۰۳۳
— درجه دوم ۱۰۳۳
— لاگرانژی ۱۰۳۸
— معکوس ۱۰۳۹
دستگاه
— بنیادی ۹۴، ۱۳۴
— تنگ ۱۰۸۳
— غیر میرا ۱۱۱، ۱۵۱
— معادلات خطی ۴۰۳، ۱۰۷۶
— معادلات دیفرانسیل ۱۷۴، ۳۱۴، ۴۸۱
— معادلات ناهمگن ۴۰۳، ۴۲۲
— معادلات همگن ۴۰۳، ۴۲۲
— میرا ۱۱۲
— یکانی بردارها ۴۷۵
دستورالعملها ۱۰۱۳
دکارت، ر. ۷۵۸
دفع زبالههای اتمی ۵۲
دلتای کرونکر ۵۳۷
دلوار ۵۰۹، ۵۷۴
دموآور ۷۶۴
دنبالهٔ
— صعودی ۸۸۷
— کراندار ۸۷۷
— نامتناهی ۸۷۴
— نزولی ۸۸۷
دوران ۳۶۹، ۵۴۶
دورهٔ اولیه ۶۳۰
دیفرانسیل ۳۷، ۶۱۷
— کامل ۳۷، ۶۱۶
دین ۱۱۰
دیورژانس میدان برداری ۵۳۹، ۶۰۱، ۶۰۲

رابطهٔ تك مقداری ۷۷۰
راکتانسون ۱۵۹
رانسکی ۱۲۷
راه ۱۸۶
ردکردن ۱۲۱۲
ردهای ۱۱۲۶
رشد نمایی ۳۰

رفسون ۱۰۲۰
رقم معنی‌دار ۱۰۱۱
رگرسیون ۱۲۴۸
روش
ـ انتگرالگیری عددی ۱۰۴۷
ـ اویلر ـ کشی ۱۰۶۰، ۱۰۶۲
ـ تکرار پیکار ۷۲
ـ تکرار در مورد معادلات ۱۰۱۶
ـ تکرار درمورد مقادیر ویژه ۱۱۰۳
ـ تکرار ژاکوبی ۱۰۸۵
ـ تکرار گاوس ـ سایدل ۱۰۸۳
ـ توسعه یافته سری توانی ۲۱۷
ـ حداقل مربعات ۱۰۹۳، ۱۲۴۹
ـ حذف گاوس‌ژردانی ۴۲۵، ۱۰۸۱
ـ حذف گاوس ۴۰۵، ۱۰۷۷
ـ حذفی ۴۰۵
ـ درست‌نمایی ماکزیمم ۱۱۹۵
ـ رونگه ـ کوتا ۱۰۶۵، ۱۰۷۱
ـ سری توانی ۱۹۷
ـ ضرایب نامعین ۱۴۲، ۱۹۹
ـ عددی در مورد معادلهٔ دیفرانسیل
۱۰۵۸، ۱۰۶۹
ـ عمومی ۱۶۸
ـ غیر مستقیم ۱۰۸۳
ـ فروبنیوس ۲۱۸
ـ گام به گام ۱۰۵۹
ـ گشتاورها ۱۱۹۵
ـ مختلط ۱۶۴
ـ مستقیم ۱۰۸۲
ـ نابجایی ۱۰۲۳
ـ نیوتن ۱۰۲۰
ـ نیوتن ـ رفسون ۱۰۲۰
ـ هیون ۱۰۶۲
روشهای عددی
ـ برای انتگرالگیری ۱۰۴۷
ـ برای معادلات ۱۰۱۶
ـ ـ خطی ۱۰۷۶
ـ ـ دیفرانسیل ۱۰۵۸، ۱۰۶۹
ـ برای مقادیر ویژه ۱۰۹۷
ریشهٔ دوم ۷۸۵، ۱۰۲۰
ریشهٔ راکد ۴۶۷، ۱۰۹۷
ریمان
رویهٔ ـ ۸۳۴
کرهٔ عددی ـ ۹۵۵
معادلات ـ ۷۷۸

زاویه
ـ بین بردارها ۳۵۳
ـ بین منحنیها ۶۶، ۵۸۳
ـ فاز ۱۵۵
زبان مسئله‌ای ۱۰۱۴
زیر پیشامد ۱۱۳۷
زیر فضا ۳۵۲
زیر فضای برداری ۳۵۲

زیر ماتریس ۳۸۲

ژاکوبی ۵۶۶، ۸۱۳

ستون
– بردار ۳۸۱
– دترمینان ۴۳۸
– ماتریس ۳۸۱
سرعت‌گریز ۲۴
سری
– تعمیم یافته فوریه ۲۵۰
– توابع بسل ۲۶۰
– توابع متعامد ۲۵۱
– توابع ویژه ۲۵۶
– توانی ۱۹۸، ۲۰۴، ۹۰۷، ۹۳۹
– تیلور ۹۲۴
– دوجمله‌ای ۹۳۲
– دوگانه ۷۲۵
– سینوسی فوریه ۶۴۸
– فوریه ۶۳۶، ۶۹۳
– فوریه ـ بسل ۲۶۰
– فوریهٔ تعمیم یافته ۲۵۰
– فوریهٔ دوگانه ۷۲۵
– فوریهٔ مختلط ۶۵۸
– فوریهٔ نیم‌دامنه ۶۵۵
– فوق هندسی ۲۳۲
– لوران ۹۲۶، ۹۵۷
– مثلثاتی ۶۳۱
– مجانبی ۱۱۰۸
– مختلط ۸۷۹
– مکلورن ۹۲۴
– نامتناهی ۸۷۹
– همساز ۸۸۰
– همگرا ۲۰۴، ۸۷۹
– هندسی ۲۰۶، ۸۹۲، ۹۰۸، ۹۲۸
سطح ۵۷۷
– پیمانه‌ای ۷۹۳
– تراز ۴۹۷، ۵۲۸
– جهت‌دار ۵۹۱
– جهت‌ناپذیر ۵۹۱
– هموار ۵۷۸
سطوح هم‌پتانسیل ۹۸۴
سه‌تایی
– بردارها ۳۶۳
– بنیادی ۳۴۵
– راستگرد بردارها ۳۶۳
– متعامد ۳۴۵
سهمی نیم مکعبی ۵۰۸
سهمی‌وار ۵۸۰
– هذلولی‌گون ۵۸۰
سه وجهی ۵۱۱
سیال تراکم‌ناپذیر ۵۴۱
سینوس متغیر حقیقی ۱۳۳۲
سینوس متغیر مختلط ۷۹۲، ۸۲۷، ۹۲۹

شار ۵۴۲
شبکه ۱۷۷، ۴۱۳، ۴۵۸
ـ الکتریکی ۱۷۷، ۳۲۸، ۴۱۲، ۴۵۸
ـ چهار سر ۴۵۸
ـ متعامد ۶۶
شتاب ۵۱۴
ـ کوریولی ۵۱۶، ۵۱۹
ـ مرکزگرا ۵۱۵
شدت جریان لحظه‌ای ۵۶
شرط
ـ اولیه ۱۹، ۱۲۴، ۱۳۲، ۶۹۱
ـ کرانه‌ای ۶۸۷، ۶۹۱
ـ گرما ۶۰۳، ۷۰۵، ۷۱۱
ـ لیپ شیتز ۸۰
شعاع طیفی ۴۶۷، ۱۰۸۴
شعاع همگرایی ۲۰۵، ۹۱۰
شکست ۱۱۶۷
شکل قطبی اعداد مختلط ۷۶۲
شکل مثلثاتی اعداد مختلط ۷۶۲

صدک ۱۱۳۳
صفحه
ـ بوسان ۵۱۲
ـ راستگرد ۵۱۲
ـ فاز ۱۸۲
ـ قائم ۵۱۲
ـ مختلط ۷۵۷
ـ ـ توسعه یافته ۸۱۷، ۹۵۳
ـ ـ متناهی ۸۱۷
ـ مماس ۵۲۹، ۵۸۱
صفرهای تابع تحلیلی ۹۵۵
صفرهای توابع بسل ۱۳۴۲
صورت
ـ بنیادی ۵۸۳
ـ بنیادی اول ۵۸۳
ـ ـ درمختصات قطبی ۵۸۳
ـ پلکانی ۴۰۸
ـ درجه دوم ۴۶۲
ـ دوخطی ۴۶۱
ـ دیفرانسیلی ۶۱۷
ـ صریح معادلهٔ دیفرانسیل ۱۳
ـ ضد هرمیتی ۴۶۵
ـ نرمال هسه ۳۵۷
ـ هرمیتی ۴۶۳

ضرایب
ـ دستگاه معادلات ۴۰۳
ـ دوجمله‌ای ۱۰۳۵، ۱۱۵۰
ـ سری توانی ۱۹۸
ـ سری فوریه ۶۳۶
ـ فوریه ۲۵۱، ۶۳۶، ۶۴۳، ۶۶۳
ـ مختلط فوریه ۶۵۸
ـ معادلهٔ دیفرانسیل ۸۵
ـ نامعین ۱۴۲، ۱۹۹، ۹۳۴

ضرب
— اسکالر ۳۵۲، ۳۶۰
— اعداد مختلط ۷۵۷
— بردارها ۳۴۴، ۳۵۲، ۳۶۲
— برداری ۳۵۲، ۳۶۲، ۳۷۲
— خارجی ۳۶۲
— داخلی ۳۵۲، ۳۶۰، ۴۷۶
— دترمینانها ۴۴۴
— دراسکالر ۳۴۷، ۳۸۴
— سریها ۹۱۴
— سریهای توانی ۹۱۵
— سریهای مجانبی ۱۱۱۱
— سه‌گانهٔ اسکالر ۳۷۲
— سه‌گانهٔ مختلط ۳۷۲
— ماتریسها ۳۹۳
— ماتریسی ۳۹۱
— میانگینها ۱۱۸۹
— نقطه‌ای ۳۵۲
ضربان ۱۵۳
ضریب
— القایی ۵۷
— رگرسیونی ۱۲۵۰، ۱۲۵۲
— هدایت حرارتی ۶۰۳

طرح نمونه‌گیری ۱۲۳۳، ۱۲۳۸
— تك ۱۲۳۳
— دوگانه ۱۲۳۸
طوق ۷۶۵
طول
— بردار ۳۳۷
— قوس ۵۰۷
— منحنی ۵۰۶، ۵۸۳
طیف ۴۶۷

ظرفیت ۵۷

عامل انتگرالساز ۴۲
عامل ناپیوستهٔ دیریکله ۶۷۸
عدد پذیرش ۱۲۳۳
عدد موهومی محض ۷۶۱
عقب‌گرد ۱۰۳۷
عملگر ۱۰۶، ۳۹۸
— لاپلاس ۵۳۱
— های دیفرانسیل ۱۰۶
عنصر
— خطی ۵۰۸
— دترمینان ۴۳۸
— صفر ۳۴۷
— ماتریس ۳۸۱
— مساحت ۵۸۴

غشا ۷۱۷
— غیر دورانی ۵۴۷
— ی مرتعش ۷۱۵
— ی مستدیر ۷۳۱

ـ ی مستطیلی ۷۱۹

فاراد ۵۷
فاصلهٔ
ـ اطمینان ۱۲۰۱
ـ باز ۹۳
ـ بسته ۹۳
ـ رده‌ای ۱۱۲۶
ـ همگرایی ۲۰۵
فرآیند متناهی ۱۰۱۰
فراوانی
بافت‌نگار ـ ۱۱۲۵
ـ تجمعی ۱۱۲۲
ـ رده‌ای ۱۱۲۶
ـ ـ نسبی ۱۱۲۶
ـ مطلق ۱۱۲۲
ـ نسبی ۱۱۲۲
ـ ـ تجمعی ۱۱۲۲
ـ نوسان ۱۱۲
فرترن ۱۰۱۴
فرض ۱۲۱۲
ـ صفر ۱۲۱۴
ـ مقابل ۱۲۱۵
ـ ـ دوطرفه ۱۲۱۵
فرمول
ـ استرلینگ ۱۱۵۰، ۱۳۳۷
ـ انتگرال کشی ۸۶۴
ـ انتگرالگیری باز ۱۰۵۵
ـ انتگرالگیری بسته ۱۰۵۵
ـ انتگرالگیری پواسن ۱۰۰۳
ـ اول گرین ۶۰۶
ـ اویلر ۲۵۱، ۷۸۹، ۷۹۲
ـ تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن ۱۰۳۷
ـ تفاضل مرکزی گاوس ۱۰۵۵
ـ تیلور ۹۲۴
ـ درون‌یابی اورت ۱۰۳۶
ـ درون‌یابی لاگرانژ ۱۰۳۸
ـ درون‌یابی نیوتن ۱۰۳۴، ۱۰۳۵
ـ دموآور ۷۶۵
ـ دوم گرین ۶۰۶
ـ دوهامل ۸۵۲
ـ رودریگس ۲۱۶
ـ ضرایب اویلر برای ضرایب فوریه
۶۳۵، ۶۴۳، ۷۲۵
ـ کوشی ـ آدامار ۹۱۱
ـ گریگوری ـ نیوتن ۱۰۳۴، ۱۰۳۵
ـ گرین ۶۰۶
ـ های فرنه ۵۱۳
فرمولهایی در مورد دیورژانس ۵۴۴
فرمولهایی‌درمورد کرل‌و دیورژانس ۵۴۷
فروبنیوس، گ. ۲۱۸
فشار اتمسفریك ۱۲
فضای
ـ برداری ۳۴۷، ۳۸۵
ـ ـ حقیقی ۳۴۷

— — مختلط ۳۴۸
— پوچ ۴۲۲
— خطی ۳۴۷
— — حقیقی ۳۴۷
— ضرب داخلی ۳۶۰
— نمونه ۱۱۲۱، ۱۱۹۲
فوت ۱۱۰
فوریه، ژ. ۶۲۹

قائم
— اصلی ۵۱۱
— برصفحه ۳۵۷
— دوم ۵۱۱
قاعدهٔ
— ذوزنقه‌ای ۱۰۴۸
— زنجیری ۵۲۰
— سمپسون ۱۰۵۲
— سه ـ هشت ۱۰۵۴
— ضرب ۱۱۴۴
— کرامر ۴۳۱، ۴۳۳، ۴۵۳
— گرد کردن ۱۰۱۱
— مستطیلی ۱۰۴۸
— مکمل گیری ۱۱۴۲
— ودل ۱۰۵۴
قانون
— اثر جرم ۳۳
— اعداد بزرگ ۱۱۸۲
— بویل ـ ماریوت برای گازهای ایده‌آل ۲۹
— پخشپذیری ۳۶۷
— تبرید ۲۱
— — نیوتن ۲۱
— توریچلی ۲۲
— جاذبهٔ نیوتن ۲۴، ۴۹۶
— جذب ۳۰
— دوم نیوتن ۳۰، ۱۱۱
— کولن ۵۳۲
— کیرشهف ۵۷
— گرانش ۴۹۶
— لوژیستکی ۱۷
— مالتوس ۱۲
— متوازی‌الاضلاع ۳۴۲
— میانگین ۵۲۲، ۵۶۲، ۶۰۱
— هوك ۱۱۰
قدرت چشمه ۹۹۵
قرص ۷۶۷
— باز ۸۶۶
— بسته ۷۶۸
قسمت حقیقی ۷۵۶
قسمت موهومی ۷۵۶
قضایای
— انتقال ۲۸۳، ۲۸۵
— انتگرال‌حقیقی ۵۶۹، ۵۹۷، ۶۰۵، ۶۱۰

ـ انتگرال مختلط ۸۵۲، ۸۶۵
قضیهٔ
ـ استوکس ۶۱۰
ـ اشتاینر ۵۹۶
ـ انتگرال کشی ۸۵۲
ـ اول انتقال ۲۸۳
ـ بنیادی جبر ۸۷۲
ـ بولتسانو ـ وایرشتراس ۸۸۴
ـ پاپوس ۵۸۹
ـ پیکار ۹۶۰
ـ حد ۱۱۷۹
ـ ـ دموآور ۱۱۷۹
ـ ـ لاپلاس ۱۱۷۹
ـ ـ مرکزی ۱۲۰۹
ـ دوم انتقال ۲۸۵
ـ دیورژانس گاوس ۵۹۷
ـ قدرمطلق ماکزیمم ۹۹۸
ـ فروبنیوس ۱۱۰۰
ـ کرامر ۴۵۳
ـ گرین ۵۶۹، ۶۰۶، ۶۱۴
ـ لیوویل ۸۷۱
ـ مانده ۹۶۸
ـ مررا ۸۷۰
ـ مقدارمیانگین ۵۲۲، ۵۶۲، ۶۰۱
قضیهٔ وجود
ـ انتگرال فوریه ۶۷۷
ـ تبدیل لاپلاس ۲۷۲
ـ سری فوریه ۶۳۹
ـ معادلات دیفرانسیل ۷۷، ۱۲۴، ۱۳۲، ۱۶
قطب ساده ۹۵۷، ۹۶۵
قطر اصلی ۳۸۲، ۴۳۸
قوانین کیرشهف ۵۷
قوس ۵۰۴

کابل ۸۸
ـ آویخته ۸۸
کار ۳۵۵، ۶۲۱
کارت منگنه شده ۱۰۱۳
کاردانو ۷۵۶
کاغذ احتمال ۱۱۹۸
ـ نرمال ۱۱۹۸
کالای معیوب ۱۱۲۰، ۱۲۳۳
کالای نامعیوب ۱۱۲۰
کتانژانت ۷۹۱
کدگذاری ۱۱۳۴
ـ کامل ۱۱۳۴، ۱۲۵۱
کران خطا ۱۰۱۰، ۱۰۴۸
کراندار ۷۷
کرانهای مقادیرویژه‌ای ۱۱۰۰
کره ۵۷۹
ـ عددی ۹۵۵
ـ ـ ریمان ۹۵۵
ـ ـ مختلط ۹۵۵
کسرجزئی ۳۰۵

کسینوس
— متغیر مختلط ۷۹۱، ۸۲۸، ۹۲۹
— هذلولی ۷۹۳
— یك متغیر حقیقی ۱۳۳۲
کشاننده ۱۶
کشی، آ. ل. ۱۲۱
کلاتس، ل. ۱۱۰۰
کمانش یك میله ۱۲۰
کمپیوتر خودکار ۱۰۱۳
کنترل کیفیت ۱۲۲۶
کوتا ۱۰۶۵
کولن ۵۷
کوواریانس ۱۱۹۰، ۱۲۵۰
— نمونه ۱۲۵۰
کهاد ۴۳۵، ۴۳۸
کیفیت خروجی متوسط ۱۲۳۷

گرادیان ۵۲۶
گرانش ۲۴، ۴۹۶، ۵۳۰، ۷۳۸
گردابی ۱۹۱
گردش ۶۱۴، ۹۸۹، ۹۹۷
گرشگورین ۱۰۹۷
گروه‌بندی ۹۰۱، ۱۱۲۶
گره ۱۸۹
گریز از زمین ۲۴
گسترش دوره‌ای ۶۵۴
گسترنده ۵۰۹
گشتاور
— توزیع ۱۱۶۳
— قطبی لختی ۵۶۴
— لختی ۵۶۳، ۵۹۰
— مرکزی ۱۱۶۳
— نیرو ۳۶۸
— یك نمونه ۱۱۹۵
گورسا، ا. ۸۵۳

لاپلاس، پ. س. ۲۶۸
لاگرانژ، ژ. ل. ۵۳
لژاندر آ. م. ۲۱۱
لگاریتم طبیعی ۷۹۵، ۸۲۶، ۸۳۶
لگاریتم مختلط ۷۹۵، ۸۲۶، ۸۳۶
لولهٔ توپ ۱۵۷
لیبنیتز، گ. و. ۲۱
لیوویل، ژ. ۲۵۳

ماتریس ۳۸۱
— اسکالر ۳۹۷
— افزوده ۴۰۴
— تکین ۴۲۴
— تلاقی خانه‌ای ۳۹۰
— حقیقی ۳۸۲
— خودتوان ۴۰۲
— ستونی ۳۸۱
— سطری ۳۸۱

ـ صفر ۳۸۳
ـ ضد متقارن ۳۸۶، ۴۶۴
ـ ضد هرمیتی ۴۶۴، ۴۷۶
ـ ضرایب ۴۰۴
ـ قطری ۳۸۷
ـ متعامد ۴۷۴
ـ متقارن ۳۸۶، ۴۷۸
ـ مثلثی ۳۸۷
ـ مربعی ۳۸۲
ـ ناتکین ۴۲۴
ـ نرمال ۴۸۰
ـ هرمیتی ۴۶۳، ۴۷۴
ـ هیلبرت ۱۰۹۱، ۱۰۹۶
ـ یکانی ۴۷۵
ـ یکه ۳۸۷
مارپیچ ۵۰۳، ۵۰۸، ۵۱۱، ۵۸۱
ـ مستدیر ۵۰۳، ۵۰۸، ۵۱۱
ماریوت، ۱. ۲۹
مافوق تن ۶۹۴
ماندههای تابع تحلیلی ۹۶۴
مبدأ کارآمد ۱۱۳۳
متعامد یکه ۲۴۸، ۲۵۱
متغیر
ـ استاندارد شده ۱۱۶۲
ـ استوکاستیك ۱۱۵۲
ـ مختلط ۷۶۹
متغیر تصادفی ۱۱۵۲
ـ پیوسته ۱۱۵۶، ۱۱۸۴
ـ دوبعدی ۱۱۵۵
ـ گسسته ۱۱۵۳، ۱۱۸۳
ـ مستقل ۱۱۸۷
ـ نرمال ۱۱۷۳
ـ وابسته ۱۱۸۷
متوازیالسطوح ۳۷۳
مجانبی
پایدار ـ ۱۸۸
ـ مساوی ۱۱۸۰
نرمال ـ ۱۲۱۰
مجموع
ـ اعداد مختلط ۷۵۶
ـ جزئی ۲۰۴
ـ ماتریسها ۳۸۳
ـ متغیرهای نرمال ۱۲۰۶
ـ یك سری ۲۰۴
مجموعهٔ
ـ کراندار ۷۶۹
ـ نقاط ۷۶۸
ـ ـ باز ۷۶۸
ـ ـ بسته ۷۶۸
ـ همبند ۵۲۱، ۷۶۹
مجموعهای جزئی سری ۲۰۴، ۸۷۹
محور حقیقی ۷۵۷
محور موهومی ۷۵۷
مختصات

ـ استوانه‌ای ۷۳۹
ـ چپگرد ۳۶۴
ـ دکارتی ۳۳۹، ۷۵۸
ـ راستگرد ۳۶۴
ـ قطبی ۵۶۶، ۵۷۳، ۵۸۳
ـ کروی ۷۴۰
مد
ـ بنیادی ۶۹۲
ـ نرمال ۶۹۴، ۷۳۴
مدار
ـ RL ۵۸
ـ RLC ۱۶۰
ـ RC ۶۰، ۱۶۲، ۲۸۸
ـ LC ۱۶۳
ـ الکتریکی ۵۶، ۱۵۷، ۲۸۸
مدل جمعیت ۱۲، ۱۷
مدلسازی ۱، ۱۵۹
مدول ۷۶۰
ـ فنر ۱۱۵
مرتبهٔ
ـ دترمینان ۴۳۸
ـ فرآیند تکرار ۱۰۲۲
ـ ماتریس ۴۱۴، ۴۵۲
ـ ـ مربعی ۳۸۲
ـ معادلهٔ دیفرانسیل ۲
مرکز
ـ سری توانی ۱۹۸
ـ گرانیگاه ۵۶۳، ۵۹۵
مساحت ۵۶۳، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۸۴
ـ سطح ۵۸۶
مساحت سنج ۱۰۴۸
مسئله
ـ استورم ـ لیوویل ۲۵۳
ـ با مقداراولیه ۱۹، ۹۶، ۱۲۴
ـ با مقدار مرزی ۹۶، ۲۵۳
ـ تعقیب ۱۵
ـ دیریکله ۱۰۰۱
مستقل خطی ۹۳
مسیر ۶۶، ۱۸۸
ـ انتگرالگیری ۵۵۱، ۸۴۳
ـ های متعامد ۶۶
ـ های همزاویه ۷۲
مشابه دستگاه الکتریکی و مکانیکی ۱۵۹
مشاهده ۱۱۳۴
ـ تصادفی ۱۱۳۴
مشتق
ـ تابع برداری ۴۹۹
ـ تابع تحلیلی ۸۶۸، ۹۲۰
ـ تابع مختلط ۷۷۲، ۸۶۸، ۹۲۰
ـ جهتی ۵۲۵
ـ چپ ۶۳۹
ـ راست ۶۳۹
مشتقپذیر ۴۹۹
مشتقگیری

— تبدیلات لاپلاس ۲۷۵، ۲۹۵
— توابع تحلیلی ۸۶۸
— توابع مختلط ۷۷۲
— جمله به جمله ۲۰۷
— سری ۹۱۹، ۹۴۳
— — توانی ۹۱۹
— — مجانبی ۱۱۱۴
— عددی ۱۰۵۵
مشخصهٔ عمل کننده ۱۲۱۷، ۱۲۳۳
مصحح ۱۰۶۲
معادلات
— انتگرالی ۳۰۵
— تلگراف ۷۴۶
— خط انتقال ۷۴۶
— خط بالا فرکانس ۷۴۶
— خطی معادل ۴۱۰
— خطی همزمان ۴۰۳
— ریمان ۷۷۸
— کابل زیر دریایی ۷۴۶
— کشی ـ ریمان ۷۰، ۷۷۸
— نرمال ۱۰۹۳
معادلهٔ
— اویلر ۱۲۱، ۱۳۹
— برنولی ۵۴
— بسل ۲۳۴، ۲۵۹
— پواسون ۶۸۶
— پیوستگی ۵۴۳
— تریکومی ۷۰۱
— درجهٔ دوم ۱۰۱۲
— شاخصی ۲۱۹
— فوق هندسی گاوس ۲۳۲
— کامل ۳۷، ۶۱۷
— کشی ۱۲۱، ۱۳۹، ۲۳۱
— کمکی ۹۰، ۱۲۱، ۲۸۲
— گرما ۶۰۴
— — ی یك بعدی ۷۰۳
— لاپلاس ۵۳۱، ۶۰۵، ۶۰۶
— مشخصه ۹۰، ۱۳۶، ۴۷۰
— موج ۶۹۰، ۷۱۹
— — دو بعدی ۷۱۹
— — یك بعدی ۶۹۰
— واندرپل ۱۸۳
— وبر ۲۶۳
— هلمهولتز ۷۴۱
معادلهٔ دیفرانسیل
— ارتعاشات غشا ۷۱۹
— استورم ـ لیوویل ۲۵۲
— اویلر ۱۲۱، ۱۳۹
— با ضرایب ثابت ۸۹، ۱۳۶
— با مشتق جزئی ۶۸۶
— برنولی ۵۴
— بسل ۲۳۴، ۲۵۹
— بیضی گون ۷۰۳
— تفکیك پذیر ۱۷

ـ پواسن ۶۸۶
ـ خطی ۴۵، ۸۳، ۱۳۲، ۶۸۶
ـ سهمی‌گون ۷۰۱
ـ غیرخطی ۸۴، ۱۳۲
ـ غیرهمگن ۴۵، ۸۴، ۱۳۲، ۱۴۰
ـ فوق هندسی ۲۳۲
ـ قابل تحویل به معادلهٔ بسل ۲۴۶
ـ کامل ۳۷
ـ کشی ۱۲۱، ۱۳۹، ۲۳۱
ـ کشی ـ ریمان ۷، ۷۷۸
ـ لاپلاس ۵۳۰، ۶۰۴، ۷۳۷، ۷۴۲، ۷۸۱
ـ لاگر ۲۹۹
ـ لژاندر ۲۱۱، ۷۴۳
ـ مدارها ۵۸، ۱۵۸
ـ معمولی ۱
ـ نخ مرتعش ۶۹۱
ـ وبر ۲۶۳
ـ هذلولی‌گون ۷۰۳
ـ همگن ۳۵، ۴۵، ۸۴، ۱۳۲
معکوس ماتریس ۴۲۳، ۴۵۶ ۱۰۸۵
معین بودن ۴۶۵
معین مثبت ۳۵۳، ۳۶۰، ۴۶۶
مفهوم مجرد ۳۴۸
مقابل ۱۲۱۵
ـ یك طرفه ۱۲۱۵
مقاومت هوا ۵۱
مقایسهٔ زوجی ۱۲۲۲
مقدار
ـ اصلی کشی ۹۷۲، ۹۷۸
ـ سری ۲۰۴
ـ مشاهده شده ۱۱۵۳
ـ مشخصه ۲۵۳، ۴۶۷
ـ مطلق ۷۶۲
ـ ممکن ۱۱۵۶
ـ نمونه ۱۱۲۲
مقدار میانگین
ـ تابع ۹۸۹
ـ تابع همساز ۹۹۹
ـ توابع تحلیلی ۹۹۸
ـ توزیع ۱۱۶۰
ـ نمونه ۱۱۲۹
مقدار ویژه‌ای
ـ غشای مرتعش ۷۲۳
ـ مرتبهٔ mام ۴۷۰
ـ نخ مرتعش ۶۹۴
مقیاس‌گذاری ۱۰۱۲، ۱۰۷۹
مکانیسم کنترل ۳۳۰
مکمل ۷۶۸، ۱۱۳۶
مماس برمنحنی ۵۰۹
ممیز ثابت ۱۰۱۱
ممیز شناور ۱۰۱۱
منحنی ۵۰۲
ـ OC ۱۲۱۷، ۱۲۲۳

ـ تابدار ۵۰۳
ـ تراز ۴۹۶
ـ راستی‌پذیر ۵۰۶
ـ زنجیری ۸۸، ۵۰۸
ـ زنگی شکل ۱۹، ۷۱۶، ۱۱۷۳
ـ ساده ۵۰۴
ـ صفحه‌ای ۵۰۳
ـ های متعامد ۶۶
ـ هموار ۵۵۰، ۸۱۱
ـ ـ تکه‌ای ۸۴۳
منظم ۷۷۵
موبیوس ۵۹۲
موج دندانه اره‌ای ۳۲۰
موج مربعی ۳۱۹
موفقیت ۱۱۶۷
مؤلفه ۳۳۹، ۳۵۵
میانگین نمونه ۱۱۳۰
میانه ۱۱۲۳، ۱۲۲۵
میدان
ـ اسکالر ۴۹۴
ـ الکتریکی ۷۰
ـ برداری ۴۹۴
ـ پایستار ۵۳۲، ۵۴۷، ۶۲۱
ـ راستا ۱۴
ـ سرعت ۴۹۵
ـ غیردورانی ۵۴۷
ـ گرانشی ۴۹۵، ۵۳۰
ـ نیرو ۴۹۶
میرایی
ـ بحرانی ۱۱۶
ـ خفیف ۱۱۴
ـ شدید ۱۱۴
میزان تقویت ۱۵۴
میله ۷۰۳

نابلا ۵۲۶
ناپایدار ۱۸۸
ناحیه
ـ بحرانی ۱۲۱۵
ـ بسته ۵۶۰
ـ کراندار ۵۶۰
نامساوی
ـ بسل ۶۷۳
ـ شور ۱۰۹۹
ـ کشی ۸۷۱
ـ مثلثی ۳۵۴، ۳۶۱، ۷۶۵
ناوردایی ۵۴۰
نخ مرتعش ۶۸۹، ۷۴۶
نرم ۲۲۸، ۲۵۱، ۳۶۱، ۴۷۶
نرمال برسطح ۵۲۹، ۵۸۲
نزول ۱۲۰
ـ لگاریتمی ۱۲۰
نسبت معیوبها ۱۲۲۳
نظریهٔ پتانسیل ۷۳۸

نظم آماری ۱۱۴۰
نقطه
ـ انباشتگی ۹۵۶
ـ تکین ۹۵۷، ۹۲۷
ـ تنها ۹۵۶
ـ ثابت ۱۰۱۷، ۸۱۸
ـ چندگانه ۵۰۴
ـ حدی ۸۸۳
ـ حلزونی ۱۹۱
ـ در بینهایت ۸۱۷
ـ دوگانه ۵۰۴
ـ رکود ۹۹۶
ـ زینی ۱۹۰
ـ شاخه‌ای ۸۳۵
ـ کرانه‌ای ۷۶۹
ـ میان رده‌ای ۱۱۲۶
نقش ۳۹۹
نگاشت ۳۹۸
ـ بر روی ۳۹۹
ـ تابع تحلیلی ۸۱۰
ـ پوششی ۳۹۹
ـ خطی ۳۹۹
ـ دوسویی ۸۰۲، ۳۹۹
ـ همدیسی ۸۱۰
ـ یك‌به‌یك ۳۹۹
نمایش پارامتری ۵۷۸، ۵۰۲
نمودار ون ۱۱۳۷
نمونه ۱۱۹۲، ۱۱۲۱
ـ تصادفی ۱۱۹۲، ۱۱۲۱
نمونه‌گیری
ـ با جایگذاری ۱۱۶۸، ۱۱۴۴
ـ بدون جایگذاری ۱۱۶۹، ۱۱۴۴
ـ برای پذیرش ۱۲۳۲
نوار موبیوس ۵۹۲
نوسانات
ـ آزاد ۲۸۴، ۱۰۹
ـ جسم متصل به‌فنر ۱۷۶، ۱۴۹، ۱۰۹، ۱۸۰، ۲۸۹، ۳۰۱، ۳۱۳، ۳۲۱، ۴۶۸
ـ خود تقویتی ۱۸۳
ـ غیرمیرا ۱۵۱، ۱۱۱
ـ میرا ۱۵۳، ۱۱۴
ـ واداشته ۶۶۷، ۳۲۱ ۳۰۱، ۱۴۹
ـ همساز ۱۸۲، ۱۱۲
نیروی
ـ فنر ۱۱۰
ـ گرانشی ۴۱ه
ـ محرك ۱۴۹
ـ محرکهٔ الکتریکی ۵۶
ـ ـ ثابت ۵۸
ـ مرکزگرا ۵۱۵
ـ میرایی ۱۱۲
نیسترم ۱۰۷۱
نیکویی برازش ۱۲۳۹
نیم‌عمر ۳۰

نیوتن، آ. ۲۱، ۱۱۰

وابستگی خطی ۹۳، ۱۳۳، ۳۴۸، ۳۷۴، ۴۱۸
واحد
− حساب ۱۰۱۴
− کنترل ۱۰۱۳
− موهومی ۷۵۶
واریانس نمونه ۱۱۳۰
واریانس توزیع ۱۱۶۰
واریت ۱۱۵۲
واکنش شیمیایی ۳۳
واگرا ۲۰۴
واهلشی ۱۰۸۵
وجود معکوس ماتریس ۴۲۴
ورودی ۴۹، ۱۴۹، ۱۰۱۳
وسل، ك. ۷۵۸
ولتاژ ۵۶

هانری، ژ. ۵۶
هرتز، ه. ۱۱۲
هلوریخت ۷۷۳
همانی سریهای توانی ۹۱۸
همبند چندگانه ۸۵۲
همبند ساده ۶۲۳، ۸۵۲
همخط ۳۵۰
همساز مزدوج ۷۸۱
همسازه ۴۳۵، ۴۳۸
همسایگی ۴۹۸، ۵۲۰
همشیب ۱۴
هم صفحه ۳۵۰
همگرایی
− شرطی ۸۸۱
− مطلق ۸۸۱، ۹۰۹
− يك دنباله ۴۸۸، ۸۷۴
− يك سری ۲۰۴، ۸۷۹
− يك فرآیند تکراری ۱۰۱۷
− یکنواخت ۹۳۹
همگردان ۱۰۱۴
هموار تکه‌ای ۵۵۲، ۵۷۹
هندسه دیفرانسیل ۵۰۲
هوابر ژوکوفسکی ۸۳۸
هون ۱۲۷
هیلبرت، د. ۳۶۰

یکتایی
− سری توانی ۹۱۸
− سری لوران ۹۵۰
− معادلات خطی ۴۲۱، ۴۵۴
− معادلات دیفرانسیل ۷۸، ۱۲۴، ۱۳۲، ۴۸۶، ۶۰۶
یکسو شدهٔ تمام موج ۳۲۵
یکسو کنندهٔ نیم موجی ۳۱۹، ۶۴۵
یکنوا ۸۸۷